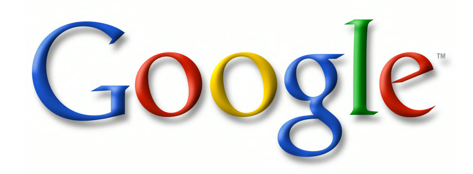
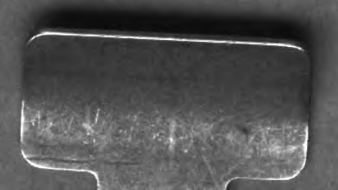






Archiv
für
Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

herausgegeben

von

Professor Dr.-Ing. W. Rogowski
Aachen

XIX. Band

Mit zahlreichen Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1928

Namenverzeichnis.

Seite

Baumgart und Rogowski, Ein Glühkathodenoszillograph für Vakuumaufnahmen 521
Bechmann, Zur Theorie des Stromwenders 15
Bolz, Drehzahl- und Phasenregelung von Asynchronmotoren mittels Frequenzumformer 275
Braunbek, Eine gittertheoretische Berechnung der elektrolytischen Leitfähigkeit 115
Büge, Beitrag zur Messung des Zündverzuges bei der Glimmentladung . . 480
Flegler, Die Wirkungsweise von Überspannungsschutzvorrichtungen nach Untersuchungen mit dem Kathodenoszillographen 527
Fock, Zur Wärmetheorie des elektrischen Durchschlags 71
Fock, Malyschew und Walther, Elektrische Felder einiger Hochspannungskabel 463
v. Freydorf und Hausrath, Verfahren und Gerät zur Meßdrahteichung . . . 575
Gerecke, Sechsphasengleichrichteranlage mit Einphasentransformator . . 449
Geyger, Über neue eisenlose elektrodynamische Präzisions-Leistungsmesser hoher Empfindlichkeit 132
Goering, Über Resonanzkurven von Siebketten (Anwendungen) 312
Grüning, Der Transverter. Ein Hochspannungs-Drehstrom-Gleichstromumformer 579
Hauffe, Drehstromleistungsmessung in Aronschaltung mit Meßwandlern . . . 10
— Zur Tangensformel von Breitfeld II . 104
Hausrath, Verfahren und Vorrichtungen zur Widerstandseichung mittels kalibrierbarer Eichgeräte 567
Hausrath und v. Freydorf, Verfahren und Gerät zur Meßdrahteichung . . . 575
Hemmeter, Nachtrag und Berichtigung 234
Inge und Walther, Durchschlag von Glas in homogenen und nichthomogenen elektrischen Feldern 257
Labus, Berechnung des elektrischen Feldes von Hochspannungstransformatoren mit Hilfe der konformen Abbildung, wenn mehrere Wicklungen mit verschiedenen Potentialen vorhanden sind 82
Liwschitz, Asynchronmaschinen mit vom Schlupf unabhängiger Wirk- und Blindleistung 335
Lund, Ein graphisches Verfahren zur Berechnung des Boucherotmotors . . . 472
Mandl, Der einphasige Kurzschluß des Drehstromgenerators mit Resonanzkreis an der offenen Phase 485
Malyschew, Fock und Walther, Elektrische Felder einiger Hochspannungskabel 463
Mayr, Eine neue Schaltung zur Messung der Durchschlagsverzögerung elektrischer Isolatoren 108
Metzler, Die Magnetisierungscharakteristik der Gleichpol-Induktortype . . 57
Oberdorfer, Die Spannungsverlagerung in Netzen mit Löschtransformatoren nach System Bauch 405
Ollendorff, Elektrische Stromleitung an feuchten Gebäudewänden. Versuch einer Theorie 123
Pohl, Die MMK-Oberschwingungen einschichtiger Drehstromwicklungen . . 443
Potthoff, Zur Theorie des Quecksilberdampfgleichrichters 301
Punga, Verbesserung des Parallellaufes von Maschinen, die durch Gasmaschinen oder Dieselmotoren angetrieben werden 513
Rogowski und Baumgart, Ein Glühkathodenoszillograph für Vakuumaufnahmen 521
Sahland, Anfangsspannungen für Mehrfachelektroden in Luft 145
Silbertal, Die Stabilität elektrischer Systeme 1
Schenfer, Kurzschlußvorgänge bei Einankerumformern 437
Strutt, Über die induktive Heizung . 424
Tamm, Funkenuntersuchungen mit dem Kathodenoszillographen 235
Toriyama, Untersuchung an Transformatorenöl 31
Walther und Inge, Durchschlag von Glas in homogenen und nichthomogenen elektrischen Feldern 257
Walther, Fock u. Malyschew, Elektrische Felder einiger Hochspannungskabel 463
Weber, Die magnetischen Felder in leerlaufenden Synchronmaschinen . . . 193
Weißensee, Über hinreichende Dimensionierungsgleichungen elektrischer Maschinen 356
Wolman, Über ein Verfahren der Eisenprüfung mit dem magnetischen Spannungsmesser. Messungen an Eiseneinkristallen 385
Zickner, Eine handliche Meßbrücke zur Bestimmung von Induktivitäten und Kapazitäten 49

Archiv für Elektrotechnik

XIX. Band. 1. Heft. 1927.

Die Stabilität elektrischer Systeme.

Von

A. Silbertal, Leningrad.

Wir haben es öfters in der Elektrotechnik mit Systemen zu tun, die rechnungsgemäß einen gewissen Gleichgewichtszustand darstellen, der sich aber bei näherer Untersuchung als labil herausstellt. Die Labilität des Systems wird dadurch gekennzeichnet, daß wenn eines oder mehrere der errechneten Elemente des Systems eine gewisse Abweichung vom Gleichgewichtswert erleiden, die durch diese Abweichung hervorgerufenen Reaktionen das System nicht in die Ruhelage zurückführen, vielmehr die vorgegebenen Abweichungen noch erhöhen. So bilden 2 Hauptstromgeneratoren in Parallelschaltung ein labiles System. Bogenlampen und Elektronenröhren sind an bestimmten Teilen ihrer Charakteristik ebenso labil.

Die Untersuchung eines Systems auf Stabilität oder Labilität ist in den einfachsten Fällen (eine geschlossene Kette bzw. 2 parallele Zweige) unschwer. Kommen wir aber zu komplizierteren Systemen mit mehreren unabhängigen Variablen (z. B. mehrere Hauptstromgeneratoren in Parallelschaltung), so wird die Analyse der Frage auf einfache Weise recht mühsam. Wir müssen sämtliche möglichen Kombinationen der Abweichungen der einzelnen Veränderlichen untersuchen (z. B. der Stromstärken in den einzelnen Generatorzweigen), und für jede mögliche Kombination müssen die durch diese Abweichung hervorgerufenen Reaktionen errechnet werden. Der Weg ist recht langwierig und kann auch leicht zu irrtümlichen Folgeschlüssen führen.

In der Mechanik haben wir es ebenfalls mit labilen und stabilen Gleichgewichtslagen zu tun. Die Untersuchung eines mechanischen Systems auf Stabilität geschieht ebenfalls durch Annahme gewisser Verschiebungen der einzelnen Elemente, wobei nun im Falle der Stabilität durch die entstandenen Reaktionen das System selbsttätig in die Gleichgewichtslage zurückkehrt. Die Durchrechnung eines komplizierten Falles wird auch bei mechanischen Problemen recht langwierig. In der Mechanik gibt es aber gewisse Prinzipien, die die Lösung des Problems in der allgemeinsten Form einfach darstellen.

Sei ein Körpersystem mit n Parametern gegeben, die miteinander durch m verschiedene Bedingungen verbunden sind. Es mag dies z. B. ein System von Punkten sein, deren Koordinaten $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ sind und die miteinander durch Fäden, Stangen, Federn verbunden sind, bzw. entlang bestimmter Flächen oder Linien gleiten. Das System unterliege der Wirkung der Kräfte $X_1, X_2 \ldots X_n$. Als verallgemeinerte Gleichgewichtsbedingung gilt bekanntlich der Satz der virtuellen Verschiebungen. Wir denken uns sämtliche Parameter $x_1, x_2 \ldots x_n$ je um $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ verschoben. Diese virtuellen Verschiebungen unterliegen denselben m Bedingungsgleichungen, wie die Parameter $x_1, x_2 \ldots x_n$ selber. Als Gleichgewichtsbedingung gilt nun, daß die virtuelle Arbeit

$$\delta A = X_1 \cdot \delta x_1 + X_2 \cdot \delta x_2 + \ldots X_n \cdot \delta x_n = 0$$

werde.

Bilden wir nun regelrecht das zweite Differential $\delta^2 A$, so gilt als Bedingung der Stabilität, daß $\delta^2 A$ für beliebige Kombination der virtuellen Verschiebungen $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ immer negativ bleibt. Sind nämlich δx_1,



$\delta x_2 \ldots \delta x_n$ unendlich kleine Verschiebungen, so ist $\delta A = 0$. Für eine Reihe endlicher Verschiebungen $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ ist bekanntlich

$$\Delta A = \int_0^{\Delta x_1} X_1 \cdot d\Delta x_1 + \int_0^{\Delta x_2} X_2 \cdot d\Delta x_2 + \ldots = \delta A + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 A + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^3 A + \ldots$$

Da im Gleichgewichtspunkt $\delta A = 0$, so wird in zweiter Annäherung $\Delta A = \frac{1}{2} \delta^2 A$. Ist nun $\delta^2 A$ immer negativ, so ist eine beliebige Verschiebung des Systems aus der Ruhelage mit einer negativen Arbeit der äußeren Kräfte verbunden, die kinetische Energie des Systems nimmt mit wachsender Abweichung ab, das System kehrt in die Ruhelage zurück. Ist dagegen $\delta^2 A$ auch nur für irgendeine mögliche Kombination der $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ positiv, so ist das System labil.

Wir dürfen nun auch für elektrische Systeme einen ähnlichen Satz aufstellen. Das System bestehe aus n einzelnen Elementen (Zweigen), in denen die Stromstärken $i_1, i_2 \ldots i_n$, die elektromotorischen Kräfte $E_1, E_2 \ldots E_n$, die Widerstände $r_1, r_2 \ldots r_n$. Die Stromstärken $i_1, i_2 \ldots i_n$ entsprechen den mechanischen Parametern $x_1, x_2 \ldots x_n$. Die Kräfte $X_1, X_2 \ldots X_n$ werden hier durch die Ausdrücke $E_1 - i_1 r_1, \ldots E_n - i_n r_n$ ersetzt, welche je den Spannungsunterschied an den Enden eines Elementes darstellen. Das System besitze eine Reihe von Knoten, von denen jeder eine Gleichung von der Form

$i_k + i_l + i_h + \ldots = 0$ liefert (1. Kirchhofscher Satz).

Bei Addition dieser Gleichungen erhalten wir immer identisch 0, da jede der Stromstärken in 2 Knoten mit entgegengesetztem Vorzeichen auftritt. Haben wir also $(m + 1)$ Knoten, so erhalten wir hieraus m Bedingungen, die den m Bedingungen der Mechanik entsprechen. Von den Stromgrößen sind also nur $(n - m)$ unabhängig, nämlich $i_1, i_2 \ldots i_{n-m}$, die übrigen m Stromgrößen lassen sich als Funktionen der ersteren in folgender Form darstellen:

$$i_p = i_h + i_k + i_l + \ldots \quad (p > m - n, \; h, \; l, \; k < m - n).$$

Jede der unabhängigen Stromgrößen $(i_1, i_2 \ldots i_h, i_k, i_l \ldots)$ tritt in 2 oder mehreren solcher Gleichungen auf, und zwar müssen im Netze, wie leicht nachzuweisen, diejenigen Elemente, die beispielsweise von i_h abhängigen (z. B. $i_p, i_q, i_r \ldots$) zusammen mit i_h eine geschlossene einfache Kette bilden.

Wir denken uns nun das System aus dem Gleichgewicht durch eine Reihe virtueller Abweichungen $\delta i_1, \delta i_2 \ldots \delta i_n$ herausgebracht. Von diesen Abweichungen sind ebenfalls nur $(n - m)$ unabhängig, die übrigen m lassen sich als Funktionen der ersten darstellen

$$\delta i_p = \delta i_h + \delta i_k + \delta i_l + \ldots$$

Genau so, wie in der Mechanik, muß nun für Gleichgewicht

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1) \delta i_1 + (E_2 - i_2 r_2) \delta i_2 + \ldots + (E_n - i_n r_n) \delta i_n = 0$$

werden.

Ersetzen wir nämlich in obigem Ausdruck sämtliche abhängigen $\delta i_p, \delta i_q, \delta i_r \ldots$ durch ihre Ausdrücke als Funktionen der unabhängigen $\delta i_1, \delta i_2 \ldots \delta i_h, \delta i_k, \delta i_l$, wobei als Funktionen von δi_h die Werte $\delta i_p, \delta i_q, \delta i_r \ldots$ auftreten mögen, so erhält δA die Form

$$\delta A = h \sum_{1}^{n-m} (E_h - i_h \cdot r_h + E_p - i_p \cdot r_p + E_q - i_q \cdot r_q + E_r - i_r \cdot r_r + \ldots) \cdot \delta i_h.$$

Da die einzelnen δi_h voneinander unabhängig sind, so muß, damit $\delta A = 0$ werde, jedes der Klammerglieder für sich gleich Null werden. Die Glieder h, p, q, r... bilden, wie gesagt, eine einfache geschlossene Kette, wir erhalten also in den Klammern je einen Ausdruck, der dem 2. Kirchhofschen Satze gemäß gleich

Null wird. Der Satz der virtuellen Abweichungen $\delta A = 0$ bedeutet also, im Zusammenhange mit dem 1. Kirchhofschen Satze, einen verallgemeinerten Ausdruck des zweiten Kirchhofschen Satzes.

Als Beispiel möge das beigelegte Netz (Bild 1) gelten. Die 5 Knotenpunktsgleichungen liefern:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_6 - i_7 &= 0, \\ i_7 + i_3 + i_4 - i_8 &= 0, \\ - i_2 - i_3 - i_{10} + i_9 &= 0, \\ - i_4 - i_5 - i_6 + i_{10} &= 0, \\ i_5 + i_8 - i_1 - i_9 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addition folgt identisch 0, es bleiben also 4 unabhängige Gleichungen. Wir dürfen somit i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 als unabhängige Stromstärken, i_7, i_8, i_9, i_{10} als abhängige annehmen. Es folgt:

$$\begin{aligned} i_7 &= i_1 + i_2 + i_6, \\ i_{10} &= i_4 + i_5 + i_6, \\ i_8 &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_6. \\ i_9 &= i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6. \end{aligned}$$

Bild 1.

Es tritt also i_1 in i_7 und i_8 auf, die Elemente $1 - 7 - 8$ bilden im Netze ein Dreieck; i_2 tritt in i_7, i_8, i_9 auf, $2 - 7 - 8 - 9$ bilden ein geschlossenes Viereck usw.

Bilden wir nun

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1)\,\delta i_1 + (E_2 - i_2 \cdot r_2)\,\delta i_2 + \ldots (E_{10} - i_{10} \cdot r_{10})\,\delta i_{10}$$

und setzen wir

$$\delta i_7 = \delta i_1 + \delta i_2 + \delta i_6 \text{ usw.,}$$

so folgt

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1 + E_7 - i_7 r_7 + E_8 - i_8 r_8)\,\delta i_1 + \\ + (E_2 - i_2 r_2 + E_7 - i_7 \cdot r_7 + E_8 - i_8 \cdot r_8 + E_9 - i_9 \cdot r_9)\,\delta i_2 + \ldots = 0,$$

woraus

$$E_1 - i_1 r_1 + E_7 - i_7 \cdot r_7 + E_8 - i_8 \cdot r_8 = 0,$$
$$E_2 - i_2 r_2 + E_7 - i_7 \cdot r_7 + E_8 - i_8 \cdot r_8 + E_9 - i_9 \cdot r_9 = 0 \text{ usw.,}$$

was dem zweiten Kirchhofschen Satze entspricht.

Um nun diesen Gleichgewichtszustand auf Stabilität zu untersuchen, bilden wir regelrecht das zweite Differential $\delta^2 A$ und dürfen den Satz aussprechen:

Stabilität findet dann und nur dann statt, wenn $\delta^2 A$ für jede mögliche Kombination der virtuellen Abweichungen negativ bleibt.

Um dies nachzuweisen, untersuchen wir in allgemeiner Form den Vorgang der entsteht, nachdem das System aus der Gleichgewichtslage herausgebracht wird. Wegen der Selbstinduktion L_1, $L_2 \ldots L_n$ der einzelnen Elemente wird das System nicht sofort, sondern allmählich entweder in die Ruhelage zurückkehren oder in eine andere Gleichgewichtslage umkippen. Der Satz $\delta A = 0$ wird für diesen Vorgang ebenfalls gültig, wenn für jedes Element die EMK der Selbstinduktion

$$- L_1 \cdot \frac{d i_1}{d t}, \quad - L_2 \cdot \frac{d i_2}{d t} \text{ usw.}$$

in die Gleichung mitgenommen wird. Wir erhalten somit:

$$\delta A' = \left(E_1 - i_1 r_1 - L_1 \cdot \frac{d i_1}{d t}\right) \cdot \delta i_1 + \left(E_2 - i_2 r_2 - L_2 \cdot \frac{d i_2}{d t}\right) \cdot \delta i_2 + \ldots = 0,$$

woraus

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1)\,\delta i_1 + (E_2 - i_2 r_2)\,\delta i_2 + \ldots = L_1 \cdot \frac{d i_1}{d t} \cdot \delta i_1 + L_2 \cdot \frac{d i_2}{d t} \cdot \delta i_2 + \ldots$$

[Ganz ähnlich haben wir in der Mechanik für den Fall der Bewegung

$$\delta A' = \left(X_1 - m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{d t^2}\right) \delta x_1 + \ldots = 0.]$$

Ersetzen wir in obiger Formel sämtliche abhängige Stromgrößen i_p, i_q, $i_r \ldots$ durch die unabhängigen i_1, $i_2, \ldots i_h$, i_k, $i_l, \ldots$, so folgt die Form:

$$\sum_1^{m-n} (E_h - i_h \cdot r_h + E_p - i_p \cdot r_p + \ldots) \delta i_h = \sum_1^{m-n} \left(L_h \cdot \frac{d i_h}{d t} + L_p \cdot \frac{d i_p}{d t} + \ldots\right) \delta i_h.$$

Wir denken uns nun zuerst folgende Kombination der Abweichungen: $\Delta i_h \neq 0$, $\Delta i_1 = \Delta i_2 \ldots$, $\Delta i_{m-n} = 0$. Von den abhängigen Elementen wird nur in denjenigen eine Abweichung eintreten, die gerade von i_h abhängen (i_p, i_q, $i_r \ldots$), also $\Delta i_p = \Delta i_q = \ldots \Delta i_h$, alle übrigen abhängigen Elemente erhalten keine Abweichung. In diesem Falle ist auch $\frac{d i_p}{d t} = \frac{d i_q}{d t} = \frac{d i_h}{d t}$, somit:

$$\Delta A = \int_0^{\Delta i_h} (E_h - i_h \cdot r_h + E_p - i_p \cdot r_p + \ldots) \, d \Delta i_h = (L_h + L_p + L_q + \ldots) \cdot \frac{d i_h}{d t} \cdot \Delta i_h.$$

Ist nun ΔA negativ, also auch $\delta^2 A$ negativ, so wird $\frac{d i_h}{d t} \cdot \Delta i_h$ negativ, $\frac{d i_h}{d t}$ erhält ein entgegengesetztes Vorzeichen wie Δi_h, die Abweichung nimmt allmählich ab, der Zustand ist stabil. Für den Fall $\delta^2 A > 0$ dagegen haben wir Labilität.

Haben wir nun eine Kombination der Abweichungen sämtlicher Elemente, und ist für jede einzelne Abweichung ΔA negativ, so ist ΔA auch negativ für die Summe der Abweichungen. In diesem Falle haben wir Stabilität, da jede einzelne Abweichung für sich abklingt. Im Gegenteil ist $\delta^2 A$, also auch ΔA für eine beliebige Kombination der Abweichungen negativ, so muß ΔA auch für jede einzelne Abweichung negativ sein, das System ist stabil. Die Bedingung $\boldsymbol{\delta^2 A < 0}$ stellt somit ein notwendiges und hinreichendes Kriterium der Stabilität dar.

Wir wollen nun zuerst an einer Reihe bekannter Beispiele die Gültigkeit des Satzes nachprüfen, um dann an einigen komplizierteren Beispielen die einfache Lösung mit Hilfe des obigen Satzes zu demonstrieren.

Beispiel 1.

Ein beliebiges Netz mit konstanten Spannungen und Widerständen.

Es gilt:

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1) \delta i_1 + (E_2 - i_2 r_2) \delta i_2 + \ldots + (E_n - i_n \cdot r_n) \delta i_n = 0;$$
$$\delta^2 A = - r_1 \cdot (\delta i_1)^2 - r_2 \cdot (\delta i_2)^2 + \ldots - r_n (\delta i_n)^2.$$

$\delta^2 A$ ist immer negativ, das System ist immer stabil.

Beispiel 2.

Eine einfache, geschlossene Kette, in der sowohl die EMK, als auch der Widerstand Funktionen der Stromstärke sind.

Es gilt:

$$\delta A = (E - i r) \delta i = 0,$$
$$\delta^2 A = \left[\frac{d E}{d i} - \frac{d (i r)}{d i}\right] \cdot (d i)^2.$$

Stabilität findet statt, wenn

$$\frac{d E}{d i} - \frac{d (i r)}{d i} < 0.$$

Für den Fall eines Hauptstromgenerators ($r =$ konst, $E = f(i)$ nach Bild 2) folgt für Gleichgewicht $E = i \cdot r$, $\frac{dE}{di} - r < 0$, wie aus dem Bilde zu ersehen, somit ist der Zustand stabil.

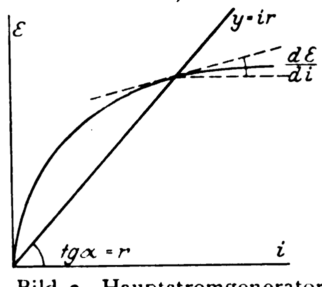


Bild 2. Hauptstromgenerator.

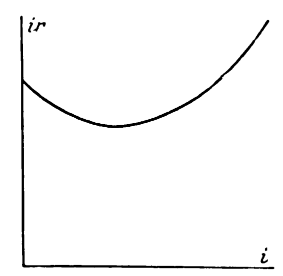


Bild 3. Charakteristik einer Bogenlampe.

Für den Fall einer Bogenlampe, die an eine konstante Spannung angelegt ist, muß $\frac{d(ir)}{di} > 0$ sein. Die Bogenlampe arbeitet also auf dem ansteigenden Aste ihrer Charakteristik stabil (Bild 3), auf dem fallenden — labil.

Es kann eine Bogenlampe auch auf dem fallenden Aste stabil arbeiten, wenn mit ihr hintereinander ein Widerstand W geschaltet ist, derart, daß das $W > \frac{d(ir)}{di}$ ist; oder wenn die Lampe an einen speziell gewickelten Generator angeschlossen wird, dessen Charakteristik schneller fällt als die der Bogenlampe; oder wenn mit der gegebenen Bogenlampe eine zweite hintereinander geschaltet wird, die für dieselbe Stromstärke schon auf dem ansteigenden Aste arbeitet, und zwar schneller ansteigt als die erstere abfällt (Bild 4).

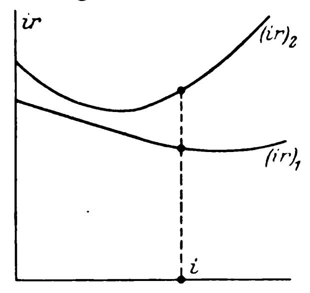


Bild 4. Hintereinanderschaltung zweier Bogenlampen verschiedener Charakteristik.

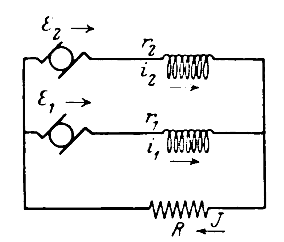


Bild 5. Zwei Hauptstromgeneratoren in Parallelschaltung.

Beispiel 3.

Zwei Hauptstromgeneratoren, die parallel auf einen Widerstand arbeiten.

Der erste Kirchhofsche Satz lautet hier (Bild 5):

$$i_1 + i_2 = J.$$

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1)\,\delta i_1 + (E_2 - i_2 r_2)\,\delta i_2 - JR \cdot \delta J = 0;$$

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1 - JR)\,\delta i_1 + (E_2 - i_2 r_2 - JR)\,\delta i_2 = 0,$$

somit

$$E_1 - i_1 r_1 - JR = 0,$$

$$E_2 - i_2 r_2 - JR = 0.$$

Bei völlig gleichartigen Maschinen ist $r_1 = r_2 = r$; außerdem dürfen wir auch die Charakteristiken gleichartig annehmen, also

$$E_1 = f(i_1),$$

$$E_2 = f(i_2).$$

Für Gleichgewicht haben wir 2 Lösungen:

1. $i_1 = i_2 = i$, $E_1 = E_2 = E$, $J = 2\,i$, somit $E = i\,(r + 2\,R)$ (Punkt 1 in Bild 6),
2. $i_1 = -i_2$, $E_1 = -E_2$, $J = 0$, $E_1 = i_1 \cdot r$, $E_2 = i_2\,r$ (Punkt 2 auf Bild 6).

Die Lösung (1) bedeutet regelrechte Parallelarbeit, die Lösung (2) bedeutet, daß der eine der Generatoren ummagnetisiert ist und nun beide hintereinander auf sich selbst kurzgeschlossen sind.

Zur Untersuchung des Systems auf Stabilität bilden wir:

$$\delta^2 A = \left(\frac{\partial E_1}{\partial i_1} - r_1\right)(\delta i_1)^2 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial i_2} - r_2\right)(\delta i_2)^2 - R \cdot (\delta J)^2.$$

Setzen wir $\delta J = \delta i_1 + \delta i_2$, so folgt:

$$\delta^2 A = \left(\frac{\partial E_1}{\partial i_1} - r_1 - R\right)(\delta i_1)^2 + \left(\frac{\partial E_2}{\partial i_2} - r_2 - R\right) \cdot (\delta i_2)^2 - 2\,R \cdot \delta i_1 \cdot \delta i_2.$$

Dies ist eine quadratische Form der Variablen δi_1 und δi_2. Die Theorie solcher Formen $F = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + 2\,\gamma \cdot x \cdot y$, zeigt nun, daß F nur dann immer negativ bleibt, wenn: 1., α und β beide negativ, 2. $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$. In unserem Falle, wie aus dem Diagramme leicht zu erkennen, sind α und β negativ, da $\frac{\partial E}{\partial i} < r + R$.

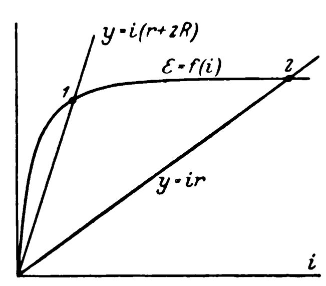


Bild 6. Gleichgewichtspunkte für zwei Hauptstromgeneratoren in Parallelschaltung.

Der Ausdruck $\alpha\beta - \gamma^2$ wird hier zu

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial i_1} - r_1 - R\right)\left(\frac{\partial E_2}{\partial i_2} - r_2 - R\right) - R^2.$$

Ziehen wir in Betracht, daß

$$r_1 = r_2 = r,\quad \frac{\partial E_1}{\partial i_1} = \frac{\partial E_2}{\partial i_2} = \frac{\partial E}{\partial i},$$

so folgt

$$\alpha\beta - \gamma^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial i} - r - R\right)^2 - R^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial E}{\partial i} - r - 2\,R\right)\left(\frac{\partial E}{\partial i} - r\right).$$

Für den Punkt 1 ist $r < \frac{\partial E}{\partial i} < r + 2\,R$, somit $\alpha\beta - \gamma^2 < 0$, dagegen für Punkt 2: $\frac{\partial E}{\partial i} < r$, $\frac{\partial E}{\partial i} < r + 2\,R$, $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$. Wir haben also Stabilität nur im Punkte 2 — Kurzschluß —, ein regelrechtes Parallelarbeiten ist unmöglich.

Dieses Resultat ist aus Theorie und Praxis schon bekannt. Damit zwei Hauptstromgeneratoren ruhig parallel arbeiten können, schließen wir dieselben in Kreuzschaltung an.

Beispiel 4.

Kreuzschaltung zweier Hauptstromgeneratoren, die auf einen Widerstand parallel arbeiten (Bild 7).

In diesem Falle ist $E_1 = f\,(i_2)$, $E_2 = f\,(i_1)$, somit

$$\delta^2 A = -r_1\,(\delta i_1)^2 - r_2 \cdot (\delta i_2)^2 - R \cdot (\delta J)^2 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial i_2} + \frac{\partial E_2}{\partial i_2}\right)\delta i_1 \cdot \delta i_2;$$

oder

$$\delta^2 A = -(R + r) \cdot (\delta i_1)^2 - (R + r) \cdot (\delta i_2)^2 + 2\left(\frac{\partial E}{\partial i} - R\right) \cdot \delta i_1 \cdot \delta i_2.$$

Hier ist

$$\alpha < 0, \ \beta < 0,$$

$$\alpha\beta - \gamma^2 = (R + r)^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial i} - R\right)^2 = \left(r + \frac{\partial E}{\partial i}\right)\left(2R + r - \frac{\partial E}{\partial i}\right) > 0,$$

der Zustand ruhiger Parallelarbeit ist also stabil. Dieses Schema wird bekanntlich an Straßenbahnen mehrfach angewandt, und zwar als Bremsschaltung durch Ankerkurzschluß.

Wenden wir umgekehrt die Kreuzschaltung an zwei Hauptstrommotoren an, so erhalten wir ein labiles System.

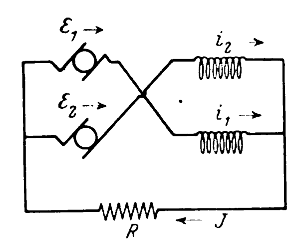


Bild 7. Zwei Hauptstromgeneratoren in Kreuzschaltung.

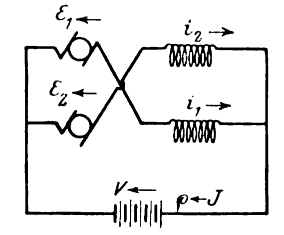


Bild 8. Zwei Hauptstrommotoren in Kreuzschaltung.

Beispiel 5.

Zwei Hauptstrommotoren in Kreuzschaltung (Bild 8).

Für Gleichgewicht erhalten wir hier:

$$\delta A = (V - \varrho \cdot J)\,\delta J + (-E_1 - i_1 r_1)\cdot \delta i_1 + (-E_2 - i_2 \cdot r_2)\cdot \delta i_2 = 0.$$

Das zweite Differential wird

$$\delta^2 A = -\varrho \cdot (\delta J)^2 - r_1 (\delta i_1)^2 - r_2 \cdot (\delta i_2)^2 - \left(\frac{\partial E_1}{\partial i_2} + \frac{\partial E_2}{\partial i_1}\right)\cdot \delta i_1\, \delta i_2.$$

Bei gleichartigen Maschinen wird $r_1 = r_2$, $\frac{\partial E_1}{\partial i_2} = \frac{\partial E_2}{\partial i_1}$; vernachlässigen wir den Widerstand ϱ, so wird

$$\delta^2 A = -r\,.\,(\delta i_1)^2 - r \cdot (\delta i_2)^2 - 2 \cdot \frac{\partial E}{\partial i} \cdot \delta i_1 \cdot \delta i_2.$$

Es wird $\alpha\beta - \gamma^2 = r^2 - \left(\frac{\partial E}{\partial i}\right)^2 < 0$, somit ist der Zustand labil.

Wir wollen nun unsere Methode zur Analyse einiger komplizierterer Fälle anwenden, deren Analyse mit einfachen Mitteln besonders zeitraubend wäre.

Beispiel 6.

Mehrere Hauptstromgeneratoren in sog. zyklischer Schaltung, die auf einen Widerstand parallel arbeiten (Bild 9).

Hier ist

$$E_1 = f_1(i_n),$$
$$E_2 = f_2(i_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$E_n = f_n(i_{n-1}).$$

Für Gleichgewicht muß

$$\delta A = (E_1 - i_1 r_1)\,\delta i_1 + \ldots (E_n - i_n r_n)\,\delta i_n - J R \cdot \delta J = 0$$

sein. Sind sämtliche Maschinen völlig gleichartig, also

$$f_1 = f_2 \ldots = f, \ r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r,$$

so findet Gleichgewicht statt, wenn

$$E_1 = E_2 \ldots = E_n = E,\ i_1 = i_2 = \ldots = i_n = i$$

und

$$E = i\,(r + n\,R).$$

Das liefert den Punkt 1 auf der Generatorcharakteristik (Bild 10). Wir bilden:

$$\delta^2 A = -r_1 \cdot (\delta i_1)^2 - r_2 \cdot (\delta i_2)^2 \ldots - r_n \cdot (\delta i_n)^2 - R \cdot (\delta J)^2 + \frac{\partial E_1}{\partial i_n} \cdot \delta i_1 \cdot \delta i_n +$$

$$+ \ldots \frac{\partial E_n}{\partial i_{n-1}} \cdot \delta i_n \cdot \delta i_{n-1}.$$

Zur Untersuchung dieser quadratischen Form mehrerer Variablen zerlegen wir jede Abweichung $\delta i_1 \ldots \delta i_n$ in zwei Teile:

$$\delta i_1 = \frac{\delta J}{n} + \delta j_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta i_n = \frac{\delta J}{n} + \delta j_n.$$

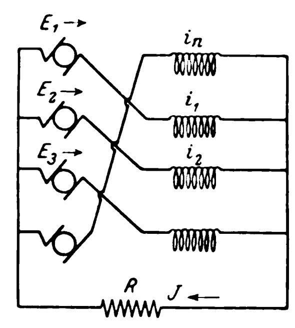


Bild 9. Mehrere Hauptstromgeneratoren in zyklischer Schaltung.

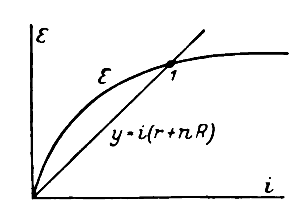


Bild 10. Gleichgewichtspunkt für mehrere Generatoren in zyklischer Schaltung.

Da $\delta i_1 + \delta i_2 \ldots \delta j_n = \delta J$, so wird $d j_1 + \delta j_2 + \ldots \delta j_n = 0$. Somit folgt, indem wir noch $r_1 = r_2 \ldots = r_n = r$ und $\frac{\partial E_1}{\partial i_n} = \frac{\partial E_2}{\partial i_1} = \ldots = \frac{\partial E}{\partial i}$ heranziehen.

$$\delta^2 A = -r\left[(\delta i_1)^2 + (\delta i_2)^2 + \ldots + (\delta i_n)^2\right] + \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial E}{\partial i} - R\right) \cdot (\delta J)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial E}{\partial i}(\delta j_1 + \delta j_2 + \ldots + \delta j_n) + \frac{\partial E}{\partial i}(\delta j_1 \cdot \delta j_2 + \delta j_2 \cdot \delta j_3 + \ldots + \delta j_n \cdot \delta j_1).$$

Das Glied $-r\left[(\delta i_1)^2 + \ldots + (\delta i_n)^2\right]$ ist immer negativ, ebenso ist es $\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial E}{\partial i} - R\right)(\delta J)^2$, da $\frac{\partial E}{\partial i} < n\,R$; die Summe $\delta j_1 + \ldots + \delta j_n$ ist $= 0$. Fraglich ist nun nur der Ausdruck $\delta j_1 \cdot \delta j_2 + \delta j_2 \cdot \delta j_3 + \ldots$ Wir bekommen nun je nach der Maschinenanzahl verschiedene Resultate:

1. $n = 2$, $\delta j_1 + \delta j_2 = 0$, $\delta j_1 \cdot \delta j_2 < 0$,
2. $n = 3$, $\delta j_1 + \delta j_2 + \delta j_3 = 0$, $\delta j_1 \cdot \delta j_2 + \delta j_2 \cdot \delta j_3 + \delta j_3 \cdot \delta j_1 =$

$$= \frac{1}{2}\left[(\delta j_1 + \delta j_2 + \delta j_3)^2 - (\delta j_1)^2 - (\delta j_2)^2 - (\delta j_3)^2\right] < 0,$$

3. $n = 4$, $\delta j_1 + \delta j_2 + \delta j_3 + \delta j_4 = 0$, $(\delta j_1 + \delta j_3) = -(\delta j_2 + \delta j_4)$

$$\delta j_1 \cdot \delta j_2 + \delta j_2 \cdot \delta j_3 + \delta j_3 \cdot \delta j_4 + d j_4 \cdot \delta j_1 = (\delta j_1 + \delta j_3)(\delta j_2 + \delta j_4) < 0.$$

Bis zu 4 Generatoren ist immer $\delta^2 A < 0$, der Zustand ist stabil. Für 5 und mehr Generatoren kann immer eine solche Kombination der Abweichungen gefunden werden, für die der Ausdruck $\delta j_1 \cdot \delta j_2 + \delta j_2 \cdot \delta j_3 + \ldots$ positiv wird. So z. B. sei

$$\delta j_1 = 1,\ \delta j_2 = 1,\ \delta j_3 = 0,\ \delta j_4 = -1,\ \delta j_5 = -1.$$

In diesem Falle ist einer der Bestandteile von $\delta^2 A$ positiv und können die Werte so gewählt werden, daß $\delta^2 A$ positiv wird. Für 5 und mehr Generatoren ist somit der Zustand labil.

Dieses Resultat wird für die Praxis, speziell den elektrischen Bahningenieur unerwartet sein. Um das Resultat nachzuprüfen, wurde die Frage in gewöhnlicher Weise untersucht. Das System werde aus dem Gleichgewichtszustande durch eine Reihe von Abweichungen der Einzelstromstärken herausgebracht. Wir ziehen nun die veränderten EMK und die Selbstinduktion der einzelnen Maschinen heran und erhalten bei genauer mathematischer Behandlung für die einzelnen Stromzweige ein System von n simultanen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Berechnung will ich hier des Raummangels wegen unterlassen, das Resultat ist vielmehr mit obigem völlig übereinstimmend: für 2, 3 und 4 Generatoren erhalten wir einen abklingenden Vorgang, für 5 und mehr Generatoren kann eine Pendelung mit immer steigender Amplitude entstehen, wodurch das System in eine neue Ruhelage umkippt. Merkwürdigerweise ist diese Ruhelage überhaupt kein Gleichstrom, sondern ein mehrphasiger Wechselstrom mit hoher Stromstärke (Kurzschluß), dessen Periode durch die Form der Magnetisierungskurve und durch die Selbstinduktion der Maschinen bestimmt wird.

Beispiel 7.

Vier Hauptstromgeneratoren, je zwei in Kreuzschaltung (Bild 11).

Hier ist

$$E_1 = f(i_2), \qquad E_2 = f(i_1)$$
$$E_3 = f(i_4), \qquad E_4 = f(i_3).$$

$$\delta^2 A = -r_1 \cdot (\delta i_1)^2 \ldots - r_4 \cdot (\delta i_4)^2 - R \cdot (\delta J)^2 + \left(\frac{\delta E_1}{\delta i_2} + \frac{\delta E_2}{\delta i_1}\right) \delta i_1 \cdot \delta i_2 + \\ + \left(\frac{\partial E_3}{\partial i_4} + \frac{\partial E_4}{\partial i_4}\right) \delta i_3 \cdot \delta i_4.$$

Setzen wir beispielsweise $\delta i_1 = \delta i_2 = +\delta$, $\delta i_3 = \delta i_4 = -\delta$, so wird $\delta^2 A > 0$, das System ist labil.

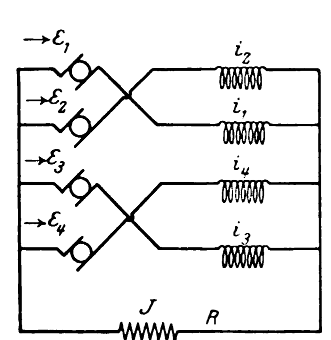


Bild 11. Vier Hauptstromgeneratoren, je zwei in Kreuzschaltung.

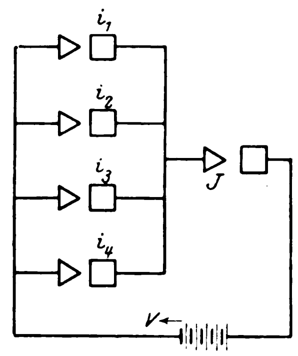


Bild 12. Spezielle Schaltung von Bogenlampen.

Beispiel 8.

Eine Gruppe von n parallelgeschalteten gleichartigen Bogenlampen in Hintereinanderschaltung mit einer einzigen gleichartigen Bogenlampe (Bild 12.)

Es kann hier bei entsprechender Wahl der Spannung ein Gleichgewichtszustand eintreten, für den die n-Lampen auf dem fallenden Aste, die eine Lampe auf dem



steigenden Aste ihrer Charakteristik arbeiten (Punkte 1 und 2 auf Bild 13). Ist hierbei die Charakteristik im Punkte 2 schneller ansteigend, als sie in 1 abfällt, also $\left[\frac{d(i\,r)}{d\,i}\right]_1 < \left[\frac{d(i\,r)}{d\,i}\right]_2$, so könnten wir annehmen, daß der Zustand stabil ist, genau so wie es der Fall für zwei Lampen verschiedener Charakteristik war. Wenden wir nun das zweite Differential an, so folgt:

$$\delta A = -i_1 r_1 \cdot \delta i_1 - i_2 r_2 \cdot \delta i_2 \ldots - i_n \cdot r_n \cdot \delta i_n + V - J R \cdot \delta J = 0;$$

$$\delta^2 A = -\frac{\partial (i_1 r_1)}{\partial i_1} (\delta i_1)^2 \ldots - \frac{\partial (i_n \cdot r_n)}{\partial i_n} \cdot (\delta i_n)^2 - \frac{\partial (J R)}{\partial J} \cdot (\delta J)^2.$$

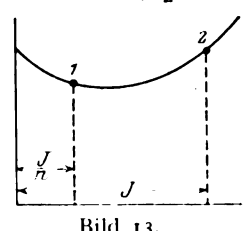


Bild 13.

Nehmen wir eine beliebige Kombination der $\delta i_1, \delta i_2 \ldots \delta i_n$ an, für die $\delta J = 0$, so wird, wegen der fallenden Charakteristik im Punkte 1, $\delta^2 A$ positiv, das System ist labil. Die Lampen erlöschen nacheinander, bis nur eine Lampe von den parallelgeschalteten ruhig mit Lampe J auf dem steigenden Aste ihrer Charakteristik arbeiten.

Drehstromleistungsmessung in Aronschaltung mit Meßwandlern.

Von

G. Hauffe, Dresden.

1. Einleitung.

Wird die Leistung eines Einphasenwechselstromes unter Zuhilfenahme von Strom- und Spannungswandler gemessen, so ist mit Rücksicht auf den Übersetzungsfehler und den Winkelfehler eine Korrektur anzubringen, die im ersten Teil der Arbeit der Vollständigkeit wegen in Kürze entwickelt werden soll. Zweck der Untersuchung ist, für die Leistungsmessung des Drehstromes in Aronschaltung eine ähnliche Korrekturformel zu entwickeln. Dies soll unter folgenden

2. Voraussetzungen.

geschehen.

a) Die Belastung des Drehstromsystems ist eine symmetrische.
b) Die verwendeten Wandler werden unter sich als gleich angenommen, d. h. die Stromfehler der beiden Stromwandler und die Fehlwinkel seien einander gleich und ebenso Spannungsfehler und Fehlwinkel der beiden Spannungswandler unter sich.

Den Untersuchungen liegen folgende

3. Bezeichnungen.

zugrunde.

a) Die wahren Leistungen werden durch den Index w gekennzeichnet.
b) Gemessene Leistungen erhalten den Index g.



c) Ohne Rücksicht auf die Wandlerfehler errechnete Leistungen erhalten den Index r.
d) Hatwerte der Übersetzungsverhältnisse werden durch Index h gekennzeichnet.
e) Sollwerte der Übersetzungsverhältnisse erhalten den Index s.
f) Die (sekundären) Größen des Niederspannungskreises werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet.
g) Die (primären) Größen des Hochspannungskreises erhalten große Buchstaben.
h) Auf Spannungs- bzw. Stromwandler bezügliche Größen erhalten die Indices p bzw. i.

4. Die Korrektur für Einphasenleistung.

Gemäß Bild 1 ist:

$$N_w = P \cdot I \cdot \cos \varphi_1$$

die wahre Leistung,

$$n_g = p \cdot i \cdot \cos \varphi_2$$

die gemessene Leistung. Hierin ist

$$P = ü_{pH} \cdot p,$$
$$I = ü_{iH} \cdot i$$

und

$$\cos \varphi_1 = \cos (\varphi_2 - \delta_p + \delta_i),$$
$$= \cos [\varphi_2 - (\delta_p - \delta_i)],$$
$$= \cos \varphi_2 \cos (\delta_p - \delta_i) + \sin \varphi_2 \sin (\delta_p - \delta_i).$$

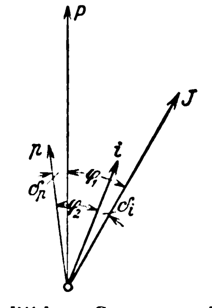


Bild 1. Strom- und Spannungsverhältnisse bei Leistungsmessung mit Wandlern.

Mit

$$\cos (\delta_p - \delta_i) \cong 1 ; \ \sin (\delta_p - \delta_i) \cong (\delta_p - \delta_i)$$

im Bogenmaß,

$$= 0{,}000291 \, (\delta_p - \delta_i)'$$

in Minuten wird

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 [1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot 0{,}000291 \, (\delta_p - \delta_i)']$$

und endlich

$$N_w = p \, i \cos \varphi_2 \, ü_{pH} \cdot ü_{iH} [1 + 0{,}000291 \, (\delta_p - \delta_i)' \operatorname{tg} \varphi_2].$$

Entsprechend den in den Normalien festgelegten Definitionen sind Hatwert und Sollwert durch folgende Gleichung miteinander verknüpft

$$ü_H = ü_s \left(1 - \frac{f_ü}{100}\right).$$

Daher ergibt sich

$$N_w \cong n_g \cdot ü_{ps} \cdot ü_{is} \left(1 - \frac{f_p + f_i}{100}\right) [1 + 0{,}000291 \, (\delta_p - \delta_i)' \operatorname{tg} \varphi_2].$$

Ohne Berücksichtigung der Wandlerfehler erhält man die rechnerische Leistung

$$N_r = n_g \, ü_{ps} \cdot ü_{is},$$

die mit der wahren Leistung in dem Zusammenhang steht

$$N_w = N_r \left(1 - \frac{f_N}{100}\right),$$

wobei f_N der durch die Vernachlässigung der Wandlerfehler eingehende Fehler der Leistungsmessung in Prozent ist. Durch die Gleichsetzung beider Ausdrücke für N_w folgt

$$f_N = f_p + f_i - 0{,}0291 \, (\delta_p - \delta_i)' \operatorname{tg} \varphi_2 + (f_p + f_i) \cdot 0{,}000291 \cdot (\delta_p - \delta_i)' \operatorname{tg} \varphi_2 \%.$$

Hierbei sind f_p und f_i die Übersetzungsfehler von Spannungs- bzw. Stromwandler. Eilt der Strom I der Spannung P vor, so wird

$$f_N = f_p + f_i + 0{,}0291 \, (\delta_p - \delta_i)' \operatorname{tg} \varphi_2 - (f_p + f_i) \, 0{,}000291 \, (\delta_p - \delta_i)' \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \%.$$

5. Die Korrektur für die Aronschaltung.

Bei symmetrischer Belastung, wie sie angenommen werden sollte, wird eine Leistung

$$n_{g1} = p_{12} \cdot i_1 \cdot \cos(30^0 + \varphi)$$

gemessen, bei der der Strom i_1 der Spannung p_{12} um $(30^0 + \varphi)$ nacheilt. Für die rechnerische Leistung

$$N_{r1} = n_{g1} \cdot ü_{ps} \cdot ü_{is}$$

ist daher der Fehler

$$f_{N_1} = f_p + f_i - 0{,}0291\,(\delta_p - \delta_i)'\,\mathrm{tg}\,(30 + \varphi) + (f_p + f_i)\,0{,}000291)\,(\delta_p - \delta_i)' \cdot \mathrm{tg}\,(30 + \varphi)\,\%.$$

Weiter wird eine Leistung

$$n_{g2} = p_{32}\, i_3 \cos(30^0 - \varphi)$$

gemessen, bei der der Strom i_3 der Spannung p_{32} um $(30^0 - \varphi)$ voreilt. Für die rechnerische Leistung

$$N_{r2} = n_{g2} \cdot ü_{ps} \cdot ü_{is}$$

ist daher der Fehler

$$f_{N_2} = f_p + f_i + 0{,}0291\,(\delta_p - \delta_i)'\,\mathrm{tg}\,(30 - \varphi) - (f_p + f_i)\,0{,}000291\,(\delta_p - \delta_i)' \cdot \mathrm{tg}\,(30 - \varphi)\,\%.$$

Die wahren Leistungen sind daher

$$N_{w1} = N_{r1}\left(1 - \frac{f_{N1}}{100}\right)$$

und

$$N_{w1} = N_{r2}\left(1 - \frac{f_{N2}}{100}\right).$$

Man erhält die gesamte wahre Leistung

$$N_w = N_{w1} + N_{w2} = N_{r1}\left(1 - \frac{f_{N_1}}{100}\right) + N_{r2}\left(1 - \frac{f_{N_2}}{100}\right).$$

Nun ist aber, da symmetrische Last angenommen wurde,

$$\frac{N_{r1}}{N_{r2}} = \frac{n_{g1}}{n_{g2}} = \frac{\cos(30^0 + \varphi)}{\cos(30^0 - \varphi)},$$

$$= \frac{\cos 30^0 \cos\varphi - \sin 30^0 \sin\varphi}{\cos 30^0 \cos\varphi + \sin 30^0 \sin\varphi},$$

$$= \frac{1 - \mathrm{tg}\,30^0\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 + \mathrm{tg}\,30^0\,\mathrm{tg}\,\varphi},$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\varphi},$$

also

$$N_{r2} = N_{r1}\frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\varphi}$$

und die gesamte wahre Leistung

$$N_w = N_{r1} + N_{r2} - N_{r1}\frac{f_{N1}}{100} - N_{r1}\frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\varphi} \cdot \frac{f_{N2}}{100},$$

$$= (N_{r1} + N_{r2}) - N_{r1}\left(\frac{f_{N1}}{100} + \frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\varphi} \cdot \frac{f_{N2}}{100}\right),$$

$$= (N_{r1} + N_{r2})\left[1 - \frac{N_{r1}}{N_{r1} + N_{r2}}\left(\frac{f_{N1}}{100} + \frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\varphi} \cdot \frac{f_{N2}}{100}\right)\right].$$

Wieder mit Rücksicht auf die symmetrische Belastung folgt

$$\frac{N_{r1}}{N_{r1} + N_{r2}} = \frac{n_{g1}}{n_{g1} + n_{g2}} = \frac{\cos(30^0 + \varphi)}{\cos(30^0 + \varphi) + \cos(30^0 - \varphi)} = \frac{\cos 30^0 \cos\varphi - \sin 30^0 \sin\varphi}{2\cos 30^0 \cos\varphi} =$$

$$= \frac{1 - \mathrm{tg}\,30^0\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\varphi}{2\sqrt{3}}.$$



Jetzt erhält man für die gesamte Leistung

$$N_w = (N_{r1} + N_{r2})\left[1 - \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{f_{N1}}{100} + \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{f_{N2}}{100}\right)\right].$$

Andererseits setzen wir

$$N_w = (N_{r1} + N_{r2})\left(1 - \frac{f_a}{100}\right)$$

und verstehen unter f_a den Fehler, der bei Aronschaltung unter Vernachlässigung der Wandlerfehler auftritt, in Prozenten. Man erhält dann durch Vergleich

$$f_a = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi}{2\sqrt{3}}\left(f_{N1} + \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi}\cdot f_{N2}\right).$$

Für den Sonderfall $\cos\varphi = 1$ ergibt sich sofort

$$f_{a\,\varphi=0} = \frac{1}{2}(f_{N1} + f_{N2}) = \frac{1}{2}(f_p + f_i + f_p + f_i) = f_p + f_i.$$

Man sieht, daß der Einfluß der Winkelfehler auch bei Aronschaltung wegfällt.

Den allgemeinen Ausdruck für f_a formen wir noch um:

$$f_a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi) f_{N1} + (\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi) f_{N2}\right],$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}(f_{N1} + f_{N2}) - \operatorname{tg}\varphi\,(f_{N1} - f_{N2})\right]$$

und berechnen einzeln die Ausdrücke $f_{N1} + f_{N2}$ und $f_{N1} - f_{N2}$. Hierzu vereinfachen wir die Schreibweise von

$$f_{N1} = f_p + f_i - \operatorname{tg}(30^0 + \varphi)\left[0{,}0291\,(\delta_p - \delta_i)' - (f_p + f_i)\,0{,}000291\,(\delta_p - \delta_i)'\right]$$

und

$$f_{N2} = f_p + f_i + \operatorname{tg}(30^0 - \varphi)\left[0{,}0291\,(\delta_p - \delta_i)' - (f_p + f_i)\,0{,}000291\,(\delta_p - \delta_i)'\right].$$

indem wir den Faktor

$$0{,}0291\,(\delta_p - \delta_i)' - (f_p + f_i)\,0{,}000291\,(\delta_p - \delta_i)'$$

gleich einer Konstanten k_w setzen, die von der Qualität der verwendeten Wandler abhängig ist. Dann wird

$$f_{N1} = f_p + f_i - k_w \operatorname{tg}(30^0 + \varphi),$$

$$f_{N2} = f_p + f_i + k_w \operatorname{tg}(30^0 - \varphi)$$

und

$$f_{N2} + f_{N2} = 2(f_p + f_i) + k_w\left[\operatorname{tg}(30^0 - \varphi) - \operatorname{tg}(30^0 + \varphi)\right].$$

Hierin ist

$$\operatorname{tg}(30^0 - \varphi) - \operatorname{tg}(30^0 + \varphi) = \frac{\sin(30^0 - \varphi - (30^0 + \varphi))}{\cos(30^0 - \varphi)\cos(30^0 + \varphi)} =$$

$$= \frac{-\sin 2\varphi}{\cos^2 30^0 \cos^2\varphi - \sin^2 30^0 \sin^2\varphi} = \frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2 30^0 \cos^2\varphi - \sin^2 30^0 \sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{-2\operatorname{tg}\varphi}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{8\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi - 3}.$$

Ferner wird

$$f_{N1} - f_{N2} = -k_w\left[\operatorname{tg}(30^0 + \varphi) + \operatorname{tg}(30^0 - \varphi)\right]$$

mit

$$\operatorname{tg}(30^0+\varphi)+\operatorname{tg}(30^0-\varphi)=\frac{\sin(30^0+\varphi+(30^0-\varphi))}{\cos(30^0+\varphi)\cos(30^0-\varphi)}=$$

$$=\frac{\sin 60^0}{\frac{3}{4}\cos^2\varphi-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\varphi}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi-3}$$

Man erhält somit

$$f_a=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\left(2\,(f_p+f_i)+\frac{8\,k_w\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi-3}\right)-\operatorname{tg}\varphi\,\frac{2\sqrt{3}\,k_w\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi-3}\right],$$

$$=f_p+f_i+\frac{4\,k_w\operatorname{tg}\varphi-k_w\operatorname{tg}\varphi\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi-3},$$

$$=f_p+f_i+\frac{3\,k_w\operatorname{tg}\varphi-k_w\operatorname{tg}^3\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi-3},$$

$$=f_p+f_i+k_w\operatorname{tg}\varphi\,\frac{3-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi-3},$$

$$=f_p+f_i-k_w\operatorname{tg}\varphi\ \%.$$

Hierin ist also

$$k_w=0{,}0291\,(\delta_p-\delta_i)'-(f_p+f_i)\cdot 0{,}000291\,(\delta_p-\delta_i)'.$$

6. Gültigkeitsbereich der Formel.

Die entwickelte Formel hat den Zweck zu zeigen, wie sich bei konstantem Strom, aber veränderlicher Phasenverschiebung der Fehler ändert, wenn man aus den Teilleistungen ohne Rücksicht auf die Wanderfehler die Gesamtleistung aus den Sollwerten der Übersetzungsverhältnisse bestimmt. Nur dann kann k_w als Konstante angesehen werden, denn bei konstantem Strom — die Spannung wird stillschweigend als unveränderlich angenommen — ist natürlich auch f_i konstant.

7. Diskussion der Formel.

Formal stimmt die Gleichung für f_a mit der in 4. entwickelten Gleichung für f_N überein. Obwohl für $\cos\varphi = 1$ in den Wattmetern Phasenverschiebungen von 30 Grad zwischen Strom und Spannung auftreten, wirken diese sich nicht auf den Fehler aus. Der Gebrauch der Formel gestaltet sich folgendermaßen: man errechnet k_w als Funktion des Stromes I und erhält dann für jeden Wert von I eine Kurve $f_a = F(\varphi)$. So ergibt sich eine Kurvenschar, aus der für jeden Stromwert und Phasenverschiebungswinkel φ der Fehler f_a entnommen werden kann.



Zur Theorie des Stromwenders.

Von

H. Bechmann.

Auszug.

Gezeigt wird, wie die Bürstenspannung mit den Umlaufspannungen der kurz geschlossenen Wicklungselemente und wie die Bürstenstromdichte mit den Kurzschlußströmen zusammenhängt. Darauf wird unter gewissen Voraussetzungen die Gleichung der Bürstenspannungskurve entwickelt, und es werden einige für das Verhalten von Stromwenderbürsten wichtige Schlüsse gezogen.

Zeichen.

B_w Luftspaltinduktion in der Wendezone.
B_{wO} Luftspaltinduktion des „richtigen" Wendefeldes.
b_B Bürstenbreite.
c_B Bürstenstromdichte.
f_S Segmentfrequenz.
I Ankerzweigstrom.
i Kurzschlußstrom.
i' Ableitung des Kurzschlußstromes nach der Zeit.
i_m Strom im Wicklungselement m.
$i_{m,n}$ Strom vom Segment m,n zur Hauptbürste.
k Zahl der Stromwendersegmente, Zahl der Wicklungselemente.
N_B Bürstenleistung.
N_s Selbstinduktionsleistung.
n_B Bürstenleistungsdichte.
(RF) Bezogener Bürstenübergangswiderstand.
R_B Bürstenübergangswiderstand.
T_k Kurzschlußzeit.
t_S Segmentteilung.
U_B Bürstenspannung.
U_E Mittlere Umlaufspannung des Wicklungselements an der Stelle y.
U_s Selbstinduktionsspannung.
U_w Wendespannung.
u_m Augenblickswert der Umlaufspannung des Wicklungselements m.
ü Bürstendeckung.
v_A Ankerumfangsgeschwindigkeit.
v_S Stromwenderumfangsgeschwindigkeit.
w Windungszahl eines Wicklungselements.
α Dämpfungsgrad.
$\approx$ Nahezu gleich.

Das Arbeiten des Stromwenders wird von zwei Zusammenhängen beherrscht, demjenigen zwischen der Bürstenspannung und den Umlaufspannungen der kurz geschlossenen Wicklungselemente und demjenigen zwischen der Bürstenstromdichte und den Kurzschlußströmen. Der folgende Aufsatz will diese Beziehungen klären[1] und zeigen, welche Schlüsse aus ihnen gezogen werden können.

[1] Die Gegenstände der vorliegenden Arbeit sind schon verschiedentlich im Schrifttum behandelt, z. B.: Arnold-La Cour, Die Gleichstrommaschine, 3. Auflage, Berlin 1919, Springer, 1. Band, S. 205 und 232. — Rudolf Richter, Elektrische Maschinen, Berlin 1924, Springer, 1. Band, S. 398. Eine klare Formulierung und eine strenge Beweisführung scheinen jedoch zu fehlen.

Übergangsspannung und Stromdichte sind im allgemeinen von Punkt zu Punkt der Bürstenberührungsfläche verschieden und schwanken an jeder Stelle in mehr oder weniger weiten Grenzen. Unter der Bürstenspannung U_B wird die mittlere Übergangsspannung, unter der Bürstenstromdichte c_B die mittlere Übergangsstromdichte auf einer parallel zu den Segmentscheiden[1] gezogene Linie verstanden.

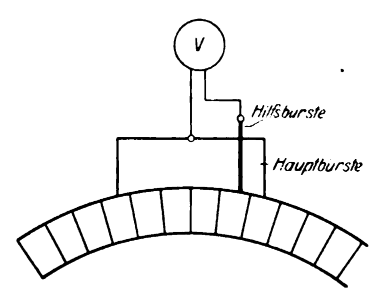


Bild 1. Schaltung zum Messen der Bürstenspannung.

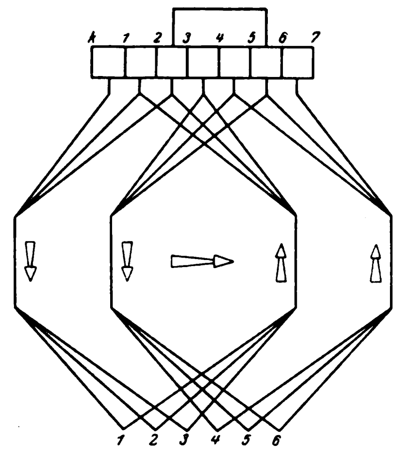


Bild 2. Die Stromwenderwicklung. Der große Pfeil in der Mitte gibt die Umlaufrichtung des Ankers, die kleinen Pfeile an den Spulenseiten geben den Wicklungssinn an.

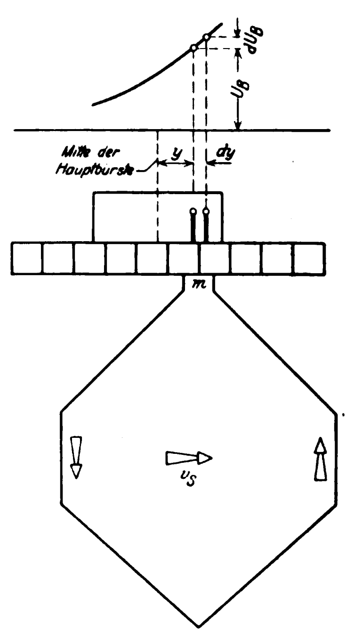


Bild 3. Die Bürstenspannungskurve.

Der einfachen Darstellung wegen schließen die folgenden Ausführungen an eine eingängige Schleifenwicklung an. Sie gelten aber unverändert für eingängige Wellenwicklungen mit nur zwei aufgesetzten Bürstengruppen, wenn man als Wicklungselemente die Leiterzüge ansieht, die zwischen je zwei benachbarten Segmenten liegen[2]. Für mehrgängige Wicklungen wird die Ableitung umständlicher, ohne daß man zu anderen Ergebnissen gelangt. Inwieweit Wellenwicklungen mit mehr als zwei aufgesetzten Bürstengruppen ein abweichendes Verhalten zeigen, wird hier nicht untersucht.

Die Bürstenspannung läßt sich bekanntlich mit einem statischen Spannungsmesser und einer schmalen Hilfsbürste ermitteln (Bild 1). Da nämlich die Hilfsbürste in jedem Augenblick das Potential des ihr gerade anliegenden Stromwendersegments hat[3], so mißt man in der Schaltung Bild 1 die Spannung, die zwischen den Segmenten und der Hauptbürste im Mittel während der Zeit besteht, in der die

[1] Als Segmentscheiden werden die Isolierschichten zwischen den Segmenten bezeichnet.

[2] Daß bei dieser Betrachtungsweise jeder Leiter einer Wellenwicklung zu mehreren Elementen zählt, ist für das Folgende ohne Belang.

[3] Der Strom im Meßkreis sei so klein, daß er keinen nennenswerten Spannungsfall zwischen Stromwender und Hifsbürste hervorruft.

Segmente die Hilfsbürste überschreiten, und das ist eben die Bürstenspannung U_B in der durch die Hilfsbürste parallel zu den Segmentscheiden gezogenen Linie[1].

Eine Stromwenderwicklung besteht aus k Wicklungselementen und ebensovie Stromwendersegmenten. Zu jedem Wicklungselement gehört eine Segmentscheidel (Bild 2). Die Wicklungselemente und ihre Segmentscheiden werden fortlaufend in Drehrichtung des Ankers numeriert (Bild 2). Die Segmente sind dann durch ein Zahlenpaar zu bezeichnen.

Der Ohmsche Spannungsfall in den Stromwenderanschlüssen wird vernachlässigt[2]. Dann ist die Spannung zwischen benachbarten Segmenten gleich der Umlaufspannung des zwischen ihnen liegenden Wicklungselements.

Ein Stromwender der Segmentteilung ts laufe mit der Umfangsgeschwindigkeit v_s um. Auf ihm mögen sehr nahe beieinander an den Stellen y und y + dy zwei schmale Hilfsbürsten stehen (Bild 3). y soll auf dem Stromwenderumfang gemessen und in seiner Umlaufrichtung positiv gerechnet werden. Die Spannung zwischen diesen beiden Hilfsbürsten ist während der Zeit dy/v_s, in der die Segmentscheide m die Strecke dy durchschreitet[3], gleich der Umlaufspannung u_m des zugehörenden Wicklungselements m[4], während des Restes der Segmentperiode t_s/v_s Null. Die mittlere Spannung zwischen den beiden Hilfsbürsten ist gleich der Zunahme der Bürstenspannung zwischen den Stellen y und y + dy. Man berechnet:

$$dU_B = \frac{dy/v_s}{t_s/v_s} \cdot \frac{u_1(y) + u_2(y) + \ldots + u_k(y)}{k}. \tag{1}$$

Der zweite Bruch rechts ist die mittlere Umlaufspannung eines Wicklungselements „an der Stelle y“. Die (y) im Zähler weisen darauf hin, daß zur Mittelwertbildung die einzelnen Umlaufspannungen mit den Werten einzuführen sind, die sie jeweils in dem Augenblick haben, in dem ihre Segmentscheide die Stelle y überschreitet. Man setzt Gleichung (1) in die übersichtlichere Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU_B}{dy} &= \frac{U_E}{t_s}; \\ U_E &= \frac{u_1(y) + u_2(y) + \ldots + u_k(y)}{k} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und findet folgenden wichtigen Satz:

> Die Steigung der Bürstenspannungskurve an einer Stelle y ist gleich der durch die Segmentteilung geteilten Umlaufspannung, die die Wicklungselemente durchschnittlich in dem Augenblick haben, in dem ihre Segmentscheide die Stelle y überschreitet.

Integriert man die Gleichung (2) zwischen zwei Stellen a und b der Bürstenspannungskurve, so erhält man:

$$\int_a^b dU_B = U_B(b) - U_B(a) = \frac{\int_a^b u_1\,dy + \int_a^b u_2\,dy + \ldots + \int_a^b u_k\,dy}{k(b-a)} \cdot \frac{b-a}{t_s}. \tag{3}$$

Der erste Bruch rechts ist die mittlere Umlaufspannung eines Wicklungselements zwischen den Stellungen a und b seiner Segmentscheide. Führt man dafür das Zeichen $U_E(a, b)$ ein, so schreibt man an Stelle von (3):

$$U_B(b) - U_B(a) = U_E(a, b)\,\frac{b-a}{t_s} \tag{4}$$

[1] Der Spannungsfall innerhalb der Hauptbürsten wird hier als verschwindend vorausgesetzt.

[2] „Widerstandsverbindungen“ bleiben hier also außer Betracht.

[3] Die Segmentscheiden werden hier als unendlich dünn betrachtet.

[4] Übergangsspannungen und Übergangsstromdichten werden in Richtung vom Stromwender zu den Bürsten, Umlaufsspannungen und Wicklungsströme in Richtung des Wicklungssinns positiv gerechnet. Der Wicklungssinn geht in der Zahlenfolge der Elemente.

und erhält den Satz:

Die Zunahme der Bürstenspannung zwischen den Stellen a und b ist gleich der Umlaufspannung, die die Elemente im Mittel während des Übergangs ihrer Segmentscheiden aus der Stellung a in die Stellung b haben, multipliziert mit der Zahl der auf die Strecke (a b) entfallenden Segmente.

Auf diesem Satz beruht die gewöhnliche Anwendung der Bürstenspannungsmessungen. Vernachlässigt man nämlich den Ohmschen Spannungsfall in den Ankerleitern ebenso wie in den Stromwenderanschlüssen, so bleiben nur die Spannungen übrig, die durch die Selbst- und Gegeninduktion zwischen den stromwendenden Wicklungsteilen und durch die Bewegung im Wendefeld erzeugt werden. Im allgemeinen sind diese Spannungen während des einzelnen Bürstenkurzschlusses nicht konstant und für verschiedene Wicklungselemente nicht gleich. Im Gesamtmittel[1] ruft die Selbst- und Gegeninduktion zwischen den stromwendenden Teilen der Ankerwicklung eine Selbstinduktionsspannung U_s, die Bewegung im Wendefeld eine Wendespannung U_w hervor[2]. Wendet man die Gleichung (4) auf Stellungen der Hilfsbürste an der anlaufenden und der ablaufenden Kante der Hauptbürste an und bezeichnet mit $U_{B,an}$ die Anlauf-, mit $U_{B,ab}$ die Ablaufspannung und mit ü die Bürstendeckung, so folgt:

$$U_{B,ab} - U_{B,an} = \ddot{u}\,(U_s - U_w). \tag{5}$$

Diese Gleichung bedeutet:

Die Zunahme der Bürstenspannung von der anlaufenden zur ablaufenden Kante ist gleich der Bürstendeckung mal dem Überschuß der Selbstinduktionsspannung über die Wendespannung

Aus Gründen, deren Wesen später hervortreten wird, ist es erwünscht, daß die Wendespannung der Selbstinduktionsspannung gleicht[3]. Das entsprechende Wendefeld B_{wO} soll „richtig" genannt werden. Den wohlbekannten qualitativen Inhalt der Gleichung (5) kann man dann in die Worte kleiden:

Bei richtigem Wendefeld ist die Ablaufspannung gleich der Anlaufspannung, bei zu schwachem Wendefeld steigt, bei zu starkem Wendefeld fällt die absolute Bürstenspannung von der anlaufenden zur ablaufenden Kante.

Wichtig ist, aus einer Bürstenspannungsmessung berechnen zu können, um welchen Betrag das Wendefeld einer unter- oder überstromwendenden Maschine vom richtigen Wert abweicht. Das Wendefeld sei innerhalb der Wendezone gleichmäßig. Dann läßt sich die Wendespannung durch die Luftspaltinduktion B_w in der Wendezone, die Wendefeldlänge l_w in Richtung der Maschinenachse, die Windungszahl w des einzelnen Wicklungselements und die Ankerumfangsgeschwindigkeit v_A ausdrücken wie folgt:

$$U_w = 2\,w\,l_w\,v_A\,B_w. \tag{6a}$$

Die Selbstinduktionsspannung hängt mit dem richtigen Wendefeld zusammen durch:

$$U_s = 2\,w\,l_w\,v_A\,B_{wO}. \tag{6b}$$

---

[1] Das Mittel ist ein zweifaches, nämlich erstens ist für jedes einzele Wicklungselement der Mittelwert über den Bürstenkurzschluß zu bilden, zweitens zwischen den verschiedenen Wicklungselementen der Durchschnitt zu nehmen. Daß als Selbstinduktions- und als Wendespannung nicht Augenblicks-, sondern Mittelwerte erklärt werden, ist für das Folgende wohl zu beachten.

[2] Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Wirkung der Gegeninduktion zwischen den stromwendenden Wicklungsteilen in die Selbstinduktionsspannung eingeschlossen ist. Die Selbstinduktionsspannung U_s ist in Richtung des Wicklungssinns, die Wendespannung U_w im entgegengesetzten Sinne positiv zu rechnen.

[3] Man erinnere sich, daß unter der Selbstinduktions- und der Wendespannung Mittelwerte verstanden werden (Anm. 1).

Führt man diese beiden Gleichungen in (5) ein, so berechnet man den Wendefeldfehler zu:

$$B_{w0} - B_w = \frac{U_{B,ab} - U_{B,an}}{2\,\ddot{u}\,w\,l_w\,v_A}. \qquad (7)$$

Diese Gleichung vernachlässigt, daß die Selbstinduktionsspannung die Gegeninduktion zwischen den stromwendenden Wicklungsteilen enthält und infolgedessen vom Verlauf der Kurzschlußströme nicht ganz unabhängig ist. Man macht sich leicht klar, daß der hierdurch entstehende Fehler gewöhnlich nicht sehr groß wird[1].

Durch die Übergangsspannung wird in jedem Augenblick die Übergangsstromdichte bestimmt. Zwar sind beide Größen nicht verhältnisgleich wie bei einem Ohmschen Widerstand, doch ist ihr Zusammenhang eindeutig und kann für einen bestimmten Stromwender- und Bürstenbaustoff als bekannt vorausgesetzt werden[2]. Aus der Bürstenspannung kann daher ohne weiteres auf die Bürstenstromdichte geschlossen werden[3].

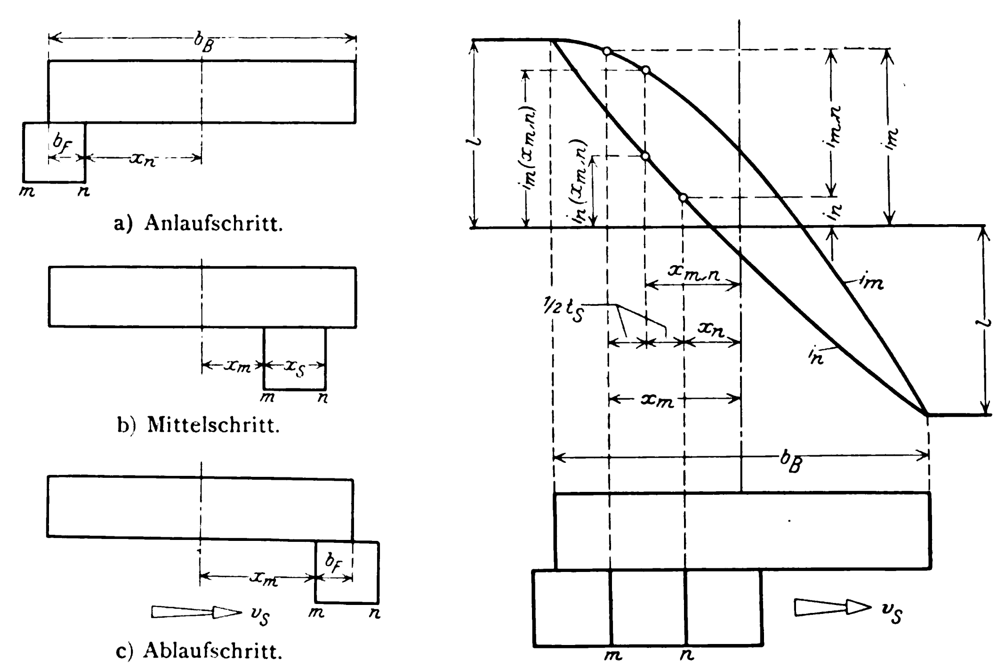


Bild 4. Übergang eines Segments über eine Hauptbürste.

Bild 5. Der Zusammenhang zwischen den Strömen in den Wicklungselementen und den Segmentströmen.

Die Bürstenstromdichte wird durch einen ähnlichen Zusammenhang mit den Kurzschlußströmen verknüpft, wie er oben zwischen der Bürstenspannung und den Umlaufspannungen der kurzgeschlossenen Wicklungselemente gezeigt wurde.

Der Strom $i_{m\,n}$, der von einem Segment m, n zur Hauptbürste fließt, ändert sich jedenfalls nicht sprungweise, sondern stetig. Infolgedessen ist die Bürstenstromdichte sehr nahe gleich der Stromdichte, die die Segmente durchschnittlich in dem

[1] Jedenfalls wird bemerkt, daß die Art des Zusammenhanges zwischen Übergangsspannung und Übergangsstromdichte die Gültigkeit der Gleichungen (5) und (7) nicht beeinflußt.

[2] Siehe z. B.: Rudolf Richter, Elektrische Maschinen, Berlin 1924, Springer, 1. Band, S. 232.

[3] Der unmittelbare Schluß von der Bürstenspannung auf die Bürstenstromdichte vernachlässigt, daß der Bürstenübergang kein Ohmsches Verhalten zeigt. Diese Vernachlässigung ist statthaft, solange sich die periodischen Schwankungen der Übergangsspannung an einer bestimmten Stelle der Übergangsfläche in hinreichend engen Grenzen halten.

Augenblick haben, in dem ihre Mitte unter der betreffenden Stelle der Hauptbürste steht. Bezeichnet man mit b_F die Breite, mit der in diesem Augenblick das Segment der Hauptbürste anliegt (Bild 4), mit l_B die Gesamtlänge der Bürsten einer Spindel in Richtung der Maschinenachse[1], so kann man schreiben:

$$c_B(y) \approx \frac{i_{1,2}(y) + i_{2,3}(y) + \ldots + i_{k,1}(y)}{k\, l_B\, b_F}. \qquad (8)$$

Der Segmentstrom ist in jedem Augenblick gleich Differenz der angeschlossenen Elementströme (Bild 2)[2]:

$$i_{m,n} = i_m - i_n. \qquad (9)$$

Die Stellung der Segmentscheiden m und n werde jetzt mit x_m und x_n bezeichnet, die Stellung der Mitte des Segments m,n mit $x_{m,n}$ (Bild 5) und der Elementstrom i_m, beziehungsweise i_n als Funktion von x_m, beziehungsweise x_n, der Segmentstrom $i_{m\,n}$ als Funktion von $x_{m\,n}$ aufgefaßt (Bild 5).

Der Übergang eines Segments über die Hauptbürste zerfällt in drei Schritte, den Anlaufschritt, Bild 4a, den Mittelschritt, Bild 4b, und den Ablaufschritt, Bild 4c.

Während des *Mittelschrittes*, Bild 4b, liegt das Segment der Hauptbürste dauernd in der Breite:

$$b_F = ts \qquad (10)$$

an. Führt man die Bezeichnung:

$$i' = \frac{d\,i}{d\,x} \qquad (11)$$

ein, so können die i_m, i_n näherungsweise in ihren Werten an der Stelle $x_{m\,n}$ ausgedrückt werden (Bild 5):

$$\left.\begin{aligned} i_m(x_m) &\approx i_m(x_{m,n}) - 1/2\, ts\, i_m'(x_{m\,n}), \\ i_n(x_n) &\approx i_n(x_{m\,n}) + 1/2\, ts\, i_n'(x_{m\,n}), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

und man erhält:

$$i_{m,n} \approx i_m(x_m) - i_n(x_n) \approx i_m(x_{m\,n}) - i_n(x_{m,n}) - 1/2\, ts\,(i_m'(x_{m\,n}) + i_n'(x_{m,n})) \qquad (13)$$

Die in Gleichung (8) vorkommende Summe der Segmentströme berechnet man nun, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} i_{1,2}(y) &\approx i_1(y) - i_2(y) - 1/2\, ts\,(i_1'(y) + i_2'(y)), \\ i_{2,3}(y) &\approx i_2(y) - i_3(y) - 1/2\, ts\,(i_2'(y) + i_3'(y)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{k,1}(y) &\approx i_k(y) - i_1(y) - 1/2\, ts\,(i_k'(y) + i_1'(y)). \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

Bei Addition der Gleichungen (14) heben sich die $i_1, i_2, \ldots, i_k$ paarweise fort, und man erhält:

$$i_{1,2}(y) + i_{2\,3}(y) + \ldots + i_{k,1}(y) \approx -\, ts\,(i_1'(y) + i_2'(y) + \ldots + i_k'(y)). \qquad (15)$$

Die Gleichungen (10) und (15) werden in (8) eingeführt und ergeben für die Mittelzone:

$$c_B(y) \approx -\frac{i_1'(y) + i_2'(y) + \ldots + i_k'(y)}{k\, l_B}. \qquad (16)$$

Für den *Anlaufschritt*, Bild 4a, hat man in Gleichung (9), wenn I den Ankerzweigstrom *vor* der Stromwendung bedeutet, zu setzen:

$$i_m = +\,I, \qquad (17)$$

$$i_n \approx +\,I + b_F\, i_n'(x_{m,n}), \qquad (18)$$

und Gleichung (9) geht über in:

$$i_{m\,n}(y) \approx -\, b_F\, i_n'(y). \qquad (19)$$

[1] Hier werden nur ungestaffelte Bürsten rechteckigen Querschnitts behandelt.

[2] Oben (Anm. 4, S. 17) wurde schon bemerkt, daß die Segmentströme in Richtung vom Stromwender zur Bürste, die Elementströme in Richtung des Wicklungssinns positiv zu rechnen sind.

Für die ablaufende Kante berechnet man entsprechend, Bild 4c:

$$i_n = -I, \tag{20}$$

$$i_m \approx -I - b_F\, i_m'(x_{m,n}), \tag{21}$$

$$i_{m,n}(y) \approx -b_F\, i_m'(y). \tag{22}$$

Indem man die Werte (19) und (22) in die Gleichung (8) einsetzt, folgt für den Anlauf- und den Ablaufschritt der gleiche Ausdruck wie für den Mittelschritt:

$$c_B(y) \approx -\frac{i_1'(y) + i_2'(y) + \ldots + i_k'(y)}{k\, l_B}. \tag{16}$$

An Stelle der letzten Gleichung kann man auch schreiben:

$$c_B \approx -\frac{1}{l_B} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{i_1 + i_2 + \ldots + i_k}{k}\right) = -\frac{1}{l_B} \cdot \frac{di_{Mi}}{dy}. \tag{23}$$

i_{Mi} ist der mittlere Kurzschlußstrom, der durch Übereinanderlagern der in Funktion ihrer Segmentstellungen aufgetragenen Elementströme zu bilden ist. Man erhält den Satz:

Vom Vorzeichen abgesehen ist die Bürstenstromdichte näherungsweise die Differentialkurve des mittleren Kurzschlußstroms; der mittlere Kurzschlußstrom ist näherungsweise eine Integralkurve der Bürstenstromdichte[1].

Das negative Vorzeichen in Gleichung (23) hat den Sinn, daß der Strom überall dort vom Stromwender zur Hauptbürste fließt, wo der mittlere Kurzschlußstrom, wenn er in Richtung vom später zum früher auflaufenden Segment positiv gerechnet wird, abnimmt. Man macht sich das am Bild 2 klar.

Integriert man die Gleichung (23) rechts und links von $-1/2\, b_B$ bis $+1/2\, b_B$ (Bild 5) und teilt durch b_B, so gewinnt man die von vornherein notwendige Beziehung:

$$\frac{1}{b_B}\int_{-1/2\, b_B}^{+1/2\, b_B} c_B\, dy = c_{B,Mi} = \frac{2\, I}{b_B\, l_B}. \tag{24}$$

Der Zusammenhang von Bürstenstromdichte und Kurzschlußstrom, wie er oben entwickelt wurde, genügt also der Bedingung, daß die Bürsten einer Spindel die Ströme abführen, die ihnen aus den einmündenden Ankerzweigen zufließen.

Erläutert werde die Gleichung (23) an einer linearen Verteilung der Bürstenspannung, ohne daß auf die Frage eingegangen wird, unter welchen Voraussetzungen solche Verteilung eintritt. Es sei also mit einer zunächst offen gelassenen Konstante C:

$$c_B = \frac{2\, I}{b_B\, l_B}\left(1 + C\frac{y}{b_B}\right). \tag{25}$$

Die Gleichung (23) bestimmt:

$$i_{Mi} \approx -\frac{2\, I}{b_B}\int \left(1 + C\frac{y}{b_B}\right) dy. \tag{26}$$

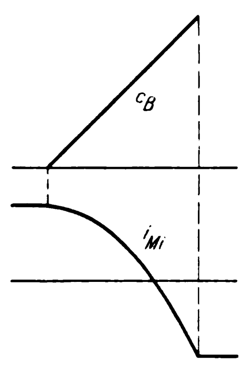
Durch Auflösen des Integrals und Ansetzen der Grenzen berechnet man:

$$i_{Mi} \approx I\left(-2\frac{y}{b_B} + C\left(1/4 - \left(\frac{y}{b_B}\right)^2\right)\right). \tag{27}$$

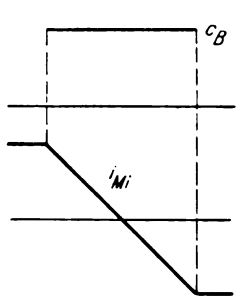
Die Gleichungen (25) und (27) sind für $C = 1$, $C = 0$, $C = -1$ und $C = -2$ in den Bildern 6 dargestellt. Die Bilder bringen die Beziehung zwischen der Bürstenstromdichte und dem Verlauf des Stroms in den kurzgeschlossenen Wicklungselementen zu deutlicher Anschauung.

[1] Dieser Satz geht erheblich weiter als Formulierungen, die man bei Arnold und Richter findet.

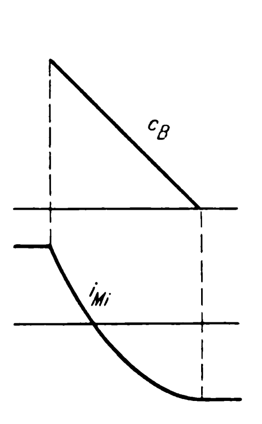
Die Gleichungen (2) und (23) sind grundlegend für das Arbeiten eines Stromwenders, das sie im Verein mit den Zusammenhängen zwischen der Selbstinduktionsspannung und dem Verlauf des Kurzschlußstroms und zwischen der Bürstenspannung und der Bürstenstromdichte völlig bestimmen. Diese weitgehende Bedeutung soll an dem besonders einfachen Fall gleichmäßiger Wendefeldinduktion und einer Wicklung gezeigt werden, deren Elemente alle die gleiche Selbstinduktivität L haben, sich aber gegenseitig nicht induzieren. Sehr nahe wird diese Bedingung durch eine Einschicht-Nutenwicklung mit nur einem Element je Spule erfüllt. Bei Zweischichtwicklungen werden die Vorgänge infolge der Gegeninduktion zwischen verschiedenen Spulen unübersichtlicher, ohne daß sie dem Wesen nach anders geartet sind.



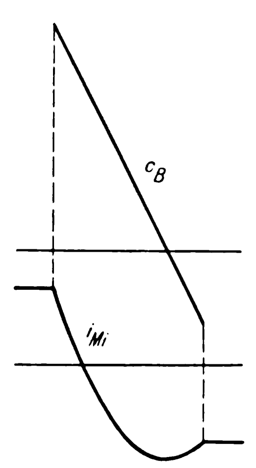
a) C = + 1 Unterstromwendung,



b) C = 0 „richtige" Stromwendung,



c) C = — 1 Überstromwendung,



d) C = — 2 Überstromwendung.

Bild 6. Bürstenstromdichte und Kurzschlußstrom.

Der Kurzschlußstrom verläuft unter den eingeführten Voraussetzungen in allen Wicklungselementen gleich und soll daher unter Fortlassen des Fußzeichens Mi mit i bezeichnet werden. Die Umlaufspannung U_E in Gleichung (2) hat dann folgende Größe:

$$U_E = -L\,v s \frac{d\,i}{d\,y} - U_w. \tag{28}$$

Oben wurde schon erörtert, daß die Bürstenspannung eine eindeutige, im allgemeinen aber nicht lineare Funktion der Bürstenstromdichte ist. Um umständliche Rechnungen zu vermeiden, wird hier in erster und roher Annäherung ein konstanter, auf die Einheit der Berührungsfläche bezogener Bürstenübergangswiderstand (RF) eingeführt und gesetzt:

$$U_B = (RF)\, c_B. \tag{29}$$

Den Stromwendungs- und Stromabnahmevorgang kennzeichnen die Größen U_B, U_E, c_B und i, für die man jetzt folgende vier Gleichungen anschreibt:

$$\frac{d\,U_B}{d\,y} = \frac{U_E}{ts}; \tag{22}$$

$$c_B = -\frac{1}{l_B}\frac{d\,i}{d\,y}; \tag{30}$$

$$U_E = -L\,vs\frac{d\,i}{d\,y} - U_w; \tag{28}$$

$$U_B = (RF)\, c_B. \tag{29}$$

Durch Auflösen nach U_B wird die **Differentialgleichung der Bürstenspannungskurve** gewonnen:

$$\frac{d\,U_B}{d\,y} - \frac{L\,vs\,l_B}{(RF)}\frac{U_B}{ts} + \frac{U_w}{ts} = 0. \tag{31}$$

Führt man an Stelle von y die Veränderliche:

$$z = \frac{y}{b_B} \tag{32}$$

ein und den **Dämpfungsgrad**:

$$\alpha = \frac{(RF)}{b_B\, l_B}\frac{ts}{L\,vs}, \tag{33}$$

so kann man an Stelle von (31) schreiben:

$$\frac{d\,U_B}{d\,z} - \frac{U_B}{\alpha} + \ddot{u}\,U_w = 0. \tag{34}$$

Die Bedeutung des Dämpfungsgrades wird anschaulich, wenn man ihm mit dem **absoluten** Bürstenübergangswiderstand:

$$R_B = \frac{(RF)}{b_B\, l_B} \tag{35}$$

und der Kurzschlußzeit:

$$T_k = \frac{b_B}{vs} \tag{36}$$

die Form gibt:

$$\alpha = \frac{R_B}{\ddot{u}\,L/T_k} = \frac{2\,I\,R_B}{\ddot{u}\,2\,I\,L/T_k}. \tag{37}$$

$2\,I\,R_B$ ist infolge des Ansatzes (29) die mittlere Bürstenspannung:

$$2\,I\,R_B = U_{B,Mi} = \int_{-1/2}^{+1/2} U_B\, d\,z. \tag{38}$$

$$\frac{2\,I\,L}{T_k} = U_S \tag{39}$$

ist die schon oben erwähnte mittlere Selbstinduktionsspannung. Man schreibt für (37):

$$\alpha = \frac{2\,I\,R_B}{\ddot{u}\,U_S} = \frac{U_{B,Mi}}{\ddot{u}\,U_S} \tag{40}$$

und erkennt, daß α einen Grad angibt, in dem die „induktive Wucht der Kurzschlußströme durch den Bürstenübergang gebremst" wird[1]. Die volle Bedeutung des Dämpfungsgrades wird sich in den folgenden Darlegungen zeigen. Will man ihn berechnen, so schreibt man übrigens zweckmäßig mit der Segmentfrequenz:

$$f_S = \frac{vs}{ts}: \tag{41}$$

[1] Bemerkenswert ist, daß im Nenner des Dämpfungsgrades die Bürstendeckung ü vorkommt.

$$\alpha = \frac{R_B}{L f_s}. \tag{42}$$

Bei Maschinen, wie sie heute gewöhnlich ausgeführt werden, kommen Dämpfungsgrade zwischen 0,2 und 2 vor.

Zuerst werde der einfache Fall erörtert, daß die Selbstinduktionsspannung gegen die mittlere Bürstenspannung verschwindet. Dem kommen langsam laufende Maschinen mit kleiner Selbstinduktion und verhältnismäßig großem Bürstenübergangswiderstand nahe. α wird unendlich, Gleichung (34) geht über in:

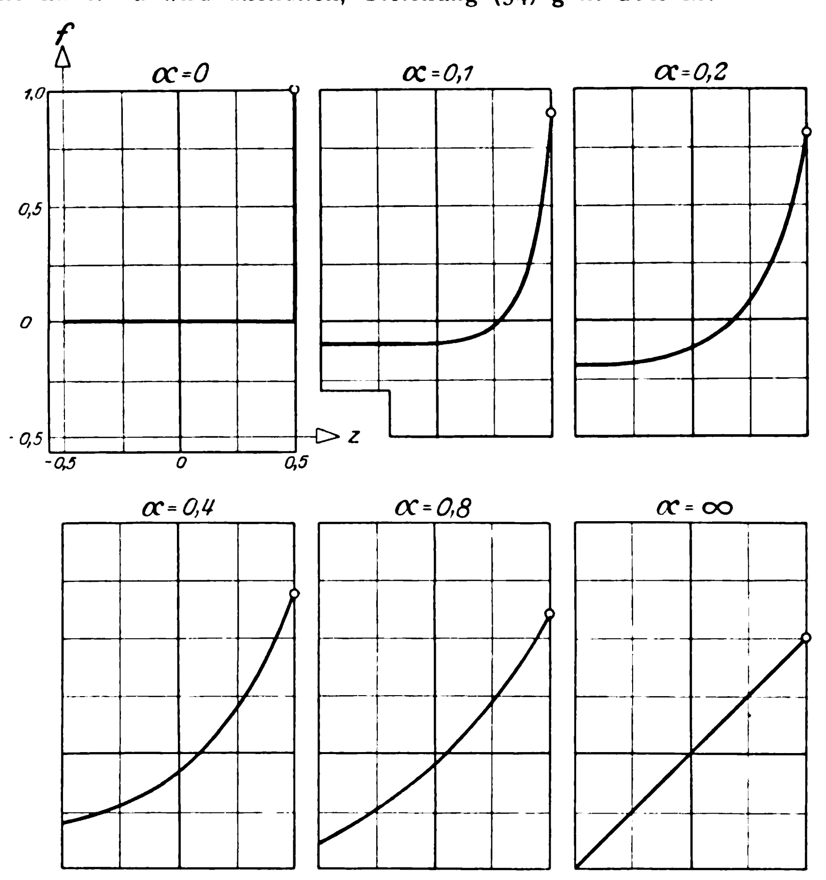


Bild 7. Verlauf der zusätzlichen Bürstenspannung bei verschiedenen Dämpfungsgraden.

$$\frac{d U_B}{d z} = - ü U_w \tag{43}$$

und man findet leicht:

$$U_{B,\alpha - \text{unendlich}} = 2 I R_B - ü U_w z. \tag{44}$$

Die Bürstenspannung verläuft hier nach einer geraden Linie, ist bei verschwindendem Wendefeld konstant, steigt bei negativem U_w und fällt bei positivem U_w von der anlaufenden zur ablaufenden Kante. Da die Stromdichte der Bürstenspannung als verhältnisgleich vorausgesetzt wurde, kommt man auf den Fall zurück, der schon durch die Bilder 6 erläutert worden ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (34) lautet:

$$\left.\begin{aligned} U_B &= 2 I R_B + ü\,(U_s - U_w) f(z,\alpha); \\ f(z,\alpha) &= \frac{e^{z\alpha}}{e^{+1/(2\alpha)} - e^{-1/(2\alpha)}} - \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Bei „richtigem“ Wendefeld,

$$U_s = U_w, \tag{46}$$

geht Gleichung (45) über in:

$$U_{B,\text{richtig}} = 2\,I\,R_B. \tag{47}$$

Die Bürstenspannung ist dann wieder konstant über die ganze Breite der Hauptbürsten.

Ist die Wendespannung von der Selbstinduktionsspannung verschieden, so tritt zu $2\,I\,R_B$ eine Zusatzspannung $ü\,(U_s - U_w)\,f(z, \alpha)$, die dem Unterschied zwischen Selbstinduktions- und Wendespannung verhältnisgleich und nach einer Funktion $f(z, \alpha)$ über die Bürstenbreite verteilt ist. Der Verlauf von f hängt vom Dämpfungsgrad α ab und ist im Bild 7 aufgezeichnet. Für jedes α steigt f mit z und nähert sich mit größer werdendem α mehr und mehr einer Geraden. Die Zusatzspannung bewirkt daher im Falle überwiegender Selbstinduktion ein Steigen (Unterstromwendung, Bild 8a), im Fall überwiegender Wendespannung ein Fallen (Überstromwendung, Bild 8c) der Bürstenspannung von der anlaufenden zur ablaufenden Kante. Der Anstieg und der Abfall wird um so mehr zur ablaufenden Kante verlegt, je kleiner der Dämpfungsgrad ist (Bild 7).

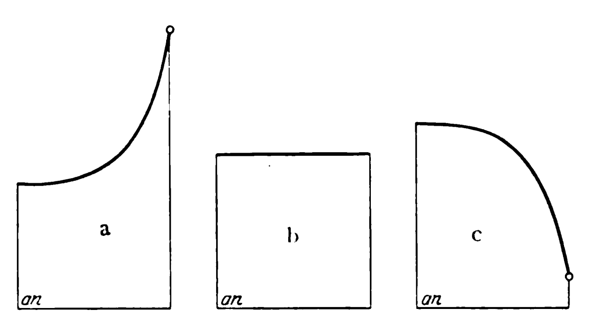


Bild 8. Verlauf der Bürstenspannungskurve bei verschiedenen Wendefeldstärken; Dämpfungsgrad: $\alpha = 0{,}2$.

a) Unterstromwendung: $ü\,(U_s - U_w) = +\,2\,I\,R_B$;
b) „richtige“ Stromwendung: $U_s = U_w$;
c) Überstromwendung: $ü\,(U_s - U_w) = -\,2\,I\,R_B$;
„an“: Anlaufkante.

Die **mittlere** Bürstenspannung wird durch die Zusatzspannung nicht geändert. Denn man prüft leicht nach, daß der Mittelwert von f verschwindet:

$$f_{Mi} = \int_{-1/2}^{+1/2} f\,dz = 0. \tag{48}$$

Berechnet man aus Gleichung (45) den Unterschied zwischen Anlauf- und Ablaufspannung, so gelangt man zur Gleichung (5) zurück und findet bestätigt, daß dieser Spannungsunterschied nur vom Unterschied zwischen Selbstinduktions- und Wendespannung, nicht aber vom Dämpfungsgrad abhängt.

Auf die Einheit der Berührungsfläche bezogen, wird an jeder Stelle der Bürsten eine Leistung:

$$n_B = \frac{U_B^2}{(RF)} \tag{49}$$

in Wärme umgesetzt[1]. Überschreitet diese **Leistungsdichte** einen dem Bürsten-

[1] Dieser Ansatz führt näherungsweise den linearen zeitlichen Mittelwert U_B der Übergangsspannung an Stelle des quadratischen Mittelwerts ein.

baustoff eigentümlichen Wert, so beginnen die Bürsten zu feuern[1]. Im Anschluß an Gleichung (45) soll untersucht werden, wie der an einer Bürste auftretende Höchstwert der Leistungsdichte durch Wendefeld und Dämpfungsgrad beeinflußt wird.

Bürstenspannung und Bürstenleistungsdichte werden bei zu schwachem Wendefeld an der ablaufenden, bei zu starkem Wendefeld an der anlaufenden Kante am größten (Bild 8). Bild 7 zeigt, daß bei jedem endlichen Dämpfungsgrad die absolute Zusatzspannung an der ablaufenden Kante größer als an der anlaufenden Kante ist. Daraus folgt, daß bei zu starkem Wendefeld die Anlaufspannung um einen geringeren Betrag über der mittleren Bürstenspannung liegt als die Ablaufspannung, wenn das Wendefeld um den gleichen Fehler zu schwach ist (Bild 8). Hierdurch erklärt sich die bekannte Erscheinung, daß Überstromwendung weniger leicht Bürstenfeuer bewirkt als die entsprechende Unterstromwendung.

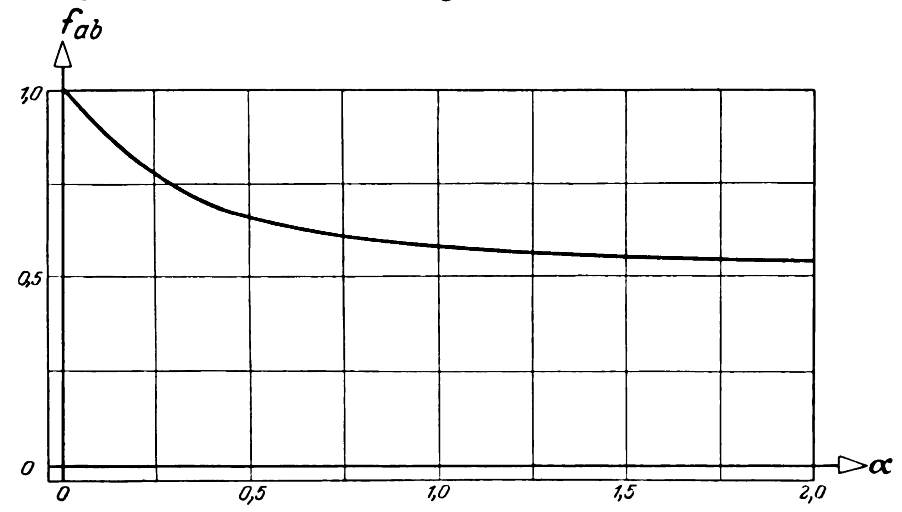


Bild 9. Die zusätzliche Bürstenspannung an der ablaufenden Kante.

Infolge der Eisensättigung im magnetischen Kreis der Wendepole bleibt das Wendefeld hinter dem Ankerstrom zurück, und die Funkengrenze wird fast immer durch die Bürstenleistungsdichte an der ablaufenden Kante bestimmt, die man aus den Gleichungen (49), (45) und (40) berechnet, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} n_{B,\,ab} &= \frac{N_s}{b_B\, l_B}\, g; \\ N_s &= \ddot{u}\, U_s I = \frac{(2\,I)^2 L}{2}\, f_s; \\ g &= 2\left(\sqrt{\alpha} + \frac{U_s - U_w}{U_s}\,\frac{f_{ab}}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

N_s ist die Leistung, die die Selbstinduktion der Ankerwicklung bei verschwindendem Wendefeld an einer Bürstengruppe erzeugt[2]. Die bezogene Selbstinduktionsleistung:

[1] Stromwenderbürsten sind zweifach beansprucht:
1. durch die einzelne beim Ablauf des „ungünstigsten" Segments einer Wicklung freiwerdende elektrische Stoßarbeit.
2. durch die Leistungsdichte n_B.

Welcher größte elektrische Stoß auftritt, hängt von den Wicklungseigenschaften ab und wird hier nicht untersucht. Der Verfasser glaubt, daß die Funkengrenze viel häufiger durch die größte Leistungsdichte als durch die größte Stoßarbeit bestimmt wird. Diese Anschauung kann zunächst nur damit begründet werden, daß die aus ihr gezogenen Schlüsse gut mit der Erfahrung übereinstimmen.

[2] Bei verschwindendem Wendefeld gibt nämlich jedes Wicklungselement eine Energie $(2\,I)^2 L/2$ ab.

$$\frac{N_s}{b_B l_B} = \frac{U_s I}{t_S l_B} = c_{B,\,Mi} (I f_S) L \qquad (51)$$

bildet einen Maßstab für die einem einwandfreien Arbeiten des Stromwenders drohende Gefahr[1].

Durch richtig bemessene Wendefelder läßt sich erreichen, daß nur ein geringer Teil der Selbstinduktionsleistung N_s an den Bürsten erscheint. Wie groß dieser Teil ist, wird durch den bezogenen Wendefeldfehler $(U_s - U_w)/U_s$ bestimmt. Vom Dämpfungsgrad hängt ab, wie sich die frei werdende Leistung über die Bürstenbreite verteilt. Diese Beziehungen werden durch die Funktion g ausgedrückt.

f_{ab} in der letzten Gleichung (50) ist der Wert, den die Funktion f in Gleichung (45) an der ablaufenden Kante annimmt:

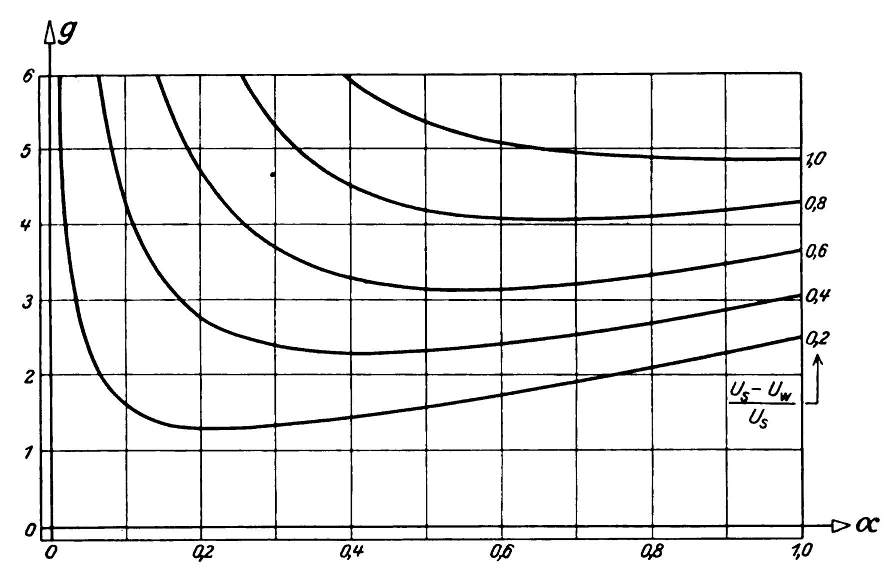


Bild 10. Die Bürstenleistungsdichte an der ablaufenden Kante.

$$f_{ab} = \frac{e^{1/\alpha}}{e^{1/\alpha} - 1} - \alpha \quad \text{(Bild 9)}^2. \qquad (52)$$

Die Funktion g ist im Bild 10 aufgezeichnet. Man sieht, daß bei zu schwachem Wendefeld die Bürstenleistungsdichte an der ablaufenden Kante mit verschwindendem Dämpfungsgrad unendlich wird, mit wachsender Dämpfung zuerst schnell sinkt und nach Erreichen eines Kleinstwertes wieder langsam ansteigt.

Die Leistungsdichte ändert sich durchaus stetig mit dem Dämpfungsgrad. Hier liegt nach Meinung des Verfassers der Grund, aus dem eine wohlbekannte Untersuchung über den Bürstenübergangswiderstand auf Ergebnisse führt, die mit der

[1] Der Verfasser hält die bezogene Selbstinduktionsleistung für einen besseren Maßstab der Stromwendungsschwierigkeit als die vielfach in diesem Sinne benutzte Selbstinduktionsspannung. Es sei aber ausdrücklich auf die folgenden Ausführungen hingewiesen und bemerkt, daß der bezogenen Selbstinduktionsleistung nur eine ähnliche Bedeutung zukommt wie dem Quadrat der Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges. Ganz ähnlichen Sinn wie die Angabe, daß die gegenwärtigen eisenbahntechnischen Mittel Geschwindigkeiten bis 130 km/h zulassen, hat es, wenn man sagt: bei modernen Maschinen werden bezogene Selbstinduktionsleistungen bis 150 Watt/qcm funkenfrei beherrscht.

[2] Für α größer als eins benutzt man folgende Reihenentwicklung:

$$f_{ab} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1/\alpha}{3} + \frac{(1/\alpha)^2}{8} + \frac{(1/\alpha)^3}{30} + \frac{(1/\alpha)^4}{144} + \dots}{1 + \frac{1/\alpha}{2} + \frac{(1/\alpha)^2}{6} + \frac{(1/\alpha)^3}{24} + \frac{(1/\alpha)^4}{120} + \dots}$$

Erfahrung nicht in Einklang stehen. Man zeigt nämlich, daß die Übergangsspannung an der ablaufenden Kante bei zu schwachem Wendefeld in dem Augenblick, in dem ein Segment die Bürste verläßt, unendlich wird, wenn R_B kleiner als L/T_k oder αü kleiner als 1 ist[1] und schließt, daß unter diesen Umständen Bürstenfeuer eintreten muß. Daß dies letzte tatsächlich nicht zutrifft, daß vielmehr die meisten modernen Maschinen ohne Anstand mit Übergangswiderständen kleiner als L/T_k arbeiten, sucht man damit zu erklären, daß die Bürstenkanten nicht mathematisch gerade sind und nicht genau den Segmentscheiden parallel stehen[2]. Dem Verfasser scheint diese Erklärung kaum haltbar. Denn man müßte aus ihr schließen, daß absichtlich schräg gestellte oder ausgefranste Bürsten eine höhere Funkengrenze haben, was sich durch die Erfahrung nicht erweisen läßt. Der Widerspruch hebt sich

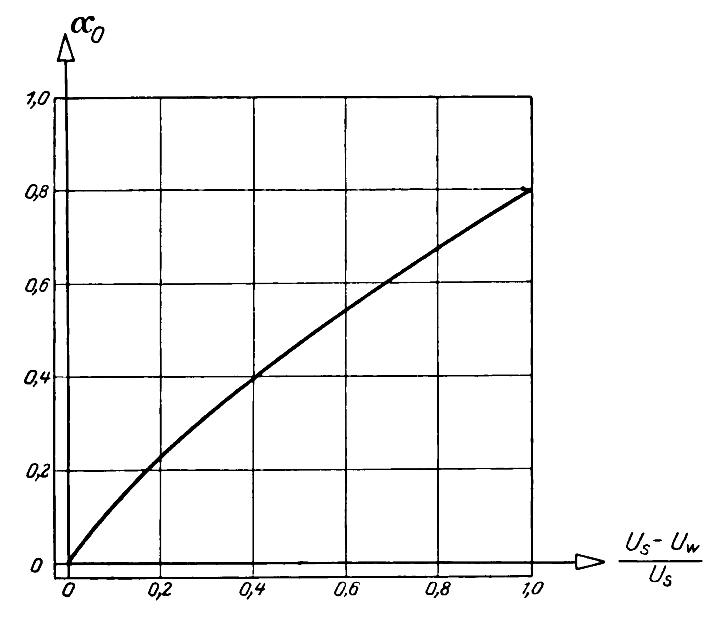


Bild 11. Der günstigste Dämpfungsgrad.

sofort, wenn man annimmt, daß in der Regel nicht der Augenblickswert der Übergangsspannung, sondern die mittlere Leistungsdichte n_B die Grenze des Bürstenfeuers bestimmt[3]. Dann kommt man auf genau das, was die Erfahrung zeigt, nämlich das folgende Verhalten.

Eine allgemeine Grenze für den Dämpfungsgrad, bei dessen Unterschreitung die Bürsten unter allen Umständen feuern, gibt es nicht, vielmehr gehört zu jedem bezogenen Wendefeldfehler ein günstigster Dämpfungsgrad α_0, der die Bürstenleistungsdichte an der ablaufenden Kante auf einen kleinsten Wert bringt. Durch Bilden des Minimums der Funktion g erhält man zwischen $(U_s - U_w)/U_s$ und α_0 folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_s - U_w}{U_s} &= \left(\frac{1}{\frac{f_{ab}}{\alpha} - 2\frac{df_{ab}}{d\alpha}}\right)_{\alpha = \alpha_0}; \\ \frac{df_{ab}}{d\alpha} &= \frac{e^{1/\alpha}}{\alpha^2 (e^{1/\alpha} - 1)^2} - 1. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

[1] Siehe z. B.: Rudolf Richter, Elelektrische Maschinen, Berlin 1924, Springer, 1. Band, S. 393.

[2] Siehe z. B: Rudolf Richter, Eelektrische Maschinen, Berlin 1924, Springer, 1. Band, S. 396.

[3] Man vergleiche die Anm. 1, S. 26.

Diese Gleichungen sind im Bild 11 dargestellt. Man sieht, daß um so stärkere Dämpfungen erwünscht sind, mit je größeren Wendefeldfehlern an der Funkengrenze zu rechnen ist.

Unterhalb des günstigsten Dämpfungsgrades steigt die Leistungsdichte an der ablaufenden Bürstenkante sehr schnell (Bild 10). Mit Bürsten sehr kleinen Übergangswiderstandes läßt sich daher eine einwandfreie Stromwendung nur erzielen, wenn die bezogene Selbstinduktionsleistung klein ist.

Oberhalb des günstigsten Dämpfungsgrades wird die Leistungsdichte an der ablaufenden Kante nur langsam größer (Bild 10). Man braucht daher von einem Erhöhen des Übergangswiderstandes kaum je einen schädlichen Einfluß zu befürchten, wenn schon ein Nutzen nur solange zu erwarten ist, wie man unterhalb des günstigsten Dämpfungsgrades bleibt.

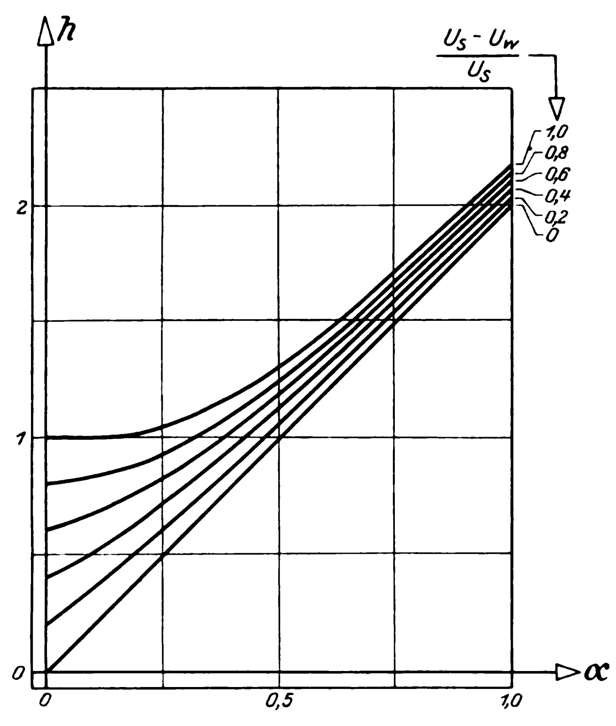


Bild 12. Die Bürstenleistung.

Zum Schluß wird noch die Frage gestreift, wie die Gesamtleistung, die an einer Bürstengruppe in Wärme umgesetzt wird:

$$N_B = \int_{-1/2\, b_B}^{+1/2\, b_B} \frac{U_B^2}{(RF)}\, l_B\, dy = \frac{\int_{-1/2}^{+1/2} U_B^2\, dz}{R_B}, \tag{54}$$

vom Wendefeld und vom Übergangswiderstand abhängt. Man berechnet mit Gleichung (45):

$$N_B = (2\,I)^2 R_B + N_s \left(\frac{U_s - U_W}{U_s}\right)^2 \left(\frac{e^{1/\alpha} + 1}{e^{1/\alpha} - 1} - 2\,\alpha\right). \tag{55}$$

Die Bürstenleistung setzt sich zusammen aus der notwendig bei der Stromabnahme erzeugten Ohmschen Wärme und einem Teil der Selbstinduktionsleistung, der dem Quadrat des bezogenen Wendefeldfehlers verhältnisgleich ist und außerdem vom Dämpfungsgrad abhängt.

Um dessen Einfluß zu übersehen, wird Gleichung (55) in die Form überführt:

$$\left.\begin{aligned} N_B &= N_s h; \\ h &= 2\alpha + \left(\frac{U_s - U_w}{U_s}\right)^2 \left(\frac{e^{1/\alpha} + 1}{e^{1/\alpha} - 1} - 2\alpha\right). \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Die Funktion h ist im Bild 12 dargestellt und zeigt, daß die Bürstenleistung bei jedem Wendefeldfehler mit dem Dämpfungsgrad steigt. Wenn man daher Bürsten hohen Übergangswiderstandes vielfach bevorzugt, so liegt der Grund lediglich in dem oben gezeigten günstigen Einfluß auf die Verteilung der Bürstenleistung. Man muß sich darüber klar sein, daß der höhere Übergangswiderstand stets eine größere Erwärmung des Stromwenders mit sich bringt.

Aus den letzten Überlegungen könnte man Gesichtspunkte für die Wahl einer dem einzelnen Fall entsprechenden Bürstensorte und Forderungen ableiten, denen Stromwenderbürsten allgemein zu genügen hätten. Damit würde eine sehr fühlbare Lücke in der Lehre von den Stromwendermaschinen geschlossen. Der Verfasser ist sich aber bewußt, daß seine letzten Gedankengänge manche Einzelheit vernachlässigen, und mißt darum weitergehenden Schlüssen nur dann Wert bei, wenn sie durch einwandfreie Versuche belegt werden können.



Untersuchungen an Transformatorenöl.

Von

Y. Toriyama, Japan, z. Zt. Aachen.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

1. Übersicht.

Der elektrische Durchschlag flüssiger Isolatoren ist physikalisch noch nicht geklärt. Es soll hier ein für die Elektrotechnik besonders wichtiger Isolator, nämlich Transformatorenöl untersucht werden.

Die bisherigen Ergebnisse bei solchen Öluntersuchungen, soweit sie sich auf die Höhe der Durchsschlagspannung beziehen, weichen recht erheblich voneinander ab. Dies ist nach dem heutigen Stand der Erkenntnis auf die Verschiedenheit der verwendeten Elektroden und auf den verschiedenen Grad der Reinigung der Ölproben zurückzuführen. F. Schröter[1] und E. Ölschläger[2] haben die Verunreinigungen durch mikroskopische Untersuchungen studiert. Wie bei diesen Autoren bezieht sich auch die vorliegende Untersuchung vorwiegend auf sorgfältig gereinigtes Öl.

Ferner liegen zahlreiche Messungen über die Leitfähigkeit von Ölen vor. Sie gelten jedoch ausschließlich für niedrige Feldstärken, die noch weit unter den Durchschlagswerten liegen. Hier sind zum ersten Male Strom und Spannung bis zum Durchschlag messend verfolgt werden. Bekanntlich haben Strom- und Spannungsmessungen bei Gasen den Schlüssel zu einer brauchbaren Durchschlagstheorie geliefert. Freilich ist die auf dieser Grundlage aufgebaute Townsendsche Theorie heute wieder ins Wanken geraten. (Vgl. Rogowski, Arch. f. Elektrot., XVI, S. 496.)

Die Temperaturabhängigkeit der Durchschlagserscheinungen ist bisher nur für den Bereich von — 10 bis + 120° C untersucht worden. In dieser Arbeit werden die Ergebnisse der Messungen in einem Intervalle von — 60 bis + 120° C mitgeteilt.

2. Die Versuchsanordnung.

a) Die Elektroden und Prüfgefäße.

Der Verfasser benutzte zwei Arten von Elektroden. Die erste Art — Plattenelektroden — sind in Bild 1 dargestellt. Dort bedeuten A, A' die beiden Platten, B ist ein Schutzring, der direkt an Erde liegt. Nur der Strom, der das homogene Feld passiert, fließt durch das Galvanometer, der übrige Teil des Stromes wird im Galvanometer nicht gemessen.

Das Galvanometer muß vor Kriechströmen über die Außenwand des Glasgefäßes (Bild 3) bewahrt werden. Zu diesem Zwecke diente ein Stanniolring C, der rund um die Glaswand gelegt war und direkt geerdet wurde. Diese Anordnung erlaubt es, die spezifische Leitfähigkeit des Öles auf einfache Weise aus Strom Spannung und Abstand zu berechnen.

Die zweite Art von Elektroden — die Kugelelektroden — gehen aus Bild 2 hervor. Die Justierschraube S (Bild 3) gestattet eine Einstellung der Elektrodenentfernung mit einer Genauigkeit von $\pm$ $^1/_{100}$ mm.

Für Temperaturen zwischen + 40 und + 105° C wurde dieses Prüfgefäß mit einem Glaszylinder umgeben, in dem ein Heizgitter im Ölbade untergebracht war

[1] F. Schröter, Reinigung und Durchschlagsfestigkeit von Transformatorenöl. Arch. f. Elektrot. Bd. 12, 1923.

[2] E. Ölschläger, Mikroskopische Beobachtung. Siemens Zeitschr. 1925, Jan., S. 29.

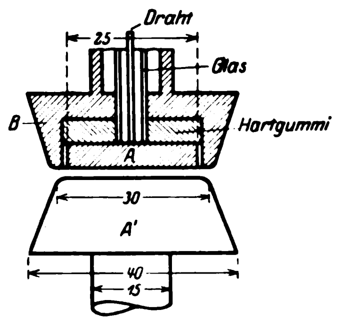


Bild 1. Plattenelektroden.

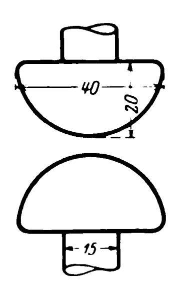


Bild 2. Kugelelektroden.

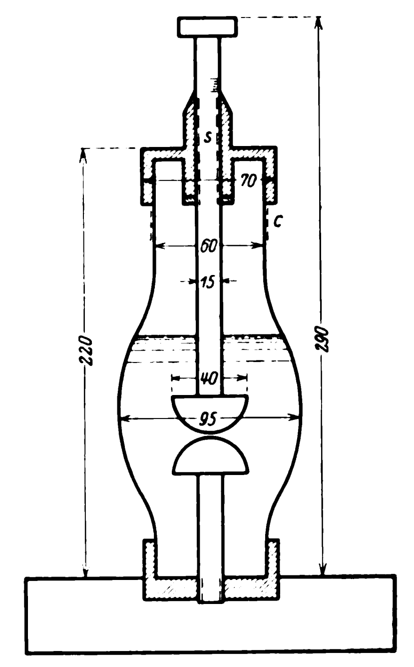


Bild 3. Prüfgefäß.

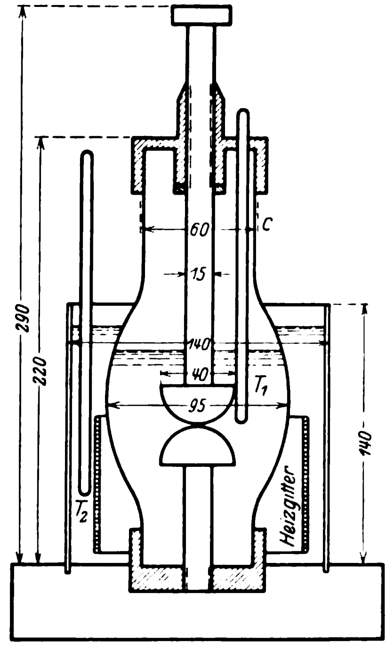


Bild 4. Prüfgefäß für hohe und tiefe Temperaturen.

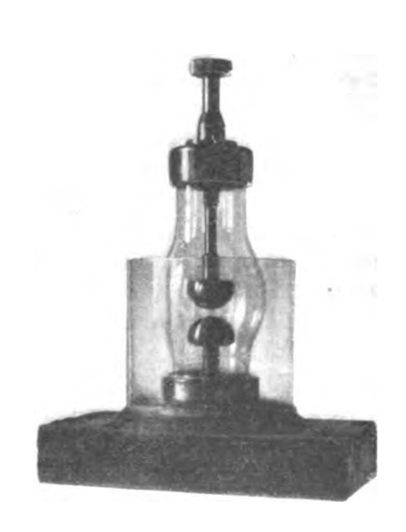


Bild 5. Prüfgefäß für hohe und tiefe Temperaturen.

(Bild 4, 5). Die Temperaturmessung geschah durch zwei Quecksilberthermometer T_1 und T_2.

Für die Temperaturen —10 und —60° C wurde das äußere Öl in Bild 4 durch eine Mischung von Eis und Kochsalz bzw. von Kohlensäureschnee und Toluol ersetzt. Das ganze Gefäß wurde dann noch mit einem einige Zentimeter dicken

Mantel aus Zellstoffwatte umgeben. Die Temperatur wurde durch Widerstandsänderung eines Kupferdrahtes gemessen.

Es ist auch versucht worden, die Festigkeit des Öles bei ganz tiefen Temperaturen zu untersuchen, als Kühlmittel war flüssige Luft vorgesehen. Es zeigte sich jedoch, daß das bei -40^0 C schon erstarrende Öl sich bei weiterer Abkühlung noch so stark zusammenzog, daß es viele Sprünge bekam, also keinen homogenen Körper mehr darstellt. Es sieht dann aus wie gesprungener Bernstein. Da es aussichtslos erschien, eine Anordnung anzugeben, bei der das Öl die nötige Bewegungsfreiheit hat und doch fugenlos an den Elektroden anliegt, wurden diese Versuche aufgegeben.

b) Gleichspannung.

Die Gleichspannung wurde von einem Kondensator geliefert, der durch pulsierenden Gleichstrom über zwei Glühventile aufgeladen wurde (Bild 6). Dort bedeuten R_1 und R_2 die Ventile, T den Transformator, C eine Kapazität von 0,0007 μF, A, A′ die Elektroden mit dem geerdeten Schutzring B, V ein Voltmeter, dessen Ausschlag ein Maß für die Prüfspannung gibt. Die Induktivität L, die Funkenstrecke F und der Kondensator C_0 dienen zum Schutze des Galvanometers G. Wenn

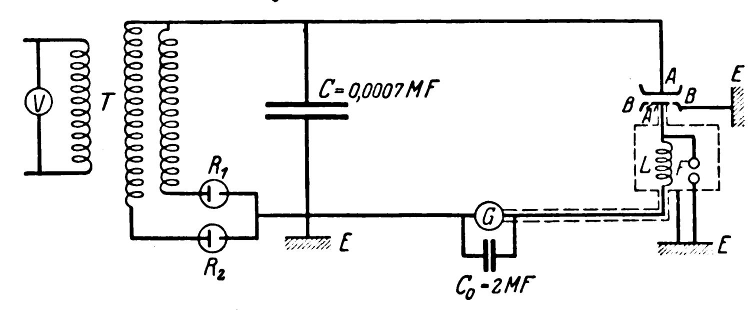


Bild 6. Schaltbild für Gleichspannung.

die Ölprobe durchschlagen wird, kommt plötzlich ein beträchtlicher Teil der Kondensatorspannung an die Funkenstrecke F zu liegen, die augenblicklich zündet. Die Induktivität L verhindert ein zu starkes Anwachsen des Stromes im Galvanometerzweig. Die dort noch fließende kleine Elektrizitätsmenge wird überdies teilweise noch vom Kondensator C_0 aufgenommen und langsam über das Galvanometer entladen. Um Fehlerströme vom Galvanometer fernzuhalten, wurde für die Zuleitung zum Galvanometer eisenarmiertes Kabel verwendet, das außerdem noch mit Stanniolpapier umwickelt war. Diese Eisen- und Stanniolhülle wurde geerdet. Diese Maßregel erwies sich als unbedingt notwendig, denn in der Nähe der Hochspannungszuleitung entstand bei höheren Spannungen lebhafte Ionisation. Die Ionisierungsströme wanderten auf die geerdeten Galvanometerleitung und fälschten das Meßergebnis. Die geerdete Armierung ist in Bild 6 durch punktierte Linien angedeutet. Auch die Selbstinduktion L und die Schutzfunkenstrecke F befinden sich innerhalb der geerdeten Hülle. Daß diese Anordnung genügt, um alle Fehlerströme (bezüglich der Kriechströme auf der Außenwand des Prüfgefäßes vgl. S. 31) zu vermeiden, kann man dadurch beweisen, daß man das Gefäß vor Einfüllen des Öles unter Spannung setzt. Das Galvanometer darf nicht ausschlagen, wenn die Anordnung einwandfrei ist. Den Abstand der später im Öl befindlichen Elektroden hat man dabei natürlich so groß zu wählen, daß bei den in Betracht kommenden Spannungen die Luft zwischen ihnen nicht ionisiert wird.

Die Spannung am Kondensator bzw. am Prüfgefäß konnte auf zwei Arten bestimmt werden, da die Daten des Transformators durch Messungen von H. Rengier (Dissertation) genau bekannt waren[1].

[1] Rengier, Arch. f. Elektrot. XVI, S. 139.



1. Es wurde ein Oszillogramm des Generators aufgenommen, das eine fast rein sinusförmige Kurvenform ohne jede Spitzen ergab und hieraus das Übersetzungsverhältnis der Generatorspannung zur Gleichstrom-Hochspannung errechnet.

2. Die Spannung wurde direkt mit einer von H. Rengier geeichten Präzisionsfunkenstrecke gemessen. Beide Methoden ergaben Werte, die bis auf 0,5% übereinstimmen. Da der Kondensator 100 mal in der Sekunde aufgeladen wird, so könnte er sich zwischendurch wieder teilweise entladen. Seine Spannung würde also um einen gewissen Mittelwert schwanken, den ein elektrostatisches Voltmeter angibt. Schaltet man eine Röhre ab, so hat der Kondensator viel länger Zeit, sich zu entladen. Der Mittelwert müßte also bedeutend tiefer liegen, falls die Entladung überhaupt merklich ist. Der Versuch wurde bei 7000 Volt gemacht, und es zeigte sich, daß die Ausschläge, ob man eine oder beide Röhren heizt, genau gleich sind. Demnach können die Schwankungen in der Gleichspannung nur geiing sein.

c) Wechselspannung.

Die Schaltung für die Prüfung mit Wechselspannung ist sehr einfach. Die Elektroden liegen direkt an den Klemmen des Transformators (vgl. Bild 7). Der Scheitelwert der Wechselspannung wurde wieder mit der Rengierschen Funkenstrecke gemessen[1]. Im Primärkreis des Transformators liegt eine Schmelzsicherung S, die im Augenblick des Durchschlags den Transformator abschalten soll. Um die Trägheit dieser Sicherung zu vermindern, wurde der Sicherungsdraht durch eine Feder so vorgespannt, daß er viel schneller zerriß als ohne mechanische Vorspannung.

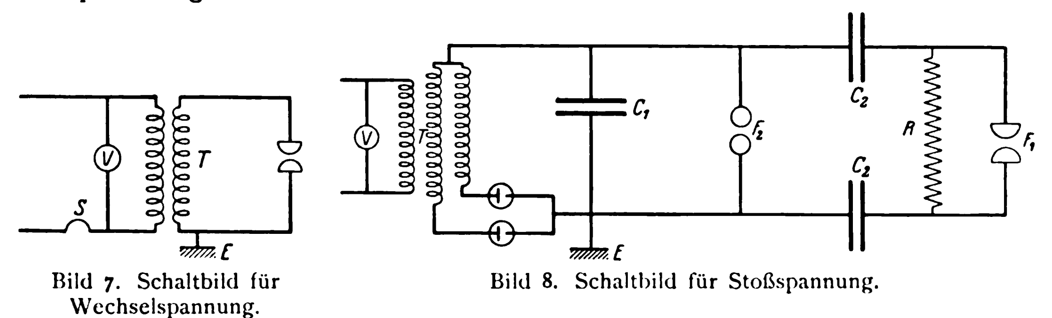


Bild 7. Schaltbild für Wechselspannung.

Bild 8. Schaltbild für Stoßspannung.

d) Stoßspannung.

Die Anordnung zur Erzeugung der Stoßspannungen ist aus Bild 8 zu ersehen. Dort bedeutet T den Transformator, der auch bei allen anderen Messungen benutzt wurde, C_1 einen Kondensator von 0,00718 μF, C_2 Kondensatoren, deren Größe zwischen 0,00007 und 0,005 μF verändert wurde, R einen Widerstand, der zwischen 10000 und 640000 Ohm auf die in folgender Tabelle eingetragenen Werte eingestellt werden kann. Die zu jeder Widerstandsstufe gehörigen Werte der Selbstinduktion

Stufe	1	2	3
R	10000 Ohm	20000 Ohm	640000 Ohm
L	4,83 m. H.	9,66 m. H.	2060 m. H.

sind mitangegeben. F_1 ist die Ölprobe mit den Elektroden, die nach jedem Durch-

[1] Rengier, Arch. f. Elektrot. Bd. XVI, S. 139.

schlag gegen die Rengiersche geeichte Funkenstrecke (Durchmesser der Elektroden etwa 7 cm) ausgewechselt wurde. F_2 ist eine Funkenstrecke mit Plattenelektroden. Das Öl in F_1 wird einer Stoßspannung ausgesetzt, wenn die Funkenstrecke F_2 durchbricht. Zur Bestimmung des Höchstwertes der Spannung kann man zwei verschiedene Wege gehen:

1. Aus der Primärspannung des Transformators und den Konstanten R, L, C des Stoß-Spannungskreises wird der Verlauf der Spannung am Prüfgefäß berechnet, unter der Voraussetzung, daß sich der Vorgang quasistationär abspielt.

2. Man ersetzt das Öl nach dem Durchschlag durch eine geeichte Funkenstrecke, deren Abstand man so groß einstellt, daß sie beim Zünden der Strecke F_2, also beim Ablauf der Stoßspannung, gerade noch durchbricht. Aus dieser Entfernung und der statischen Eichkurve der Funkenstrecke findet man den Höchtwert der Stoßspannung. Die in den Kurven Bild 25 und 26 eingetragenen Höchstwerte der Stoßspannungen sind nach dem zweiten Verfahren ermittelt. Allerdings sind die so gefundenen Spannungen etwa 20 – 30% größer als die aus der Primärspannung berechneten Werte. Diese Unstimmigkeit ist auch von Marx[1] beobachtet worden; man muß infolgedessen wohl zu dem Schlusse kommen, daß eine exakte Stoßspannungsprüfung nur bei gleichzeitiger Aufnahme der Kurvenform mit einem Kathodenoscillographen möglich ist.

e) Die Ölproben.

Die Untersuchung erstreckte sich auf drei Arten von Öl, über die Näheres in folgender Tabelle angegeben ist.

	Öl A	Öl B	Öl C
Viscosität in Engler-Graden bei 20° C	5,45	4,50	5,40
Farbe	orange	hellgelb	dunkelrot
Herkunft	unbekannt	Rußland	U. S. A.
Kosten	unbekannt	0,48 M. pro l	0,35 M. pro l

f) Die Reinigung des Öles.

Als die im Reinigungsprozeß zu entfernenden Bestandteile kommen erstens Fasern und andere Arten von Fremdkörpern, zweitens Feuchtigkeit in Betracht.

Zur Entfernung der Fasern und Fremdkörper wurden zunächst gewöhnliche Papierfilter benutzt. Nach 5—6maligem Filtrieren konnten immer noch ziemlich grobe Fasern beobachtet werden, die vielleicht vom Filter selbst herrührten. Diese Fasern kann man zwischen den unter Spannung stehenden Elektroden mit unbewaffnetem Auge leicht erkennen, wenn man das Öl intensiv seitlich beleuchtet.

Ferner wurden Jenaer Glasfilter (1 G 3/< 7) benutzt und als sehr brauchbar für die Reinigung des Öles befunden. Nach 4—5 maliger Filtrierung ist das Öl von allen groben Fasern vollständig frei. Kleine Fasern lassen sich jedoch durch keine Filtrierung entfernen. Sie sind für das unbewaffnete Auge bei intensiver Beleuchtung von der Seite gerade an der Grenze der Sichtbarkeit.

[1] Marx, Messung der Steilheit von Wanderwellen ETZ, 1924, 41.

Manchmal konnte man sehr kleine Teilchen sehen, die bei Gleichspannung zwischen den Elektroden hin- und herwanderten.

Es wurden auch Porzellanfilter der Porzellanfabrik Rosenthal & Co., München, und der Staatlichen Porzellanmanufaktur, Charlottenburg, verwendet. Das damit gereinigte Öl zeigte keine anderen Eigenschaften als das mit Glasfilter gereinigte. Die Filtriereinrichtung ist in Bild 9 wiedergegeben.

Zur Entfernung des Feuchtigkeitsgehaltes wurde das Öl während zweier Stunden auf einer Temperatur von + 110° C gehalten. Alles Wasser kann danach wohl als beseitigt gelten.

Bei der Filtrierung, beim Umfüllen des gereinigten Öles aus der Filtrierflasche in das Prüfgefäß und bei der Reinigung des Prüfgefäßes selbst wurde stets auf peinlichste Sauberkeit geachtet. Alle Ölbehälter wurden nie länger als unbedingt nötig unverschlossen gehalten. Die Elektroden wurden vor Einfüllen des Öles stets mit glasgefiltertem Öl abgespült.



Bild 9. Filtriereinrichtung.

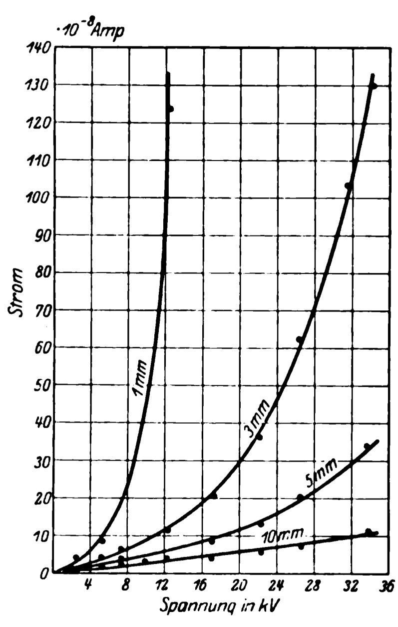


Bild 10. Stromspannungskurven bei papiergefiltertem Öl.

3. Die Meßergebnisse.

a) Stromspannungskurven bei Gleichspannung.

1. Plattenelektroden.

Stromspannungskurven für verschiedene Abstände bei papiergefiltertem Öl (Bild 10).

Öl	C,
Reinigung	Papierfilter 3 mal,
Elektroden	Platten,
Abstände	1 bis 5 mm.

Auf den steilen fast senkrechten Teilen dieser und der auf den folgenden Seiten beschriebenen Kurven macht sich eine Erscheinung bemerkbar, die der Verfasser mit Unstabilität bezeichnen möchte. Immer, wenn die Stromspannungskurven eine gewisse Steilheit erreicht haben $\left(\frac{dJ}{dE} \geqq c\right)$, braucht man die Spannung nicht mehr weiter zu steigern, um eine weitere Stromzunahme und schließlich den Durchschlag



herbeizuführen. Der Beginn dieses unstabilen Bereiches ist nicht sehr scharf ausgeprägt. Er liegt jedoch bei 1 und 3 mm ungefähr bei derselben Feldstärke. Für größere Abstände als 3 mm reicht die Transformatorspannung nicht aus, um bis ins unstabile Gebiet zu gelangen.

Charakteristische Leitfähigkeitskurven (Bild 11) (berechnet aus Bild 10).

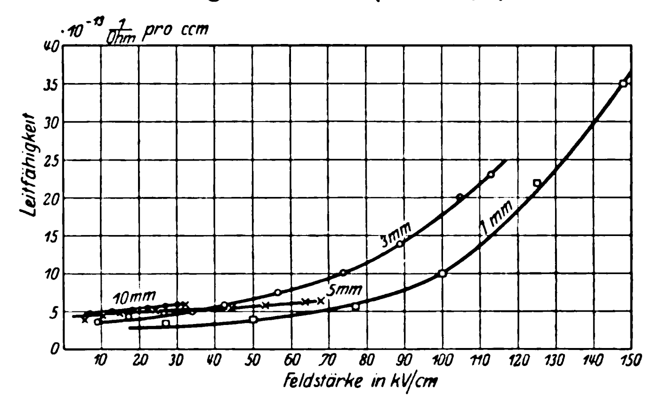


Bild 11. Leitfähigkeit-Feldstärkekurven (berechnet aus Bild 10).

Die verwendete Methode der Leitfähigkeitsberechnung ist bei größeren Plattenabständen als 3 mm nicht mehr einwandfrei, da das Feld zwischen den Platten dann nicht mehr völlig homogen ist. Daher zeigen die Kurven bei 5 und 10 mm nicht genau denselben Charakter wie diejenigen von 1 und 3 mm.

Stromspannungskurven für verschiedene Plattenabstände bei porzellangefiltertem Öl (Bild 12).

Öl	C,
Reinigung	Porzellanfilter 3 mal,
Elektroden	Platten,
Abstände	1 bis 5 mm.

Der Charakter dieser Kurven ist genau derselbe wie bei nur mit Papierfilter gereinigtem Öle, jedoch werden dieselben Stromwerte erst bei größerer Spannung erreicht (auch die Durchschlagsspannung liegt höher). Ebenso ist Unstabilität qualitativ genau so vorhanden, ihr Beginn liegt jedoch jetzt bei etwas höherer Feldstärke als in Bild 10.

Die Stromspannungskurven für steigende und fallende Spannung decken einander vollständig, das kann man vielleicht als Zeichen dafür ansehen, daß es sich bei den Stromspannungskurven des untersuchten Bereiches nicht um Erwärmungserscheinungen handelt.

Man darf also wohl annehmen, daß der Unterschied gegenüber den Kurven 10 (Papierfilter) mit dem höheren Reinigungsgrad erklärt werden muß.

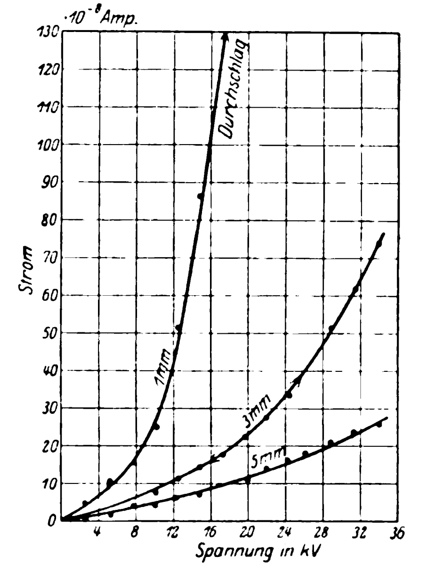


Bild 12. Stromspannungskurven bei porzellangefiltertem Öl C.

Stromspannungskurven bei einem anderen Öle (Bild 13),

Öl	B,
Reinigung	Porzellanfilter 3 mal,
Elektroden	Platten,
Abstände	1 bis 3 mm.

Auch diese Kurven ähneln denen von Bild 12. Bei denselben Spannungen ist der Strom jedoch etwa zehnmal kleiner. Unstabile Bereiche werden auch hier beobachtet, der Durchschlag erfolgt jedoch, wie vorweggenommen werden soll, bei etwa derselben Spannung wie bei der anderen Ölsorte.

2. Kugelelektroden.

Stromspannungskurven bei verschiedenen Abständen (Bild 14).

Öl	C,
Reinigung	Porzellanfilter 3 mal,
Elektroden	Kugeln,
Abstände	0,5 bis 3 mm.

Die Kurven sind nicht von grundsätzlich anderer Art als bei Platten, die Unstabilität ist auch hier zu beobachten.

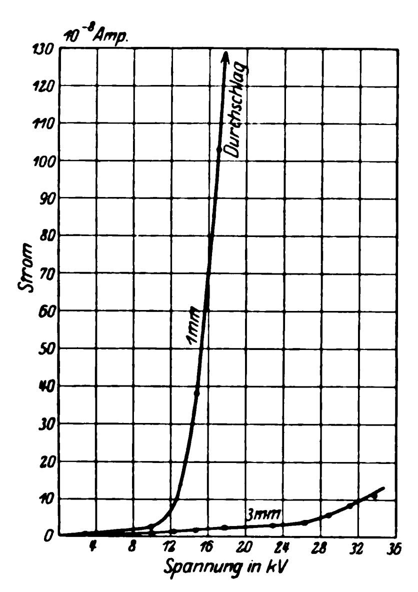


Bild 13. Stromspannungskurven bei porzellangefiltertem Öl B.

Bild 14. Stromspannungskurven bei Kugelelektroden, Öl C.

Stromspannungskurven bei einer anderen Ölsorte (Bild 15).

Öl	B,
Reinigung	Porzellanfilter 3 mal,
Elektroden	Kugeln,
Abstände	0,5 bis 3 mm.

Die Kurven entsprechen denen des Bildes 13.

Stromspannungskurven bei verschiedenen Elektrodenformen (Bild 16).

Öl	B,
Reinigung	Porzellanfilter 3 mal,
Elektroden	Platten und Kugeln,
Abstand	1 mm.

Der starke Stromanstieg ist beiden Elektrodenformen gemeinsam. Er liegt jedoch für Platten bei niedrigerer Spannung. Bei Öl C liegen die Verhältnisse ähnlich.



Über die Genauigkeit bei allen Stromspannungskurven kann folgendes gesagt werden: In völlig stabilen Bereichen ist die Genauigkeit sehr hoch. Sie beträgt dort etwa $\pm 2\%$. In der Nähe des Beginns unstabiler Bereiche läßt sie bedeutend nach und beträgt nur noch etwa $\pm 15\%$. Die Durchschlagsspannungen streuen wieder weniger, wie wir später sehen werden.

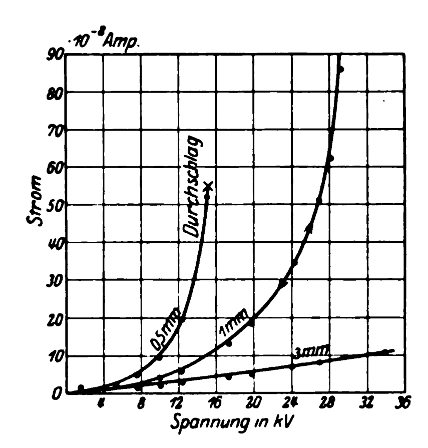


Bild 15. Stromspannungskurven bei Kugelelektroden, Öl B.

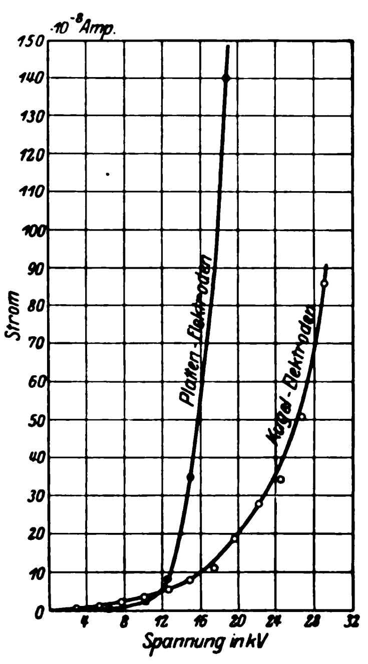


Bild 16. Stromspannungskurven bei verschiedenen Elektrodenformen.

b) Einfluß verschieden schneller Spannungssteigerung auf die Strom-Spannungskurve und die Durchschlagspannung.

Typische Strom-Spannungskurven bei verschiedenen Geschwindigkeiten.



Öl A (Bild 17a),
B (Bild 17b),
C (Bild 17c),

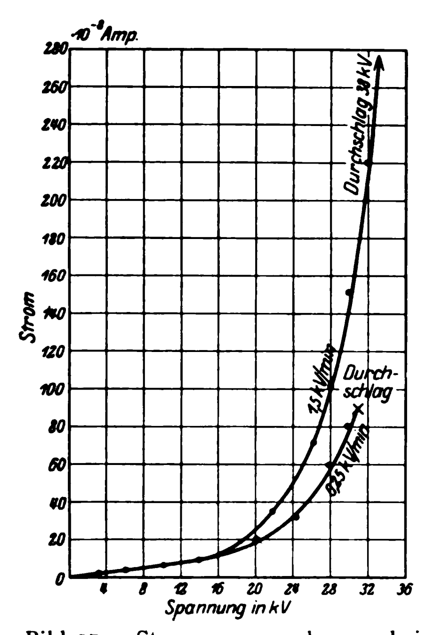


Bild 17a. Stromspannungskurven bei verschieden schneller Spannungssteigerung, Öl A.

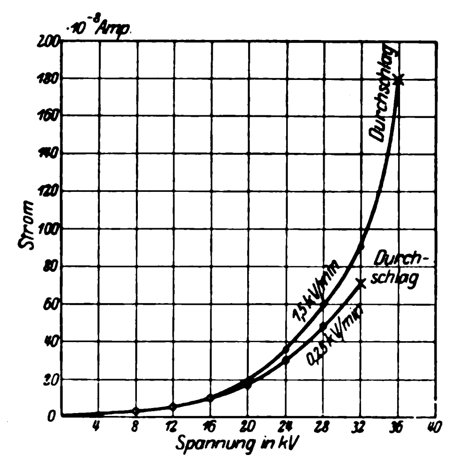


Bild 17b. Stromspannungskurven bei verschieden schneller Spannungssteigerung, Öl B.

Reinigung	a) Glasfilter 5 mal,
"	b), c) Porzellanfilter 5 mal,
Elektroden	Kugeln,
Geschwindigkeit	0,25 und 1,5 kV/min.

Alle drei Kurven zeigen das allgemein gültige Ergebnis, daß bei langsamer Spannungssteigerung der Durchbruch bei kleinerem Strome und bei kleinerer Spannung erfolgt als bei schneller.

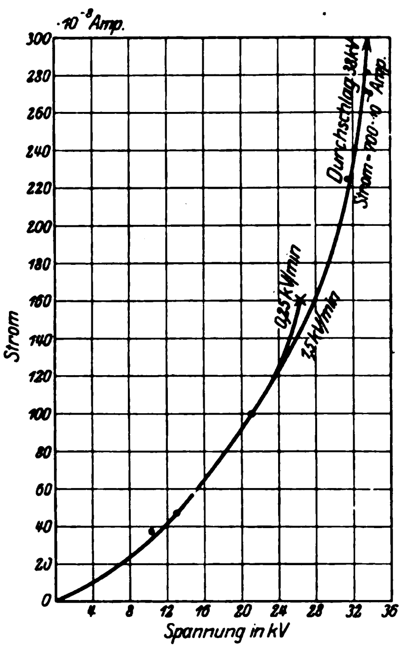


Bild 17c. Stromspannungskurven bei verschieden schneller Spannungssteigerung, Öl C.

Im übrigen könnte aus diesen Kurven höchstens noch herausgelesen werden, daß dem Öle größerer Durchbruchsleitfähigkeit auch bei niedrigen Spannungen die größere Leitfähigkeit eigen ist.

Die Durchschlagspannung ist bei allen drei Ölen für gleiche Geschwindigkeiten dieselbe.

Die Stromspannungskurven können nicht mit höheren Geschwindigkeiten als 1,5 kV/min aufgenommen werden, da die Galvanometer zu träge sind. Wenn man sich aber darauf beschränkt, nur die Durchschlagspannung zu messen, kann man mit Geschwindigkeiten bis zu 50 kV/min arbeiten. Dies ist bei den folgenden Versuchen geschehen.

Über die Streuung dieser Messungen gilt: Die Stromspannungskurven wurden bei A 3 mal, bei B und C je 2 mal gemessen. Nach jedem Durchlaufen der Strom-Spannungskurve wurde das Öl erneuert. Die Streuung war ebenso groß als bei den anderen Strom-Spannungskurven (vgl. S. 39).

Abhängigkeit der Durchbruchsspannung von der Geschwindigkeit.

Öl A (Bild 18a),
B (Bild 18b),
C (Bild 18c),

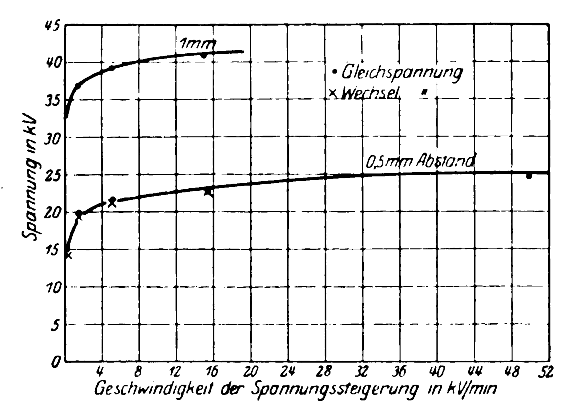


Bild 18a. Durchbruchsspannung bei verschieden schneller Spannungssteigerung, Öl A.

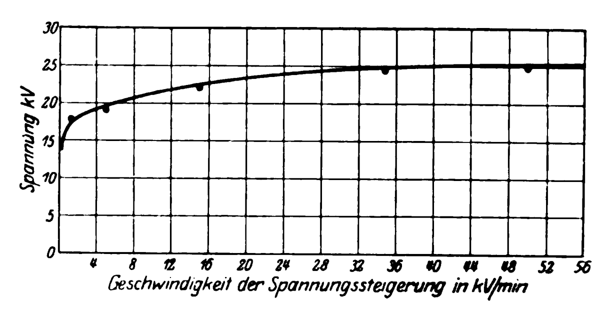


Bild 18b. Durchbruchsspannung bei verschieden schneller Spannungssteigerung, Öl B.



Art der Beanspruchung	A Gleich- und Wechselspannung, B Wechselspannung, C Wechselspannung,
Reinigung	Glasfilter 5 mal oder Porzellanfilter 5 mal,
Abstände	0,5 und 1 mm,
Elektroden	Kugeln.

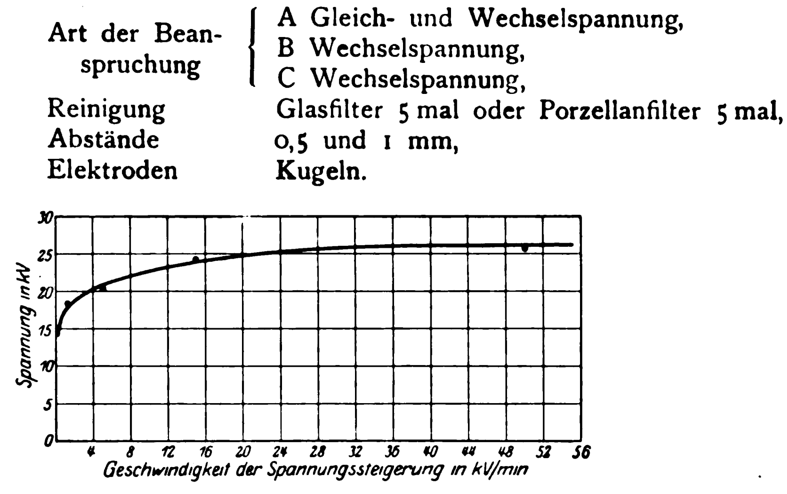


Bild 18c. Durchbruchsspannung bei verschieden schneller Spannungsgliederung, Öl C.

Die Kurven der drei Ölsorten unterscheiden sich dem Charakter nach überhaupt nicht. Auch ob der Durchschlag durch Gleich- oder Wechselspannung hervorgerufen war, machte bei Öl A keinen Unterschied. Die anderen zwei Sorten wurden deshalb nur bei Wechselspannung geprüft.

Alle Punkte wurden je 6 bis 10mal gemessen, bei Gleichspannung wurde das Öl jedesmal erneuert, da der Durchschlag starke Verkohlung herbeiführt, wobei sich eine deutlich sichtbare kleine Rauchwolke zwischen den Elektroden bildet. Die Glühventile wirken nämlich nach Eintritt des Durchschlags strombegrenzend, deshalb schaltet eine Schmelzsicherung im Primärkreis den Transformator nicht zuverlässig ab; er mußte oft von Hand abgeschaltet werden. Der verhältnismäßig lang andauernde Strom verbrennt das Öl. Bei Wechselspannung spricht die Sicherung sofort an, da sich sekundär kein Strombegrenzer befindet. Es tritt keine sichtbare Verkohlung ein. Deshalb konnte dieselbe Ölprobe für 3 bis 4 Durchschlagsmessungen benutzt werden. Die Streuung betrug etwa 12 %.

c) Beziehung zwischen Durchschlagspannung und Schlagweite.

Durchschlagspannung und Schlagweite bei Kugelelektroden.

Öl	A (Bild 19a und 19b), B (Bild 20a und 20b), C (Bild 21a),

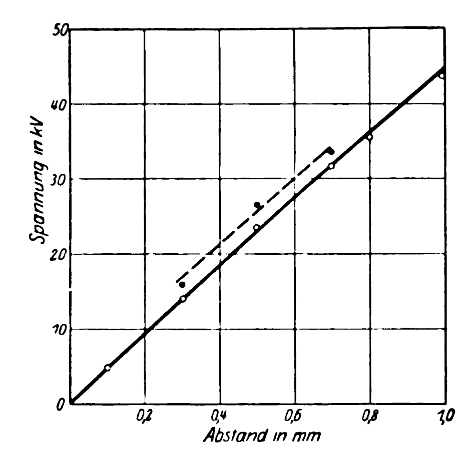


Bild 19a. Durchschlagspannung und Schlagweite bei Gleichspannung, Öl A.

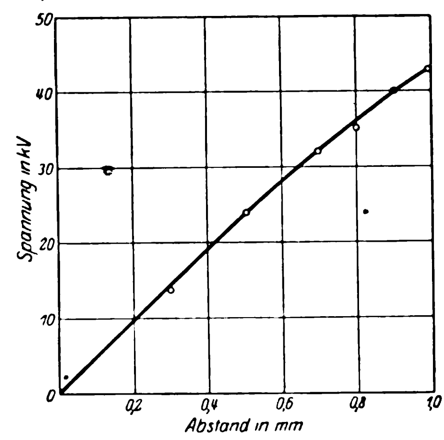


Bild 19b. Durchschlagspannung und Schlagweite bei Wechselspannung, Öl A.

Art der Beanspruchung	A Wechsel- und Gleichspannung,
	B " " "
	C Wechselspannung,
Elektroden	Kugeln,
Reinigung	Glasfilter 5 mal oder Porzellanfilter 5 mal.

In allen fünf Figuren ist der Punkt 0,5 mm je 10 mal gemessen worden, bei Öl C wurde außerdem der Punkt 0,5 mm mit Gleichstrom untersucht und in die Wechselspannungskurve Bild 21 a eingetragen. Die Ablesungen wichen etwa voneinander ab, bei A um ± 12 %, bei B um ± 10 %, bei C um ± 15 %

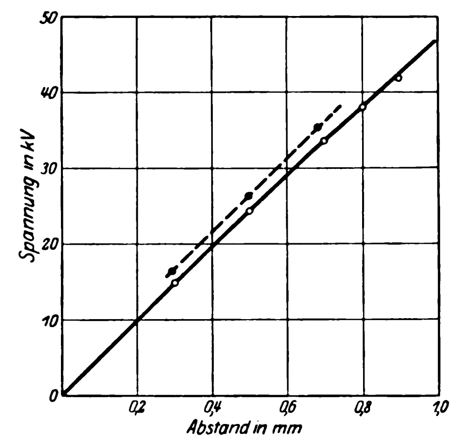


Bild 20 a. Durchschlagspannung und Schlagweite bei Gleichspannung, Öl B.

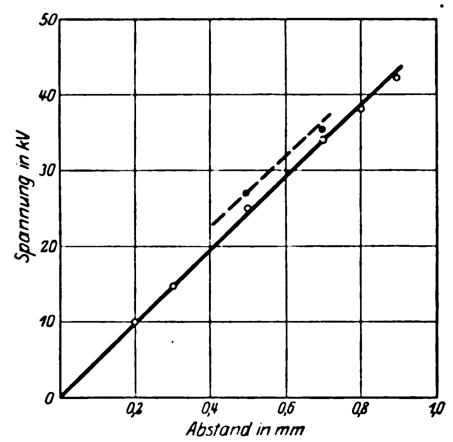


Bild 20 b. Durchschlagspannung und Schlagweite bei Wechselspannung, Öl B.

Unterschiede der fünf Kurven gegeneinander sind nicht mit Sicherheit festzustellen. Insbesondere unterscheidet sich Gleich- und 50-periodige Wechselspannung nicht.

Auf den vier Kurven 19a, 20a, 20b und 21a sind die höchsten erhaltenen Werte durch eine punktierte Linie miteinander verbunden. Diese Maximalwerte sind mit größerer Genauigkeit einander gleich als die Mittelwerte. Man kann wohl vermuten, daß bei diesen Ölproben die Reinigung besonders gut gelungen war.

Alle Kurven gelten für eine Geschwindigkeit von 50 kV/min.

Durchschlagspannung und Schlagweite bei Plattenelektroden (Bild 21 b).

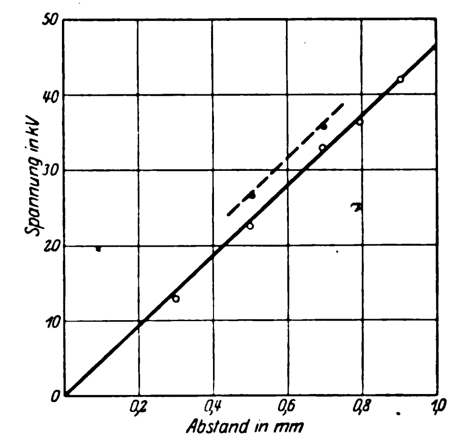


Bild 21 a. Durchschlagspannung und Schlagweite für Wechselspannung, Öl C.

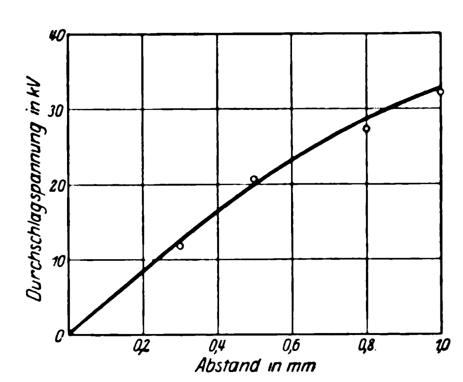


Bild 21 b. Durchschlagspannung und Schlagweite bei Plattenelektroden.

Öl	B,
Art der Beanspruchung	Wechselspannung,
Reinigung	Porzellanfilter 5 mal,
Elektroden	Platten.

Danach scheint bei Kugel- und Plattenelektroden und bei sorgfältigster Reinigung des Öles der Durchbruch fast unabhängig zu sein:

1. Von der Art des Öles, nämlich von seiner Viskosität und seiner Leitfähigkeit.
2. Von der Feldstärke, aber nur innerhalb des allerdings recht kleinen Bereiches von 0,3—1 mm.
3. Davon, ob mit Gleich- oder mit 50-periodiger Wechselspannung geprüft wird.

d) Einfluß des Reinigungsgrades auf die elektrischen Eigenschaften des Öles.

Wie schon im Kapitel I kurz gesagt, ändern sich die elektrischen Eigenschaften des Öles mit fortschreitender Reinigung außerordentlich stark.

Zunächst kann man das an Stromspannungskurven deutlich sehen:

Stromspannungskurven bei verschieden guter Reinigung (Bild 22).

Öl	A,
Reinigung	Parameter der Kurven
Elektroden	Kugeln
Abstand	1 mm.

An überhaupt nicht gereinigtem Öl können Stromspannungskurven nicht aufgenommen werden, da die Stromstärke bei fester Spannung außerordentlich stark schwankt.

Der Gang der Reinigung war folgender:

1. Zweimaliges Durchtreiben durch Papierfilter. Die eben beschriebene Eigenschaft des nicht gereinigten Öls hindert auch jetzt noch die Aufnahme von Stromspannungskurven. Jedoch konnte die Leitfähigkeit wenigstens der Größenordnung nach bestimmt werden.
2. Kochen bei 110° C während 3 Stunden. Mit dem so behandelten Öl konnte die Kurve I aufgenommen werden.
3. Eine noch 3 mal wiederholte Reinigung mit Papierfilter ergab keine Änderung der Stromspannungskurve (Kurve II).

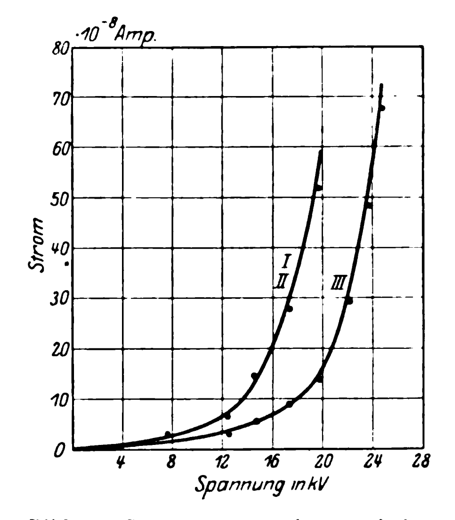


Bild 22. Stromspannungskurven bei verschiedenem Reinigungsgrad.
I Papierfilter 2 mal und gekocht,
II „ 5 mal „ „
III „ 2 mal „ „
und 2 mal Porzellanfilter.

4. Läßt man das Öl jedoch außer den schon beschriebenen Reinigungsprozessen noch eine Glasfiltrierung (2 mal) durchmachen, so ist eine deutliche Veränderung in der Stromspannungskurve zu bemerken (Kurve III).

Der Einfluß der Reinigung auf die Durchschlagsfestigkeit geht aus folgender Tabelle hervor, in der auch die Leitfähigkeiten bei verschiedenen Feldstärken noch einmal zusammengestellt sind.

Reinigung	Leitfähigkeit in $10^{-13} \frac{1}{\text{Ohm}}$ pro cm³				Durchschlagsfeldstärke kV/cm
	30 kV/cm	100 kV/cm	150 kV/cm	200 kV/cm	
1. keine	27 000	—	—	—	—
2. Papierfilter 2 mal	525	—	—	—	90
3. wie 2. und 3 Std. gekocht	0,7	1,1	2,8	8	320
4. wie 3. und Papierfilter 3 mal	0,7	1,1	2,8	8	320
5. wie 4. u. 2 mal Porzellanfilter	0,7	0,7	1	2,5	468

Es fällt sofort auf, daß der Wassergehalt die Leitfähigkeit in ganz außerordentlich weiten Grenzen verändert, während die Durchschlagsfestigkeit nicht entfernt in dem Maße beeinflußt wird.

e) Einfluß der Temperatur auf die Durchbruchsspannung und die Leitfähigkeit.

Die zwei Thermometer (eines im zu prüfenden Öl und eines im Ölmantel, der das Heizgitter enthält, vgl. Bild 4) gestatten einen zuverlässigen Schluß auf die Temperatur unmittelbar zwischen den Elektroden. Durch geeignete Regulierung des Heizstromes und durch Umrühren des inneren Öles kann man erreichen, daß beide Thermometer gleich anzeigen. Man ist dann sicher, daß das in der Strombahn befindliche Öl auch die an den Thermometern abgelesene Temperatur besitzt.

Durchbruchfeldstärke abhängig von der Temperatur (Bild 23).

Öl	A,
Reinigung	Glasfilter 5 mal,
Abstand	0,5 mm,
Elektroden	Kugeln,
Beanspruchung	Wechselspannung.

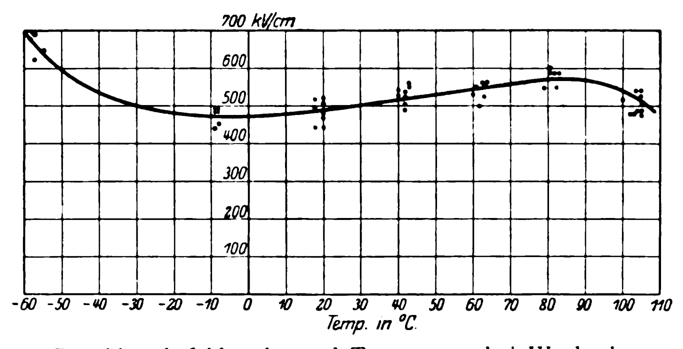


Bild 23. Durchbruchsfeldstärke und Temperatur bei Wechselspannung.

Bei — 20 bis — 30° C wird das Öl sehr dickflüssig, bei noch tieferen Temperaturen erstarrt es. Die größte Durchbruchspannung des flüssigen Öles liegt bei etwa + 80° C, das feste Öl ist elektrisch um so fester, je kälter es ist.



Die Streuung ist auf dem Kurvenblatt zu ersehen, wo sämtliche Messungen einzeln eingetragen sind.

Leitfähigkeit abhängig von der Temperatur (Bild 24).

Öl	A,
Reinigung	Glasfilter 5 mal,
Abstand	1 mm,
Elektroden	Kugeln,
Beanspruchung	Gleichspannung,
Feldstärke	26 kV/cm.

Die Leitfähigkeit steigt mit zunehmender Temperatur stark an, die Feldstärke ist dabei recht klein, etwa $^1/_{20}$ des Durchschlagswertes.

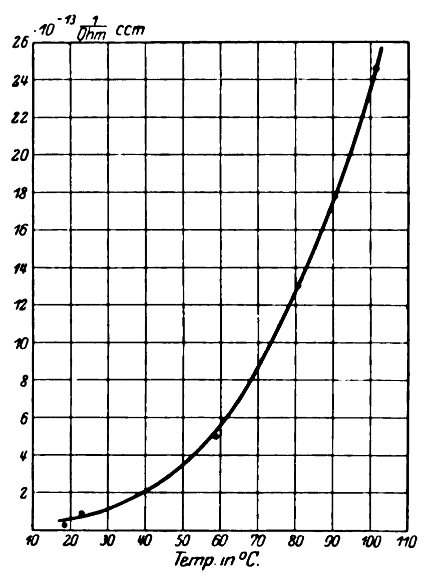


Bild 24. Leitfähigkeit und Temperatur bei Gleichspannung.

f) Prüfung mit Stoßspannung.

Das Schaltbild für die Stoßspannungen ist in Bild 8 gezeigt. Unter „Beanspruchungsdauer" ist im folgenden Bild 25 diejenige Zeitspanne verstanden, innerhalb deren die Spannung um nicht mehr als 1 % von ihrem Höchstwert verschieden ist. Diese verschiedenen Zeiten würden durch Änderung von R, L und C_2 eingestellt.

Abhängigkeit der Stoßspannungsfestigkeit von der Beanspruchungsdauer (Bild 25).

Öl	A,
Reinigung	Porzellanfilter 5 mal,
Elektroden	Kugeln,
Abstand	0,2 mm.

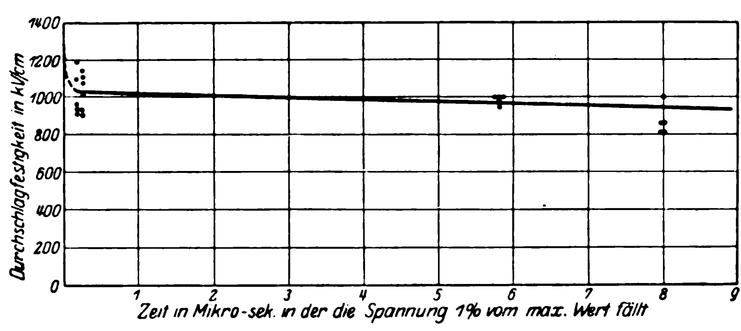


Bild 25. Stoßspannungsfestigkeit und Beanspruchungsdauer.

Diese Kurve zeigt, daß in dem untersuchten Bereich keine Funkenverzögerung auftritt, sie scheint erst bei bedeutend kürzeren Beanspruchungszeiten eine Rolle zu spielen. Man hat also wohl zu erwarten, daß für äußerst kurze Zeiten der punktiert gezeichnete Verlauf besteht.

Der Temperaturanstieg im Öl kann ungefähr berechnet werden. Der Energieverbrauch während des Spannungsanstieges ist sicherlich kleiner als

$$W_t = V_s^2 \frac{t_1}{r_{min}} = s \cdot T \cdot v.$$

Es bedeuten:

V_s den Höchstwert der Stoßspannung $= 2 \cdot 10^4$ V,
t_1 die Beanspruchungsdauer,
s die spezifische Wärme des Öles $= 0,4$ cal/^{0}C,
T Temperatur in ^{0} C,
v das Volumen der geheizten Ölstrecke.

r_{min} ist der Widerstand des Öles. Bezüglich des Zahlenwertes, den man hier einzusetzen hat, kann man nur sehr ungenaue Angaben machen. Setzt man den kleinen Widerstand ein, der bei Gleichstrom gemessen wurde, so erhält man eine Temperatur von 10^{-8} Grad C im Spannungsmaximum. Man sieht sofort, daß selbst 100- oder 1000fache Fehler in der Schätzung von r_{min} an dem Ergebnis qualitativ nichts ändern. So geringe Temperaturerhöhungen können für die Durchschlagsfestigkeit nicht von Einfluß sein. Es kann also wohl als erwiesen gelten, daß der Durchschlag bei Stoßspannung keinesfalls thermischer Natur ist.

Es mag bei Betrachtung dieser Ergebnisse merkwürdig erscheinen, daß man auch nach einmaligem Stoßspannungs-Durchschlag eine Verkohlung des Öles beobachten kann. Sie sieht ebenso aus, wie die bei Wechselstrom beobachtete. Dies findet seine Erklärung in folgendem: Nachdem die Stoßspannung gezündet hat, entlädt sich die ganze in den Kondensatoren C_2 vorhandene Energie von $^1/_2\, C V^2$ über das Öl. Sie betrug bei den Versuchen etwa $4,5 \cdot 10^{-2}$ Joule. Dieser ganze Betrag wird dem Öle in der Funkenbahn zugeführt und bewirkt vielleicht die lokale Verkohlung.

Die Stoßspannungsfestigkeit bei verschiedenen Temperaturen ist auch untersucht worden, und zwar in einem Intervall von $+20$ bis $+100^0$ C.

Stoßspannungsfestigkeit abhängig von der Temperatur (Bild 26).

Öl	A,
Reinigung	Porzellanfilter 5 mal,
Elektroden	Kugeln,
Zeit, in der die Spannung 1% von Maximalwert fällt	$2,5 \cdot 10^{-7}$,
Spannungsabfall	R = 20000 Ohm fest,
Temperatur	veränderlich.

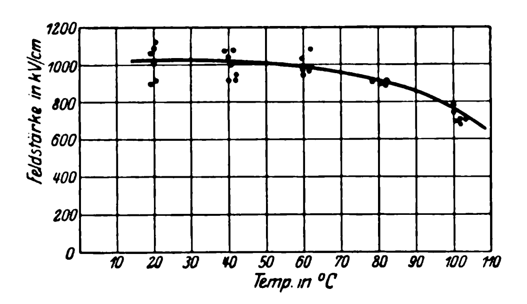


Bild 26. Stoßspannungsfestigkeit und Temperatur.

Die Festigkeit bei 20^0 C ist ungefähr 2,1 mal größer, die bei 100^0 ungefähr 1,4 mal größer als die entsprechenden Werte bei Beanspruchung durch 50-periodige Wechselspannung.

Dies kann wohl als ein zuverlässiges Merkmal dafür betrachtet werden, daß der Durchbruch bei Stoßspannungen wesentlich anderer Natur ist als der bei langsamer Spannungssteigerung.

g) Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren.

1. Stromspannungskurven. Die Kurven des dunklen Vorstromes in Öl sind von dem Verfasser zum erstenmal bis zum Durchschlag aufgenommen worden.
2. Verschiedene Geschwindigkeit der Spannungssteigerung. Die Ergebnisse von Sorge stimmen mit denen des Verfassers im allgemeinen überein, nur in einem Punkte besteht ein wesentlicher Unterschied, nämlich in der Stoßspannungsfestigkeit (vgl. Punkt 5 dieses Abschnittes S. 47).
3. Durchschlagsspannungen.

   a) Abhhängigkeit von der Schlagweite. Die Ergebnisse von Schröter stimmen mit den dieser Arbeit mitgeteilten im allgemeinen überein, Sorge und Spath haben etwas andere Abhängigkeiten ermittelt.

   Jedoch sind von allen Durchschlagsspannungen die des Verfassers am größten, dies hat wahrscheinlich in der besonders sorgfältigen Reinigung seinen Grund.

   b) Kugel- und Plattenelektroden. Zimmermann hat schon darauf aufmerksam gemacht, daß die Durchschlagswerte bei Kugelelektroden stets höher sind als bei Plattenelektroden. Dasselbe hat auch der Verfasser beobachtet, es mag im Zusammenhang damit an die in Bild 16 dargestellten Verhältnisse bei den Strom-Spannungskurven erinnert werden.
4. Durchschlagsfestigkeit bei verschiedenen Temperaturen. Von allen Autoren ist ein Maximum der Durchbruchfestigkeit zwischen + 65 und + 90° C beobachtet worden. Dies zeigt folgende Tabelle.

Quelle	Maximalwert der Durchbruchsfeldstärke in kV/cm	Temperatur in °C
Spath	380	70
Friese	250	65
Draeger	386	90
Toriyama	570	85

   Der Verfasser hat auch die Durchschlagsfestigkeit bis zu — 60° C untersucht und festgestellt, daß bei etwa — 10° C ein Minimum der elektrischen Festigkeit besteht. Bei noch weiter abnehmender Temperatur friert das Öl und seine Durchschlagsfestigkeit nimmt dabei wieder zu.
5. Stoßspannungen. Hierüber hat Peek Versuche angestellt, aber bei viel größeren Abständen und anderer Beanspruchungsdauer; deshalb ist ein Vergleich mit den Ergebnissen des Verfassers nicht gut möglich.

   Jedoch hat auch Peek beobachtet, daß die Durchbruchsfestigkeit bei Stoßbeanspruchung bis zu 3 mal höher ist als bei Beanspruchung durch niederfrequente Wechselspannung. Der Verfasser hat etwa zweimal so hohe Werte gemessen.

   Sorge hat aber bei Stoßspannungen dieselben Durchschlagswerte gemessen als bei 50 Per/sec, da er jedoch über die Einzelheiten seines Versuches nichts mitteilt, müssen seine Ergebnisse außerhalb unserer Betrachtungen bleiben.

Die Anregung zu dieser Arbeit ist von Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Rogowski ausgegangen. Hierfür und für sein lebhaftes Interesse an dem Fortschritt der Untersuchung möchte ich ihm meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Die Ölproben sind von der Firma Garbe, Lahmayer & Co. zur Verfügung gestellt.



Literaturzusammenstellung.

1. F. Schröter, Reinigung und Durchschlagsfestigkeit von Transformatorenöl. Archiv f. Elektrot. Bd. XII, 1923.
2. V. Engelhardt, Zur Messung der dielektrischen Festigkeit von Isolierölen. Archiv f. Elektrot. Bd. XIII, 1924.
3. J. Sorge, Über die Festigkeit einiger flüssiger Dielektrika. Archiv f. Elektrot. Bd. XIII, 1924.
4. K. Draeger, Über die Leitfähigkeit und die dielektrische Festigkeit von Transformatorenöl. Archiv f. Elektrot. Bd. XIII, 1924.
5. J. L. R. Hayden and W. N. Eddy, Dielectric Strength Ratio between Alternating and Direct Voltages. A. J. E. E. July 1923.
6. S. Spath, Über Durchschlagseigenschaften von Transformatorenölen. Archiv f. Elektrot. Bd. XII, 1923.
7. E. Ölschläger, Mikroskopische Beobachtung von Öldurchschlägen. Siemens-Zeitschrift Januar 1925.
8. A. C. Crago und J. K. Hodnette, Corona in Oil. A. J. E. E. March 1925.
9. F. Tank, Über den Zusammenhang der dielektrischen Effektverluste von Kondensatoren. Ann. d. Phys. Bd. 48, 1915.
10. J. L. R. Hayden and W. N. Eddy, Five Hundred Tests on the Dielectric Strength of Oil. A. J. E. E. 1922.
11. R. M. Friese, Über Durchschlagsfestigkeit von Isolierölen. Wiss. Veröffentlichungen aus dem Siemenskonzern, Bd. I.
12. L. Pungs, Untersuchungen über das dielektrische Verhalten flüssiger Isolierstoffe bei hohen Wechselspannungen. Archiv f. Elektrot. Bd. I, 1912.
13. Günther-Schulze, Über die dielektrische Festigkeit. Jos. Kösel und Fried. Pustet 1924.
14. F. W. Peek, Dielektric Phenomena in High Voltage. Engineering 1920.
15. T. L. R. Hayden and W. N. Eddy, Three Thau sand Tests on Dielectric Strength of Oil. A. J. E. E. 1922.
16. W. Zimmermann, Über Durchschlagsfestigkeitsmessungen an Isolierölen. Archiv f. Elektrot. Bd. XV, 1925.

Eine handliche Meßbrücke zur Bestimmung von Induktivitäten und Kapazitäten.

Von

G. Zickner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Für Kapazitätsmessungen von mäßiger Genauigkeit werden heute von einigen Firmen[1] kleine, handliche Meßbrücken auf den Markt gebracht, welche derartige Messungen schnell und bequem auszuführen gestatten. Analoge Apparate für Selbstinduktionsbestimmungen fehlten bisher. Zwar sind zwei Formen von Selbstinduktionsmeßbrücken bereits im Handel erhältlich; sie werden nach Angaben von Dolezalek[2] durch die Siemens und Halske-A.-G. hergestellt. Die eine Form ist für die Messung größerer (10^{-3} — 1 H), die andere für die Messung kleinerer (10^{-7} — 10^{-2} H)[3] Selbstinduktionen geeignet. Ihre Anwendung ist jedoch aus verschiedenen Gründen wesentlich weniger bequem und einfach als die der genannten Kapazitätsmeßbrücken[4].

Praktisch führt man die Messung einer größeren Selbstinduktion meist mit der einen der genannten Brücken, die einer kleineren Selbstinduktion meist im Schwingungskreis aus, d. h. man ermittelt die Selbstinduktion durch eine Kapazitätsmessung und eine Bestimmung einer Frequenz oder Wellenlänge. Auch diesem Verfahren haften Umständlichkeiten an, die zum Teil in der erforderlichen Rechenarbeit, zum Teil in dem notwendigen Aufwand von Apparaten liegen.

Ein anderer Weg ist die Berechnung der Selbstinduktion aus den Dimensionen der Spule; doch ist er nur bei geometrisch einfachen Spulenformen gangbar und selbst bei relativ geringen Genauigkeitsansprüchen infolge des meist komplizierten Formelbaues zeitraubend.

Im folgenden wird die Konstruktion eines kleinen transportablen Apparates angegeben, der billig herstellbar und bequem zu bedienen ist und es gestattet, die Selbstinduktion einer Spule zwischen 10^{-5} und 10^{-1} H in kürzester Zeit zu messen. Die Messung macht nicht erheblich mehr Schwierigkeiten als die Messung einer Kapazität mit einer der üblichen Kapazitätsmeßbrücken und erreicht etwa die gleiche relative Genauigkeit (1 bis einige Prozent). Das Gerät hat den weiteren Vorzug, daß es sich durch Umlegen eines Schalters in eine Kapazitätsmeßbrücke verwandeln läßt, welche die Messung von Kapazitäten zwischen etwa 50 $\mu\mu$F und 1 μF mit der oben angegebenen Genauigkeit auszuführen erlaubt. Die fabrikmäßige Herstellung des Apparates ist von der Firma Dr. Georg Seibt, Berlin-Schöneberg, übernommen worden.

A. Prinzip der Anordnung.

1. Verwendung als Induktivitätsmeßbrücke.

Der Apparat ist eine Anwendung der bekannten Maxwellschen Brückenschaltung (Bild 1), die in den letzten Jahren mehrfach der Gegenstand eingehender

[1] Dr. G. Seibt, Berlin-Schöneberg; Siemens und Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt; Telefunken, Berlin; C. Lorenz, A.-G., Berlin-Tempelhof u. a. m.

[2] F. Dolezalek, Zeitschr. f. Instrumentenkd. **23**, S. 240, 1903.

[3] Nach Angaben der Firma.

[4] Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit veröffentlichte C. Günther (Ztschr. f. Instrkde. **46**, S. 623, 1926 nnd **47**, S. 249, 1927) zwei Mitteilungen über eine Selbstinduktionsmeßbrücke, auf welche das oben für die Dolezalekschen Brücken Gesagte teilweise ebenfalls zutrifft.



Untersuchungen gewesen ist[1]. Für diese Anordnung gelten die Gleichgewichtsbedingungen[2]:

$$L/C = r_1 \cdot r_4 \qquad (1)$$

$$r_1 \cdot r_4 = r_2 \cdot r_3, \qquad (2)$$

wenn man zunächst von den durch Kapazität und Selbstinduktion der Widerstände hervorgerufenen Korrektionen absieht. Die Forderung der Transportfähigkeit des Apparates bedingt ein kleines C (Drehkondensator von etwa 1000 $\mu\mu$F Maximalkapazität), also nach Gleichung (1) für den in Frage kommenden Selbstinduktionsmeßbereich (10^{-5} bis 10^{-1} H) Werte des Produktes $r_1 \cdot r_4$ zwischen 10^6 und 10^5 Ohm². Wie Meyer (l. c.) nachgewiesen hat, ist zur Erzielung großer Empfindlichkeit[3] zweckmäßig, daß $r_4 \ll r_3$, $r_1 \gg r_3$ und $r_1 \gg \omega L$ ist; indessen verursachen ziemlich erhebliche Abweichungen von diesen Bedingungen noch keine wesentliche Einbuße an Empfindlichkeit. Immerhin wurden die Verhältnisse so gewählt, daß die Bedingungen $r_1 > r_3$, $r_1 > \omega L$ und $r_1 \geqq r_4$ stets erfüllt waren.

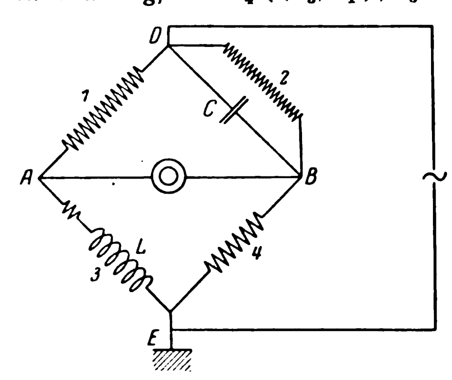


Bild 1. Prinzipschaltung als Induktivitätsmeßbrücke.

Der Drehkondensator mit halbkreisförmigen Drehplatten ist bis hinunter zu etwa 100 $\mu\mu$F (entsprechend etwa 15° der Skale) für die Messung ausnutzbar, also im Verhältnis 1 : 10 veränderbar[4]. Daraus ergeben sich 4 verschiedene Werte des Produktes $r_1 \cdot r_4$ für das verlangte Selbstinduktionsmeßgebiet, also 4 verschiedene Meßbereiche des Apparates. Es entsteht jetzt die Frage, wie die beiden Faktoren dieses Produktes zu wählen sind. Wie aus obigen Darlegungen hervorgeht, ist es zweckmäßig, r_1 einen möglichst großen Wert zu geben. Nun sind Hochohmwiderstände, die nicht aus Draht bestehen, zwar als Einstellwiderstände brauchbar, jedoch als Meßwiderstände ihrer mangelhaften Konstanz wegen im allgemeinen ungeeignet. Andererseits stellt man einzelne Drahtwiderstände von handlicher Form nur bis zur Größenordnung von 10000 Ohm her. Die Reihenschaltung mehrerer wiederum würde unhandlich und teuer werden. Bei Konstanthaltung des Wertes $r_1 = 10000$ Ohm erhält man also für r_4 in den vier Meßbereichen 1—4 die vier Werte 10000 Ohm (4), 1000 Ohm (3), 100 Ohm (2) und 10 Ohm (1).

Die Brückenbedingung (2) kann unabhängig von (1) durch Veränderung von r_2 oder r_3 oder von r_2 und r_3 erfüllt werden. Praktisch wird durch einen zum Kondensator parallel geschalteten Hochohmwiderstand r_2 die Grobeinstellung, durch einen mit der Spule in Reihe geschalteten regelbaren Zusatzwiderstand r_3 die Feineinstellung bewirkt. Da weder r_2 noch r_3 in das Meßergebnis eingehen, so braucht auf genaue Kenntnis der Größen dieser Widerstände sowie auf besonders hohe Konstanz derselben kein Wert gelegt werden. Freilich addiert sich jetzt im Zweige 3 die Selbstinduktion des jeweils eingeschalteten Zusatzwiderstandes zu L und wird mitgemessen. Dieser Einfluß ist jedoch nur bei kleinen Spulen von Belang und wird gegebenenfalls durch eine einfache Korrektion berücksichtigt.

---

[1] E. Grüneisen und E. Giebe, Zeitschr. f. Instrumentenkd. **34**, S. 160, 1914. — Ann. d. Phys. **63**, S. 179, 1920. Ausführlicher: Wissensch. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt **5**, S. 1, 1921. — U. Meyer, ETZ **44**, S. 779, 1923. — ENT **1**, S. 29, 1924.

[2] r_3 bezeichnet den Widerstand im Zweige 3 einschließlich des Spulenwiderstandes.

[3] Abgesehen von der sinngemäß für jede Selbstinduktionsbrücke erforderlichen Bedingung $r_3 \lessdot \omega L$.

[4] Unterhalb von etwa 15° ist die Kapazitätskurve eines Drehkondensators mit halbkreisförmigen Rotorplatten in der Regel nicht mehr geradlinig, also für Meßzwecke ungeeignet.

Die Brückengleichungen (1) und (2) verlangen, daß die Widerstände winkelfrei sind. Diese Forderung ist in der vorliegenden Anordnung nur für die dem Kondensator parallel zu schaltenden Hochohmwiderstände erfüllt, sofern Fabrikate benutzt werden (s. unten), die als praktisch frei von Kapazität und Selbstinduktion angesehen werden können. Für Drahtwiderstände kann die Winkelfreiheit nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden. Die Zeitkonstante

$$\Theta = \frac{l}{r} - c \cdot r \qquad (3)$$

ist bei kleineren Drahtwiderständen meist positiv, bei größeren negativ. Hierbei bedeutet l die Selbstinduktion, c die Kapazität des Widerstandes. Bei Berücksichtigung der Zeitkonstante nimmt der Operator[1] $a + jb$ eines Widerstandes die Form an

$$a + jb = r \cdot (1 + j\omega\Theta), \qquad (4)$$

wobei für niedrige Frequenzen, wie sie hier vorliegen, $\omega^2 l^2 << r^2$ gesetzt wird. Die Gleichsetzung der Produkte der Operatoren gegenüberliegender Brückenzweige ergibt die Beziehung

$$r_1 r_4 \cdot (1 + j\omega\Theta_1)(1 + j\omega\Theta_4) = \frac{r_2 (r_3 + j\omega L)}{1 + j\omega C r_2}. \qquad (5)$$

Hieraus erhält man nach Trennung der reellen und imaginären Terme und unter Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung die Brückenbedingungen:

$$L = r_1 \cdot r_4 \left(C + \frac{\Theta_1 + \Theta_4}{r_2} \right), \qquad (6)$$

$$r_1 \cdot r_4 = r_2 \cdot [r_3 + \omega^2 L (\Theta_1 + \Theta_4)]. \qquad (7)$$

Man ersieht aus der Hauptgleichung (6), daß man, um das Korrektionsglied $\frac{\Theta_1 + \Theta_4}{r_2}$ vernachlässigen zu können, Θ_1 und Θ_4 hinreichend klein, r_2 dagegen möglichst groß zu machen hat.

Der Einfluß der Spulenkapazität auf die Selbstinduktion der Spule ist nicht berücksichtigt; er bleibt bei den in Frage kommenden Frequenzen praktisch weit unterhalb der Meßgenauigkeit.

2. Verwendung als Kapazitätsmeßbrücke.

Durch eine einfache Vorrichtung läßt sich die nach dem Schema Bild 1 aufgebaute Selbstinduktionsmeßbrücke in eine Kapazitätsmeßbrücke verwandeln. Man hat zu diesem Zwecke nur die Zweige 3 und 4 der Brücke Bild 1 zu vertauschen und erhält dann das Schema Bild 2. An Stelle der zu messenden Spule wird der zu messende Kondensator eingeschaltet und in bekannter Weise mit dem veränderbaren Normalkondensator im Zweige 2 verglichen.

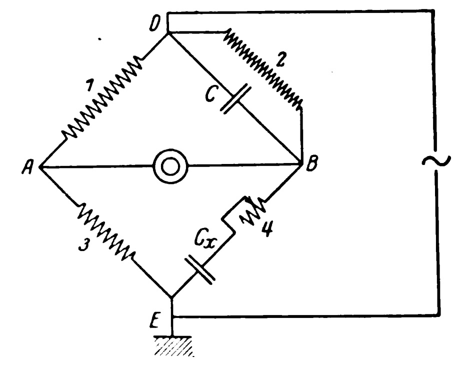


Bild 2. Prinzipschaltung als Kapazitätsmeßbrücke.

Die Umschaltung geschieht zweckmäßig durch einen doppelpoligen Schalter (vgl. Bild 3). Sofern der zu messende Kondensator nicht starke Verluste hat, ist der Vorschaltwiderstand im Zweige 4 kurz zu schließen und der Hochohmwiderstand im Zweige 2 auszuschalten. Der Meßbereich liegt, wie sich aus den Widerstandsverhältnissen ergibt, zwischen den Kapazitätsgrenzen von 100 $\mu\mu$F und 1 μF. Nimmt man den unteren, gekrümmten

[1] $j = \sqrt{-1}$.

Teil der Kapazitätskennlinie des Normalkondensators zu Hilfe, so gelingt es, noch Kapazitäten von etwa 50 $\mu\mu$F auf einige Prozent genau zu messen.

Solange die Kondensatoren verlustfrei und Widerstände in den Zweigen 2 und 4 nicht vorhanden sind, gilt die bekannte Gleichung

$$C_x = C \cdot \frac{r_1}{r_3}. \tag{8}$$

Der Einfluß der Verluste von Normal- und Prüfkondensator ergibt sich aus den vollständigen Brückenbedingungen. Die Zeitkonstanten der Widerstände r_1 und r_3 spielen in dieser Anordnung für die Kapazitätsbestimmung keine Rolle. Man erhält mit Hilfe der Operatorenrechnung in analoger Weise wie oben die Gleichungen:

$$\frac{C}{C_x} = \frac{r_3}{r_1} - \frac{r_4}{r_2}, \tag{9}$$

$$\delta_2 - \delta_4 = \omega \cdot (\Theta_1 - \Theta_3). \tag{10}$$

Hierbei seien die den Verlusten des Normals C bzw. des Prüflings C_x entsprechenden fiktiven Widerstände, die parallel zu C bzw. in Reihe mit C_x geschaltet gedacht seien, in r_2 bzw. r_4 enthalten. Die Größen δ sind durch die Beziehungen $\operatorname{tg}\delta_2 = 1/\omega C r_2$ und $\operatorname{tg}\delta_4 = \omega C_x r_4$ gegeben. Der Quotient r_4/r_2 ist eine Korrektionsgröße, er charakterisiert den Einfluß von Verlustwinkeln der Kondensatoren sowie von Widerständen in den Zweigen 2 und 4. Man kann diese Widerstände zur Einstellung eines scharfen Minimums bei der Messung großer, nicht verlustfreier Kondensatoren benutzen[1], hat aber dann zu beachten, daß $r_4/r_2 \ll r_3/r_1$ sein muß, sofern man eine entsprechende Korrektion vermeiden will. Praktisch bedeutet das bei extremer Ungleicharmigkeit der Brücke, also für den Meßbereich 1, in dem allein diese Widerstandsabgleichung in Frage kommt, daß z. B. für eine Meßgenauigkeit von 1% und bei einer Meßfrequenz von 800 Hz r_2 den Wert $5 \cdot 10^6$ Ohm (Stufe 7, s. unten) nicht unterschreiten, r_4 den Wert 10 Ohm (Stellung 1 des Grobeinstellers, s. unten) nicht überschreiten darf. Deshalb muß der Verlustwinkel des Prüfobjekts in diesem Meßbereich stets unter dem Werte $\operatorname{tg}\delta_x = 0{,}05$ liegen, wenn der Meßfehler 1% nicht übersteigen soll. Im allgemeinen kann aber $r_4 \ll r_2$, also $r_4/r_2 = 0$ gesetzt werden. Gleichung (9) geht somit in die Gleichung (8) über.

Die Selbstinduktion eines etwa benutzten Vorschaltwiderstandes im Zweige 4 ist, wie sich leicht zeigen läßt, praktisch ohne Einfluß auf das Brückengleichgewicht.

B. Praktischer Aufbau.

Für ein technisches Meßgerät ist ein enger Zusammenbau der Schaltelemente erwünscht, damit das Instrument handlich und transportabel wird. Die gesamten Einzelteile der Brücke wurden daher in einem Holzkasten von den Abmessungen $16 \times 17 \times 28$ cm untergebracht, der sie gleichzeitig gegen Staub und mechanische Beschädigung schützt. Sie sind mit Ausnahme der Erregerbatterie an der Hartgummiplatte des Kastens montiert (vgl. Bild 4). Die Verbindung der im Kasten befindlichen Summerelemente mit der Brücke geschieht durch Auflagekontakte.

Etwas oberhalb der Mitte der Hartgummiplatte ist der Drehkondensator eingebaut. Seine Kapazität ist durch ein metallisches Schutzgehäuse, welches mit einem der beiden Plattensysteme verbunden ist, eindeutig definiert. Ein Einfluß der Annäherung der Hand des Beobachters auf die Gleichgewichtslage der Brücke ist dadurch praktisch vermieden[2]. Die Anfangskapazität liegt unter 100, die End-

[1] Sie sind zur Einstellung völligen Schweigens des Telephons, nicht aber zur Messung von Verlusten zu verwenden.

[2] Es mag auffallend erscheinen, daß das Kondensatorgehäuse nicht geerdet ist (vgl. Bild 3). Es ist jedoch zu bedenken, daß die Erdkapazität des Kondensatorgehäuses der gesamten Brücke parallel geschaltet ist und daher in die Messungen nicht eingeht.

kapazität über 1000 $\mu\mu$F. Als bequem erweist sich ein auf den Drehknopf aufzusetzender Einstellhebel von etwa 20 cm Länge.

Etwas unterhalb der Plattenmitte befindet sich der Rastenschalter für die Hochohmwiderstände im Zweige 2. Er weist 9 mit den Ziffern 1—9 bezeichnete Stufen auf. Verwendet werden im Radiohandel fertig erhältliche Widerstandsstäbchen[1], und zwar in den Größen 10^4, 2×10^4, 5×10^4, 10^5, 5×10^5, 10^6, 5×10^6 und 10^7 Ohm. Eine neunte Rast gestattet die völlige Ausschaltung des Widerstandes.

Der Zusatzwiderstand im Zweige 3 (Bild 1) besitzt eine Grobeinstellung (0 bis 100 Ohm) und eine Feineinstellung (0—1 Ohm). Die erstere wird durch einen Widerstandsdraht gebildet, der auf einem kreisförmig gebogenen, flachen Streifen Isolationsmaterial aufgewickelt ist, auf dessen einer Seitenfläche ein drehbarer Kontaktarm

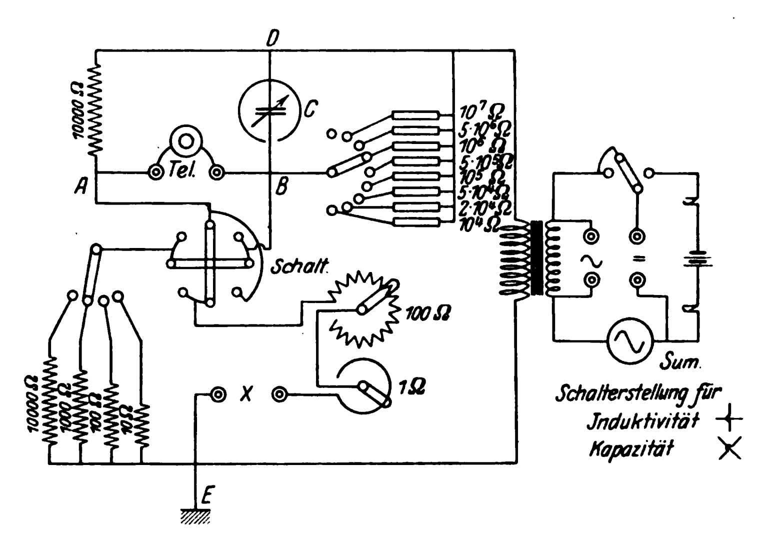


Bild 3. Schaltungsschema.

schleift. Die Feineinstellung wird durch einen einzigen, kreisförmigen Schleifdraht gebildet, der auf dem Mantel einer zylindrischen Scheibe aus Isolationsmaterial liegt. Beide Widerstände tragen willkürliche, in 10 Teile geteilte Skalen und sind in Reihe geschaltet. Die Selbstinduktion des jeweils eingeschalteten Teiles des Grobeinstellers geht in das Meßergebnis ein und muß in den Meßbereichen 1 und 2 von dem eingestellten Selbstinduktionswert abgezogen werden. Bei kleinen zu messenden Selbstinduktionen kann diese Korrektion nicht unerhebliche relative Beträge erreichen. Die Selbstinduktion dieses Widerstandes ist daher in das Eichkurvenblatt Bild 5 als Funktion der Einstellung mit eingetragen (Kurve V). Die Abhängigkeit ist angenähert linear, da die Längsdimension der Drahtwicklung groß gegen ihre Querdimensionen ist. Die Selbstinduktion des Feineinstellers ist auch bei kleinen zu messenden Spulen ohne Belang.

Die Bedienungsgriffe der Zusatzwiderstände, des Meßbereichschalters und des Schalters zur Vertauschung der Brückenzweige 3 und 4 sind um den Kondensatorgriff herum angeordnet. Die Verbindung der Widerstände und Schaltvorrichtungen ist aus Bild 3 zu ersehen, in der die Leitungsführung im einzelnen angegeben ist. Bild 4 zeigt eine Ansicht des Apparates.

Die Widerstände r_1 und r_4 (Bild 1) mit Ausnahme des kleinsten Wertes (10 Ohm), die, wie oben bereits dargetan, nach Möglichkeit winkelfrei sein müssen, sind nach einem Spezialverfahren der Fa. Seibt hergestellt. Dem 10-Ohm-Widerstand wird durch unifiliare Wickelung eine kleine positive Zeitkonstante erteilt, um zu verhindern,

[1] Hergestellt von der Steatit Magnesia-A.-G., Berlin-Tempelhof.

daß das Korrektionsglied $\frac{\Theta_1 + \Theta_4}{r_2}$ im Meßbereich 1 bei kleinem r_2 erhöhte Bedeutung gewinnt. Da der Widerstand sehr kleine Dimensionen besitzt, so ist eine Beeinflussung der Brückeneinstellung durch Streufelder nicht zu befürchten. In Tabelle I sind die Widerstände mit ihren Zeitkonstanten und den daraus resultierenden wirksamen Kapazitäts- bzw. Induktivitätswerten zusammengestellt.

Tabelle I. Zeitkonstanten der Meßwiderstände.

r Ohm	c $\mu\mu$F	l μH	Θ sec
10000	20	—	$-20 \cdot 10^{-8}$
1000	10	—	$-1 \cdot 10^{-8}$
100	—	1	$+1 \cdot 10^{-8}$
10	—	2,4	$+24 \cdot 10^{-8}$

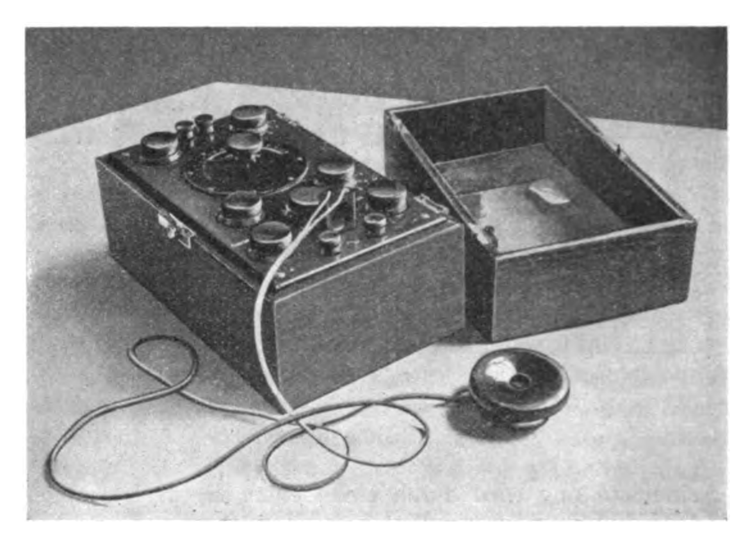


Bild 4. Ansicht des Apparates.

Die Werte der Tabelle sind Näherungswerte; sie wurden durch Vergleichung mit Bifilardrähten von angenähert berechenbarer Zeitkonstante in einer Maxwellschen Brückenanordnung gefunden. Tabelle II enthält die mit den Zeitkonstanten der Tabelle I berechneten Korrektionswerte $\frac{\Theta_1 + \Theta_4}{r_2}$ für verschiedene Werte von r_2.

Tabelle II.
Wert der Korrektion $\frac{\Theta_1 + \Theta_4}{r_2}$ in $\mu\mu$F.
$r_1 = 10000$ Ohm.

Meßbereich	1	2	3	4
$r_1 \cdot r_4$	10^5 Ohm²	10^6 Ohm²	10^7 Ohm²	10^8 Ohm²
r_4	10 Ohm	100 Ohm	1000 Ohm	10 000 Ohm
$r_2 = 10^7$ Ohm	0	0	0	0
10^6 Ohm	0	— 0,2	— 0,2	— 0,4
10^5 Ohm	+ 0,4	— 1,9	— 2,1	— 4,0
10^4 Ohm	+ 4	— 19	— 21	— 40

Praktisch liegen die Verhältnisse so, daß für größere Spulen infolge ihrer größeren Phasenverschiebung auch ein größeres r_2 eingeschaltet werden muß, während der Wert $r_2 = 10^4$ Ohm stets nur für die kleinsten Spulen (Bereich 1) zur Anwendung kommt[1]. Die Korrektion beträgt daher im äußersten Falle wenige $\mu\mu$F. Hierdurch kann unter günstigen Umständen am Ende des Meßbereichs ein maximaler Fehler des Ergebnisses von etwa 0,4%, am Anfang ein solcher von etwa 4% hervorgerufen

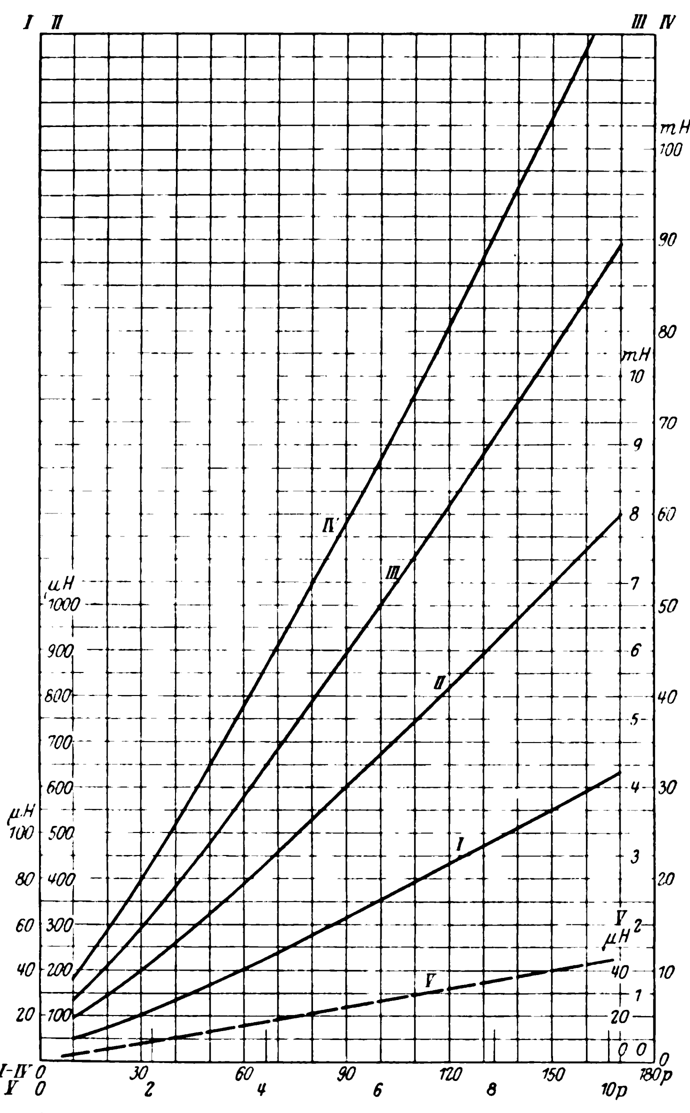


Bild 5. Selbstinduktions-Eichkurven.

werden. Solange man jedoch den gleichen Wert von r_2 benutzt, der bei der Eichung der Brücke verwendet wurde, fällt der Fehler überhaupt fort. Da die Minimumsbreite der Kondensatoreinstellung etwa 1°, entsprechend etwa 7 $\mu\mu$F, beträgt, so liegt die Korrektion immer innerhalb der Meßfehlergrenzen und kann daher vernachlässigt werden.

Auf der Schaltplatte befinden sich ferner die Schalter für Summererregung und -abstimmung, sowie die Anschlußorgane für Prüfobjekt und Telephon und für

[1] Die Korrektionswerte unterhalb der punktierten Linie der Tabelle 2 kommen praktisch nicht vor.

Summererregung durch eine äußere Batterie sowie für Speisung der Brücke mit Wechselstrom von hörbarer Frequenz, unter Ausschaltung des Summers. Für diesen Zweck eignet sich wegen seiner konstanten Frequenz und seines praktisch sinusförmigen Stromes vorzüglich ein Röhrensummer, bei dem auch die Störung durch Eigengeräusch wegfällt. Die Einstellung ist in diesem Falle, insbesondere im Meßbereich kleiner Spulen, wesentlich schärfer als bei Summerbetrieb.

Die Speisung der Brücke geschieht über einen kleinen, praktisch streuungsfreien Transformator.

Zu erden ist zweckmäßig eine Klemme des Prüfobjekts (Brückeneckpunkt E, Bild 1, 2, 3). Ist dies ein Kondensator, so ist dessen äußere Belegung mit E zu verbinden.

Für eine Kapazitätsbrücke ist im allgemeinen ein hochohmiges, für eine Selbstinduktionsbrücke in der Regel ein niederohmiges Telephon vorzuziehen. Im vorliegenden Falle mußte ein Kompromiß geschlossen werden. Ein Telephon von 200 Ω Gleichstromwiderstand erwies sich cet. par. als das Empfindlichste. Es wird im Deckel des Apparatekastens untergebracht.

Die Eichung des Apparates mit einer Reihe bekannter Normalen der Selbstinduktion bzw. Kapazität ergab, wie zu erwarten, eine praktisch lineare Abhängigkeit des gemessenen Wertes von der Einstellung[1]. Das Kurvenblatt Bild 5 enthält die 4 Eichkurven I bis IV für die Selbstinduktion sowie die Korrektionskurve V, welche die Selbstinduktion des Zusatzwiderstandes angibt. Die Eichkurven für die Kapazität haben völlig gleichen Verlauf wie die Selbstinduktionskurven. Die Bedienung des Gerätes als Induktivitätsmeßbrücke erfolgt durch abwechselnde Veränderung des Drehkondensators und der Widerstände, von denen nach Auffindung des richtigen Meßbereiches zuerst der Hochohmwiderstand angenähert einzustellen ist. Die exakte Abgleichung geschieht mit Kondensator und, bei größeren Spulen, mit Grob- und Feineinsteller, bei kleineren mit letzterem allein. Stets läßt sich ein völliges Verschwinden des Tones im Telephon erreichen; solange diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann die Messung nicht als zuverlässig gelten. Die Bedingungen, denen die Widerstände bezüglich der Vermeidung von Korrektionen unterliegen, sind durch die oben gegebenen theoretischen Erörterungen wohl hinreichend geklärt.

Aus den Kurven I bis IV des Bildes 5 wird der der Einstellung von C entsprechende Selbstinduktionswert abgegriffen. Für die Kurven I und II ist dieser Wert um den der Einstellung von r_3 entsprechenden, aus Kurve V abzulesenden Wert der Selbstinduktion von r_3 zu verringern.

Beim Betrieb der Anordnung als Kapazitätsmeßbrücke ist im allgemeinen der Hochohmwiderstand auszuschalten und der Zusatzwiderstand kurzzuschließen. Nur im Meßbereich 1 können bei großen Verlusten des Prüfkondensators beide Widerstände zur Einstellung eines scharfen Minimums herangezogen werden; doch sind bezüglich der zulässigen Größe dieser Widerstände die oben angegebenen Bedingungen zu beachten.

Die Meßgenauigkeit beträgt etwa 1 bis einige Prozent, ist jedoch am Anfang eines jeden Meßbereiches etwas geringer.

[1] Die schwache Krümmung der Kurven ist offenbar auf eine nicht völlig lineare Kapazitätskurve des Kondensators zurückzuführen.

Die Magnetisierungscharakteristik der Gleichpol-Induktortype.

Von

Karl Metzler.

I. Einleitung.

Als Niederfrequenzmaschine wurde die Gleichpolmaschine nur vereinzelt ausgeführt, zu allgemeiner Wertschätzung brachte sie es nicht. Erst die Notwendigkeit, Maschinen für mittlere und hohe Frequenzen bauen zu müssen, brachte die schon zu Grabe getragene Ausführungsart wieder ans Licht. Bei den hohen Polzahlen, die bei großer Periodenzahl nötig werden, wird die Bewicklung jedes einzelnen Poles zur Unmöglichkeit. Die eine, zudem noch feststehende Erregerspule der Induktortype hilft dagegen über diese Schwierigkeiten leicht hinweg. Daher sind sowohl die Mittelfrequenz- als auch die Hochfrequenzgeneratoren als Gleichpol-Induktormaschinen gebaut.

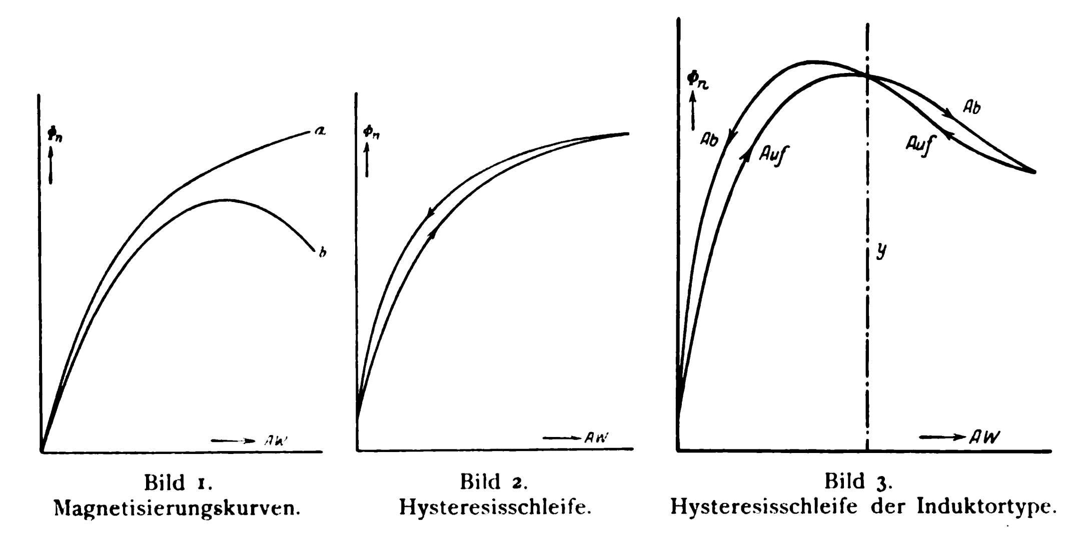


Bild 1. Magnetisierungskurven. Bild 2. Hysteresisschleife. Bild 3. Hysteresisschleife der Induktortype.

Die Abhängigkeit des nützlich in den Statorspulen verwertbaren Flusses Φ_n von der erregenden Amperewindungszahl der Rotorspule zeigt nun bei dieser Maschinentype eine bemerkenswerte Abweichung gegenüber derselben Charakteristik bei der sonst üblichen Wechselpoltype. Bei Leerlauf sind wir an das Bild 1, Kurve a, so gewöhnt, daß uns ein Verlauf nach Kurve b, Bild 1, im ersten Augenblick als recht unwahrscheinlich anmutet.

Bei hohen Sättigungen des Eisenweges steigt im normalen Falle die Magnetisierungscharakteristik nur noch sehr wenig, aber sie steigt immerhin noch mit wachsender Erregung. Bei der Gleitpoltype tritt dagegen bei einer bestimmten Erregung ein Höchstwert auf, durch weitere Steigerung der Erregung fällt der nützlich verwertbare Fluß wieder ganz merklich.

Für eine solche Magnetisierungskurve muß noch eine weitere Eigentümlichkeit in Erscheinung treten. Die Wechselpolmaschine zeigt beim stetigen Auf- und Abmagnetisieren eine Schleife nach Bild 2. Die Kurve der Abmagnetisierung liegt höher als die Kurve der Aufmagnetisierung. Ganz gleichgültig ist dabei, auf welche Weise die Auf- und Abmagnetisierung erzielt wird. Für die Induktor-Gleichpolmaschine muß sich hiernach eine Schleife nach Bild 3 ergeben. Links von der

Ordinate y wird das Aufmagnetisieren durch Verstärken, das Abmagnetisieren durch Schwächen der Erregung erreicht, dagegen rechts von y das Abmagnetisieren durch Verstärkung, das Aufmagnetisieren durch Schwächen der Erregung. Bild 4 zeigt eine Aufnahme aus dem Jahre 1919. E_0 ist die EMK im Leerlauf und U die Klemmenspannung bei 45,6 Amp. Belastung für eine Mittelfrequenzmaschine von 10 kVA Leistung 220 Volt — 450 Perioden — 1350 Umdrehungen. Die durch Bild 3 erläuterte Erscheinung ist deutlich erkennbar. Auch die berechnete EMK E_0

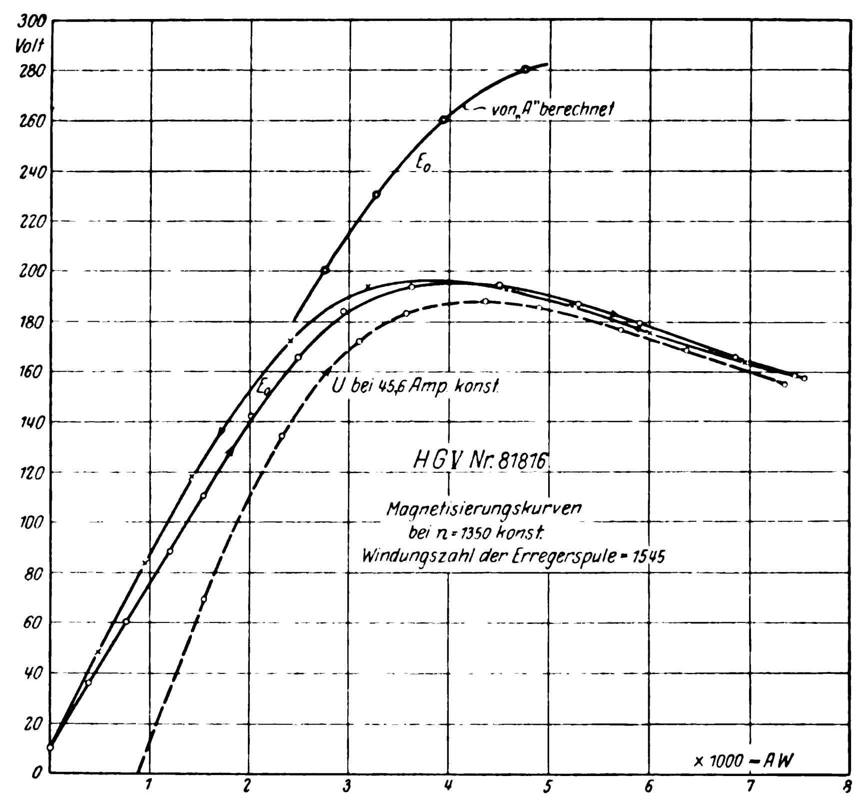


Bild 4. Experimentelle Aufnahme der Magnetisierungskurven.

ist eingetragen; die große Abweichung zwischen Rechnung und Versuch an der fertigen Maschine zeigt, daß dem Erbauer der Maschine die Eigenheiten der Gleichpolmaschine noch unbekannt waren. Die beabsichtigte EMK von 220 Volt wurde auch bei Leerlauf nicht erreicht, trotzdem der Luftspalt zwischen Stator und Rotor verkleinert wurde. Es wird später dargelegt, wie die Charakteristik von Bild 4 vorausberechnet werden kann.

II. Ursache für den Verlauf von Φ_n bzw. E_0 nach Bild 4.

Zunächst ist die Frage zu beantworten, durch welche konstruktiven Eigenheiten die Magnetisierungslinie die besprochene abweichende Form annehmen kann. In Bild 5 ist der Schnitt durch eine Gleichpol-Induktormaschine angegeben, es ist die schon erwähnte Mittelfrequenzmaschine von 10-kVA-Leistung bei 450 Perioden. In die Gerade ausgestreckt ergeben zwei benachbarte Polzacken des Rotors das Bild 6. Es bezeichne:

b_z die Zackenbreite,
b_n die Nutbreite,



τ_p die Polteilung.

Die Spulenweite ist $b_s = \frac{\tau_p}{2}$.

Unter der Voraussetzung, daß nur unter den Polzacken die Induktionslinien übertreten, dagegen innerhalb der Pollücke gar keine, erhält die EMK der Statorspule eine Form nach Bild 6. Es sind 3 Fälle dargestellt:

in Bild 6a ist $b_z = 0{,}4 \cdot \tau_p$,

„ „ 6b „ $b_z = 0{,}5 \cdot \tau_p$,

„ „ 6c „ $b_z = 0{,}6 \cdot \tau_p$.

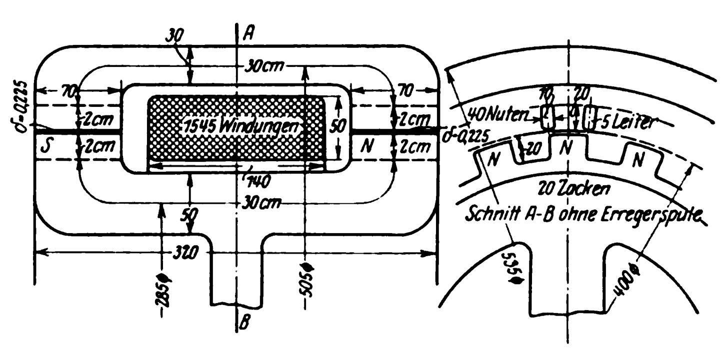


Bild 5. Schnitt durch eine Induktormaschine.

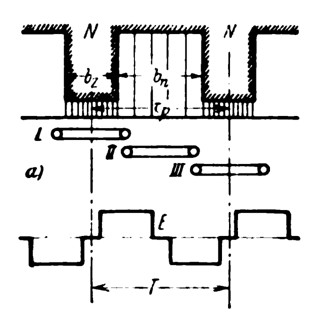


Bild 7. EMK bei einem Fluß in der Pollücke.

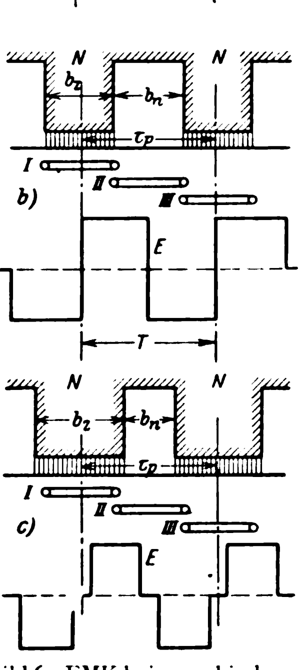


Bild 6. EMK bei verschiedener Polzackenbreite.

Wird die Spule aus der Stellung I über II in die Stellung III bewegt, so wird eine Periode der EMK erzeugt. Die Form der EMK ist in den Fällen a und c gleich, im Falle b ist der Maximalwert von E während einer halben Periode vorhanden, der Kappsche Faktor daher $k = 2$. Für a und c ist k etwas größer als 2. Das Bild zeigt auch, daß in dem dargestellten idealen Fall immer nur eine der beiden Spulenseiten wirksam ist, einmal die linke, einmal die rechte. Bezeichnet man die Zahl der Polzacken einer Seite mit p, so ist die Periodenzahl

$$f = \frac{p \cdot n}{60}.$$

Die Maschine in Bild 5 muß daher auf jeder der beiden Seiten

$$p = \frac{60 \cdot f}{n} = \frac{60 \cdot 450}{1350} = 20 \text{ Polzacken}$$

haben.

In Bild 7 ist für $b_z = 0{,}4\,\tau_p$ einmal angenommen, daß in der Pollücke ein Fluß von der halben Stärke desjenigen unter der Polzacke verläuft. Es sind daher unter den Polzacken 10 Röhren, in der Pollücke 5 Röhren eingetragen. Weil die EMKe in den beiden Seiten der Spule einander entgegenwirken, ist in Bild 7 E nur die Hälfte von Bild 6a. Ist im extremen Fall die Dichte unter der Zacke und in der Lücke gleich, so sinkt die EMK E auf Null zusammen. Bei steigender Erregung nimmt nun die Dichte und damit der magnetische Widerstand in den Polzacken immer mehr zu. Man muß sich vorstellen, der Luftspalt δ unter den Polzacken wird immer größer, die Höhe der Polzacke nimmt immer mehr ab. Durch die Steigerung der Erregung wird der Fluß und damit E vergrößert, aber durch das Zusammenschrumpfen der Polzacken wird der Fluß auch gleichzeitig verkleinert. Da nun leicht der Fall eintreten kann, daß bei immer mehr gesteigerter Erregung einmal die Abnahme des Flusses infolge des vergrößerten Widerstandes, die Zunahme infolge der vergrößerten Erregung übersteigen kann, so muß von diesem Punkt an die EMK mit weiterer Steigerung der Erregung fallen. Man kann auch sagen: Falls durch die zugenommene Eisensättigung der Widerstand in den Polzacken so zugenommen hat, daß bei weiterer Steigerung der Erregung mehr Linien in die parallelgeschaltete Nut gedrängt werden als durch die Erregungssteigerung neu erzeugt wurden, dann muß die EMK wieder fallen.

Diese Tatsache ist schon ziemlich lange bekannt, in seinem Buche „Grundzüge der Elektrotechnik“ sagt Görges Seite 129: „Es leuchtet ein, daß sich der Raum zwischen den Polen um so mehr mit Induktionslinien füllen muß, je weiter man die Erregung steigert. Es kann daher der Fall eintreten, daß bei Steigerung der Erregung die EMK nicht mehr zu, sondern wieder abnimmt“.

Einem Bericht über einen Aufsatz von Alexanderson in ETZ 1909, S. 1003, der eine 100000 Perioden-Maschine behandelt, läßt sich entnehmen, daß auch hier magnetische Schwierigkeiten auftraten. Es heißt in dem Bericht: „Um brauchbare Spannungen zu erhalten, muß der Luftspalt zwischen Anker und Magnetzähnen möglichst klein sein (0,3 ÷ 0,4 mm)“.

Je größer der Luftspalt δ ist, desto größer ist die Liniendichte in der Pollücke gegenüber der Dichte unter der Polzacke, also desto kleiner die induzierte EMK. Daher konnte auch bei obiger Hochfrequenzmaschine durch Einstellen des Luftspaltes von 0,37 ÷ 0,1 mm die Leistung geregelt werden.

III. Berechnung der EMK.

Ist z die in Reihe geschaltete Leiterzahl, Φ_{np} = nützlicher Fluß pro Pol, so ist die EMK einer Synchronmaschine

$$E = k \cdot f \cdot z \cdot \Phi_{np} \cdot 10^{-8}\ \text{Volt}.$$

Für eine ausgeführte Maschine kann $k \cdot f \cdot z \cdot 10^{-8} = C_1$ als Konstante angesehen werden, so daß

$$E = C_1 \cdot \Phi_{np}$$

wird. Bei der Induktortype, Bild 5, umschließt die feststehende Erregerspule das Eisen wie bei einem Manteltransformator; die beiden Hälften sind nur auseinandergerückt. Der erzeugte Fluß tritt mit einer Linienzahl Φ durch den Luftspalt zwischen Stator und Rotor. Die Streulinienzahl Φ_s ist kleiner als bei der Ausführung mit bewickelten Polen, weil der Luftweg größer ist. In Bild 8 sind die Linien Φ ausgezogen, die Streulinien Φ_s gestrichelt gezeichnet. Durch den Jochring AB in Bild 8 geht der Fluß

$$\Phi_m = \Phi + \Phi_s,$$

$$\frac{\Phi_m}{\Phi} = 1 + \frac{\Phi_s}{\Phi} = \sigma_s.$$



Der Streukoeffizient wird $\sigma_s = 1{,}1$ nicht überschreiten, so daß mit

$$\Phi_m = 1{,}1\ \Phi$$

gerechnet werden kann.

Unter der Voraussetzung, daß die beiden Statorhälften in Reihe geschaltet werden, hat eine Hälfte nur E/2 zu erzeugen. Es war schon betont, daß von jeder Windung nur eine Seite, nicht beide, wie bei den Wechselpolmaschinen, wirksam ist. Bezeichnet daher w_1 die Windungszahl eines Kranzes, so wird

$$\frac{E}{2} = k \cdot f \cdot w_1 \cdot \Phi_{np} \cdot 10^{-8}$$

und da $z_1 = 2\,w_1$ die Leiterzahl eines Kranzes, so wird auch die EMK der ganzen Maschine

$$E = k \cdot f \cdot z_1 \cdot \Phi_{np} \cdot 10^{-8}\ \text{Volt}.$$

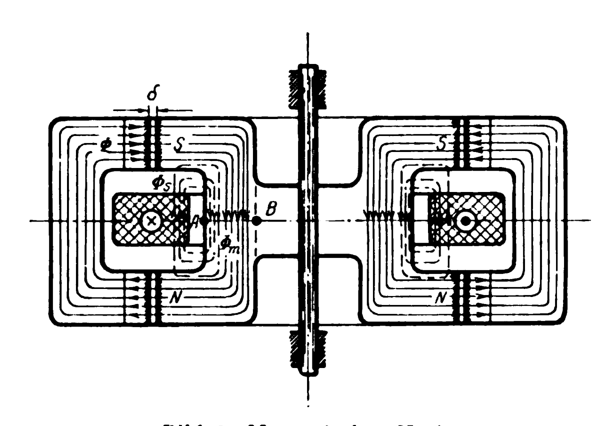


Bild 8. Magnetischer Kreis.

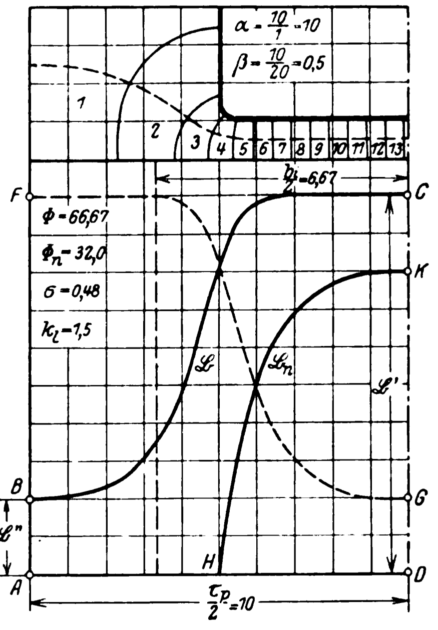


Bild 9. Verteilung des Flusses über die Polteilung bei $\alpha = 10$ und $\beta = 1/2$.

IV. Bestimmung des nützlich verwertbaren Flusses Φ_n.

Der in den Statorspulen verwertbare Fluß Φ_n ist kleiner als der durch den Luftspalt tretende Fluß Φ, weil auch Linien durch die Pollücke gehen. Es ist nun nicht schwer, die Verteilung des Flusses über eine Polteilung τ_p aufzuzeichnen. Eine gute Hilfe bei der Aufzeichnung der Kraftröhren gewährt die von Dr. Lehmann in der ETZ 1909, S. 995 angegebene Methode[1]. Ist die Verteilung des Flusses über die Polteilung ermittelt, so ist daraus Φ_n in einfacher Weise zu konstruieren. Bild 9 gibt zum Beispiel die Verteilung von Φ über τ_p an für den Fall

$$\alpha = \frac{b_n}{\delta} = 10 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{b_n}{\tau_p} = 1/2.$$

Da die Verteilung der Dichten zu der Mittellinie durch die Polzacke symmetrisch ist, braucht nur die eine Hälfte gezeichnet zu werden. Es ist $\frac{\tau_p}{2} = 10$ cm genommen, ebenso die maximale Dichte $\mathfrak{B}'' = 10$ cm. Wäre also auch der Rotor eine ununterbrochene Eisentrommel, die durch den Luftspalt von dem ununterbrochenen Statormantel getrennt ist, so würde auf einer axialen Länge von 1 cm ein Fluß übertreten von $\Phi_l = 10 \cdot 10 = 100\ \text{cm}^2$. Der wirklich bei der unterbrochenen Rotorfläche übertretende Fluß ist durch die Fläche

[1] Niethammer gibt in E. u. M., Wien 1927, S. 346, an, daß auch Béthenod die Lehmannsche Methode benutzt. Ich kenne das Buch von Béthenod nicht.

$$ABCDA = 66{,}67 \text{ cm}^2$$

dargestellt, also

$$\Phi \doteq 66{,}67 \text{ cm}^2.$$

Die Ausnutzung beträgt daher

$$\frac{b_i}{\tau_p} = \alpha_i = \frac{1}{k_l} = \frac{\Phi}{\Phi_i} = 0{,}667 \text{ oder } 66{,}7\,\%.$$

Mit Hilfe der eingezeichneten Röhrenzahl 13,3 ist ebenfalls

$$\alpha_i = \frac{1}{k_l} = \frac{13{,}3}{20} = {}^2/_3$$

oder auch

$$k_l = 1{,}5.$$

Die Verteilung und Größe des nützlich verwertbaren Flusses Φ_n wird erhalten durch Drehen der Fläche ABCD um die Ordinate in $\frac{\tau_p}{4}$ als Achse bis CD nach AF und AB nach DG gekommen ist. Subtrahiert man dann die Ordinaten von AFGD von denen der Fläche ABCD, so ergibt sich die Verteilung von Φ_n. In Bild 9 ergibt sich eine Fläche $HKD = 32 \text{ cm}^2$. Es ist also

$$\Phi_n \doteq 32 \text{ cm}^2 \text{ oder } 32\% \text{ von } \Phi_i.$$

Natürlich läßt sich auch das Verhältnis des nützlich verwertbaren Flusses zu dem wirklich durch den Luftspalt tretenden Fluß angeben. Es ist

$$\sigma = \frac{\Phi_n}{\Phi} = \frac{32}{66{,}67} = 0{,}48.$$

Der nützlich verwertbare Fluß beträgt also 48% des übertretenden Flusses, ein gerade nicht erfreuliches Ergebnis.

Dabei ist das Verhältnis $\alpha = \frac{b_n}{\delta} = 10$, das dem Bild 9 zugrunde gelegt ist, bei der praktischen Ausführung, selbst bei geringen Eisensättigungen schon anzutreffen. Die Ausführung nach Bild 5 hat z. B. bei einer normalen Erregung von 4000 Amperewindungen

$$\alpha = \frac{31{,}4}{3{,}4} = 9{,}25.$$

Es bezeichne noch

$$\varphi_i = \frac{\Phi_n}{\Phi_i} = \frac{\sigma}{k_l}.$$

Für $\alpha = 9{,}25$ ist φ_i noch kleiner als 0,32, wenn daher zu 4000 AW ein Fluß $\Phi_i = 6{,}45 \cdot 10^6$ gehört, so wird der nützlich verwertbare etwa

$$\Phi_n = 0{,}31 \cdot \Phi_i = 0{,}31 \cdot 6{,}45 \cdot 10^6 \cong 2 \cdot 10^6.$$

Da in jeder Statornut nach Bild 5 5 Leiter liegen und die Nutzahl 40 beträgt, so ist mit einem Kappschen Faktor $k = 2{,}15$

$$E_0 = 2{,}15 \cdot 450 \cdot 200 \frac{2 \cdot 10^6}{20} \cdot 10^{-8} = 2{,}15 \cdot 90 = 193{,}5 \text{ Volt.}$$

Dieser Wert steht in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem gemessenen und aus Bild 4 zu entnehmenden von $E_0 = 195$ Volt. Der Berechner hatte nach Bild 4 $E_0 = 262$ erhofft, der Fehler ist demnach

$$f = \frac{67}{195} \cdot 100 \cong 34^1/_2\,\%.$$

Für die praktische Handhabung wird am besten also $\varphi_i = f(\alpha)$ zu bestimmen sein, d. h. bei der Berechnung des magnetischen Kreises sind die Pollücken mit Eisen ausgefüllt zu denken, der Luftquerschnitt ist

$$Q_l = D \cdot \pi \cdot l_i \text{ cm}^2,$$

wenn D = Rotordurchmesser und l_i = axiale Länge eines Kranzes ist. Als Länge der Linien im Luftspalt ist der mit Rücksicht auf die Statornutöffnungen korrigierte Wert

$$\delta' = k_{1s} \cdot \delta$$

einzusetzen.

Ist b_s = Breite der Statornut am Luftspalt, Bild 10, t_{ns} die Statornutteilung, so ist nach Archiv, Band VIII, Seite 334

$$\alpha_s = \frac{b_s}{\delta},$$

$$\beta_s = \frac{b_s}{t_{ns}},$$

$$k_{1s} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_s \cdot \beta_s}{\alpha_s + 5}}.$$

Bild 10. Statornut.

V. Bestimmung von φ_i unter vereinfachenden Annahmen.

Es werde angenommen, unter der Polzacke und in der Pollücke sei die Liniendichte konstant, aber $\mathfrak{B}''$ in der Lücke sei nur ein Bruchteil von $\mathfrak{B}'$ unter der Zacke. Für einen bestimmten, festen Wert von $\mathfrak{B}'/\mathfrak{B}''$ ist dann φ_i als Funktion von $\beta = \frac{b_n}{\tau_p}$ leicht zu berechnen.

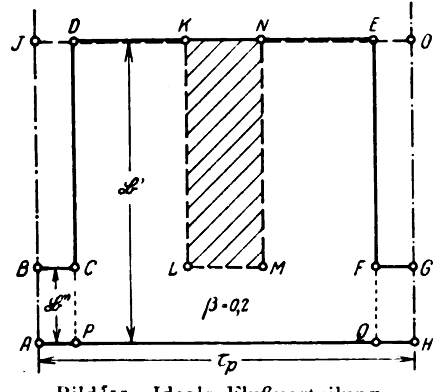


Bild 11. Ideale Flußverteilung.

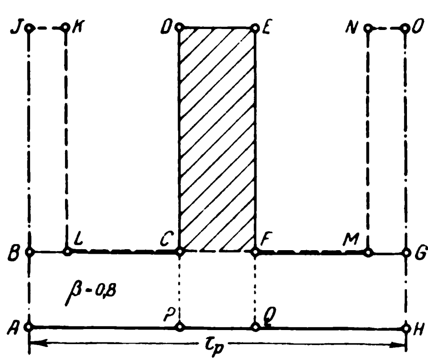


Bild 12. Ideale Flußverteilung.

Für $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''} = 4$ z. B. zeigt Bild 11 die Ermittlung von φ_i mit $\beta = 0{,}2$. Der durch den Luftspalt tretende Fluß ist dargestellt durch die Fläche ABCDEFGH. Der um die beiden Ordinaten in den Entfernungen $\frac{\tau_p}{4}$ gedrehte Fluß ist gekennzeichnet durch die Fläche

AJKLMNOH.

Werden die Ordinaten der beiden Flächen voneinander subtrahiert, so bleibt der nützlich verwertbare Fluß in Gestalt des Rechtecks KLMN; es ist in Bild 11 schraffiert. Wenn wieder AJOH = 100 ist, dann wird KLMN = 15 und folglich

$$\varphi_i = 0{,}15 \text{ oder } 15\%.$$

Mit wachsendem β wird die Fläche KLMN größer, also auch φ_i bis zum Grenzwert $\beta = 0{,}5$. Für Werte von β von $0{,}5 \div 1$ nimmt φ_i wieder bis Null ab. Bild 12 zeigt die Ermittlung von φ_i für $\beta = 0{,}8$.

Der nützliche Fluß, dargestellt durch die Fläche CDEF ist genau so groß als in Bild 11, daher ist auch

$$\varphi_i = 0{,}15.$$

Die Werte des durch den Luftspalt tretenden Flusses sind aber in Bild 11 und 12 verschieden, daher auch die Werte von σ und k_l.

In Bild 11 ist $\Phi = 85$, in Bild 12 dagegen $\Phi = 40$

daher $k_l = 1{,}176$ $\quad$ $k_l = 2{,}5$

$\sigma = 0{,}176$ $\quad$ $\sigma = 0{,}375$.

Bild 13 zeigt für eine Anzahl Werte von β die Größe von σ und k_l unter der Voraussetzung $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''} = 4$. Auch für andere Werte von $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''}$ lassen sich die Abbildungen leicht aufzeichnen. Bild 14 stellt $\sigma = f(\beta)$ dar für 4 verschiedene Werte von $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}''}$.

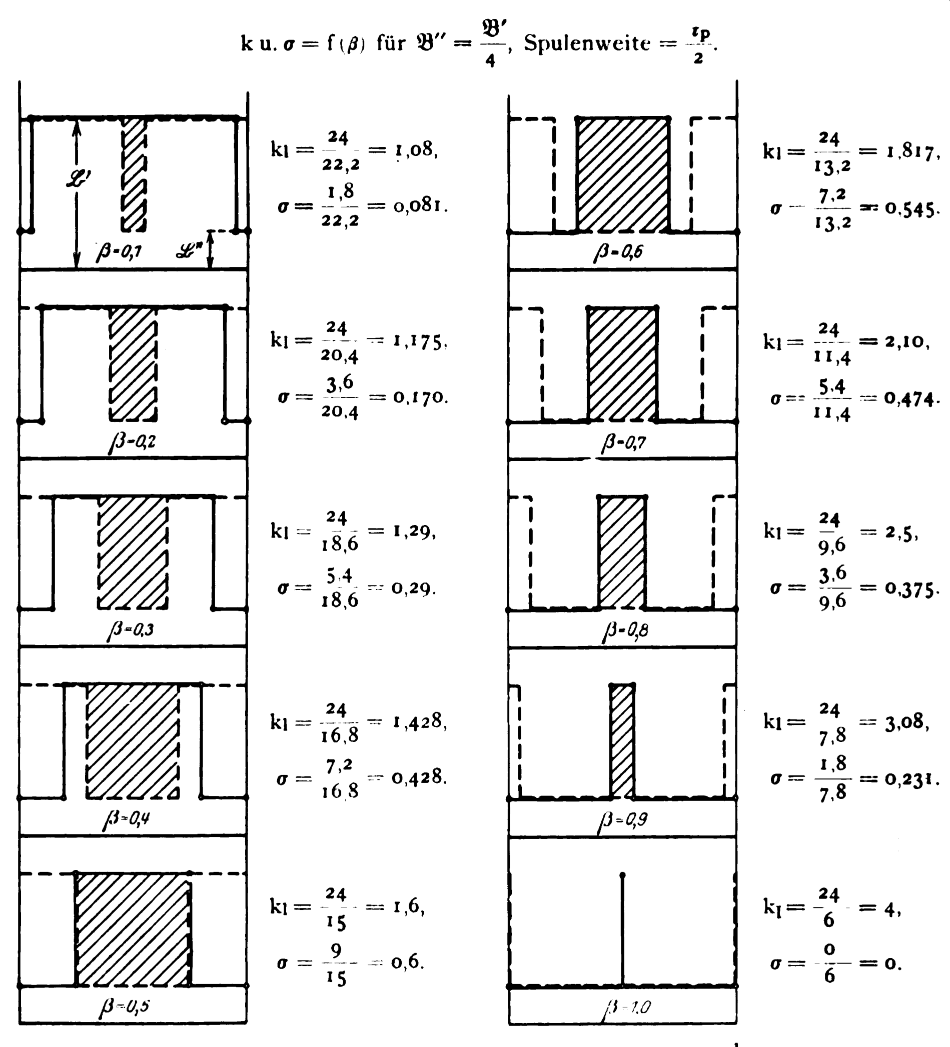


Bild 13. Verwertbarer Fluß Φ_n abhängig von $\beta = \frac{b_n}{\tau_p}$.

Die Werte von σ und φ_l lassen sich auch mit Hilfe des Bildes 11 und 12 analytisch bestimmen, und zwar 1. für $\beta = 0 \div 0{,}5$

2. für $\beta = 0{,}5 \div 1$.

Die Röhrenzahl für $b_n = 0$ ist $\frac{\tau_p}{\delta}$, dargestellt durch AJOH, Bild 11. Unter der Polzacke liegen $\frac{b_z}{\delta}$ Röhren dargestellt durch PDEQ. Durch den Luftspalt treten

$\frac{\tau_p}{k_l \cdot \delta}$ Röhren, daher liegen in der Nut

$\frac{\tau_p}{k_l \cdot \delta} - \frac{b_z}{\delta}$ Röhren, dargestellt durch ABCP + QFGH.

Der verwertbare Fluß ist damit

$$\frac{\tau_p}{\delta} - \frac{b_z}{\delta} - \left(\frac{\tau_p}{k_l \cdot \delta} - \frac{b_z}{\delta}\right) = \frac{\tau_p}{\delta}\left(1 - \frac{1}{k_l}\right),$$

$$\sigma = \frac{\frac{\tau_p}{\delta}\left(1 - \frac{1}{k_l}\right)}{\frac{\tau_p}{\delta \cdot k_l}} = k_l - 1.$$

Für Werte von $\beta = 0 \div 0{,}5$ wird also $\sigma = k_l - 1$ und $\varphi_i = 1 - \frac{1}{k_l}$.

Auch in Bild 12 liegen in der Nut $\frac{\tau_p}{\delta \cdot k_l} - \frac{b_z}{\delta}$ Röhren.

Durch die Fläche PCFQ werden dargestellt

$$\frac{b_z}{b_n}\left(\frac{\tau_p}{\delta \cdot k_l} - \frac{b_z}{\delta}\right) \text{ Röhren.}$$

Der nützlich verwertbare Fluß ist demnach

$$\frac{b_z}{\delta} - \frac{b_z}{b_n}\left(\frac{\tau_p}{\delta \cdot k_l} - \frac{b_z}{\delta}\right),$$

$$\sigma = \frac{\frac{b_z}{\delta} - \frac{b_z}{b_n}\left(\frac{\tau_p}{\delta \cdot k_l} - \frac{b_z}{\delta}\right)}{\frac{\tau_p}{\delta \cdot k_l}},$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)(k_l - 1)$$

$$\varphi_i = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{k_l}\right).$$

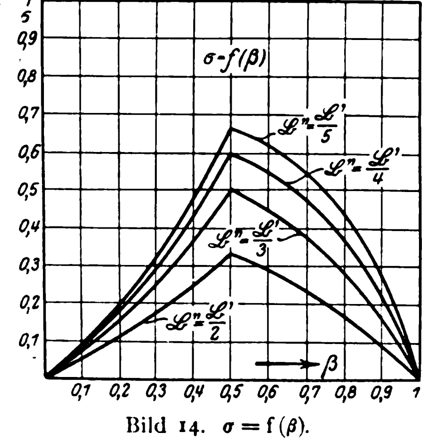


Bild 14. $\sigma = f(\beta)$.

Für $\beta = 1/2$ wird $\sigma = (k_l - 1)$, das heißt die letzten Formeln gehen in die ersten über.

Nun ist $k_l = \frac{1}{1 - \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + 5}}$, wobei $\alpha = \frac{b_n}{\delta}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung $\varphi_i = 1 - \frac{1}{k_l}$ ein, so wird

$$\varphi_i = \frac{\alpha}{\alpha + 5} \cdot \beta \text{ für } \beta = 0 \div 0{,}5.$$

In die Gleichung $\varphi_i = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{k_l}\right)$ eingesetzt ergibt sich

$$\varphi_i = \frac{\alpha}{\alpha + 5}(1 - \beta) \text{ für } \beta = 0{,}5 \div 1.$$

Da aber $\beta_{(0 \div 0{,}5)} = 1 - \beta_{(0{,}5 \div 1)}$ ist, so ist φ_i für beide Intervalle gleich, wie schon aus den Bildern 11 und 12 hervorgegangen ist. Im Falle $\beta = 1/2$ wird

$$\varphi_{i\,(1/2)} = \frac{\alpha}{2\alpha + 10}.$$

Für die 3 Werte $\beta = 0{,}4$, $0{,}5$ und $0{,}6$ ergibt sich ohne jegliche seitliche Streuung folgende Tabelle:

$\beta =$	0,4	0,5	0,6
$\varphi_i =$	$0{,}4 \dfrac{\alpha}{\alpha + 5}$	$0{,}5 \dfrac{\alpha}{\alpha + 5}$	$0{,}4 \dfrac{\alpha}{\alpha + 5}$

Für die praktische Ausführung wird neben $\beta = 0{,}5$ noch $\beta = 0{,}6$ in Frage kommen. Denn ohne jegliche Streuung in die Nut ist ja φ_i genau so groß wie bei $\beta = 0{,}4$ und für letzteren Wert ist der Eisenaufwand größer als bei $\beta = 0{,}6$, weil die Polzacken breiter sind. In Wirklichkeit ist aber φ_i bei $\beta = 0{,}6$ noch größer als der gefundene Wert, was im nächsten Abschnitt nachgewiesen wird.

VI. Wirkliche Größe von φ_i bei $\beta = 0{,}5$ und $\beta = 0{,}6$.

In Bild 9 war schon für $\beta = 0{,}5$ und $\alpha = 10$ gefunden $\sigma = 0{,}48$ bei $k_l = 1{,}5$, also

$$\varphi_i = \frac{\sigma}{k_l} = \frac{0{,}48}{1{,}5} = 0{,}32.$$

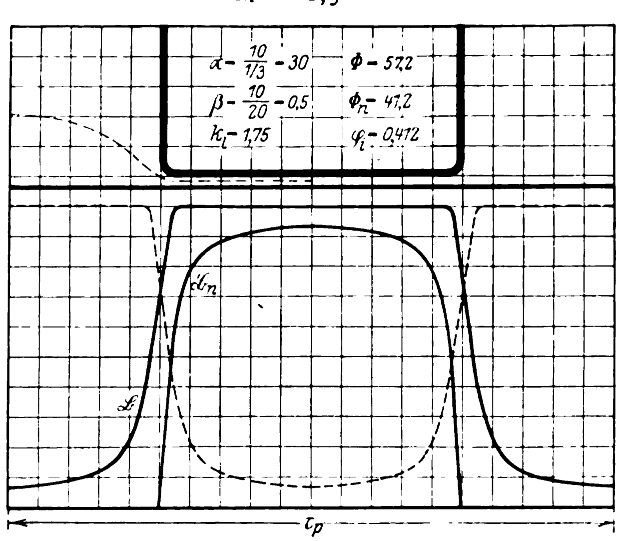


Bild 15. Verteilung des Flusses über die Polteilung bei $\alpha = 30$ und $\beta = {}^1/_2$.

Der wirkliche Wert ist also nur wenig kleiner als der im vorigen Abschnitt gefundene von

$$\varphi_i = 1 - \frac{1}{k_l} = 1 - {}^2/_3 = {}^1/_3 = 0{,}333.$$

Das Verhältnis ist

$$\frac{0{,}32}{0{,}333} = 0{,}96.$$

Wenn nun für $\beta = 0{,}5$ und andere Werte von α auf die gleiche Weise wie in Bild 9 φ_i ermittelt wird, so stellt sich immer wieder das Verhältnis 0,96 heraus. Als weiteres Beispiel zeigt Bild 15 die Ermittlung von φ_i für $\alpha = 30$. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_i = 100 \\ \Phi = 57{,}2 \\ \Phi_n = 41{,}2 \end{array}\right\} \text{bezogen auf die halbe Polteilung,}$$

also $k_l = \dfrac{100}{57{,}2} = 1{,}75$ und

$$\varphi_i = 0{,}412.$$

Ohne seitliche Streuung wäre $\varphi_i = 1 - \frac{1}{k_l} = 1 - \frac{1}{1,75} = 0,43$, daher das Verhältnis $= \frac{0,412}{0,43} = 0,96$. Bild 16 zeigt die Kurven von k_l, σ und φ_i als Funktion von α. Es ist für die wirkliche Verteilung der Linien über die Polteilung

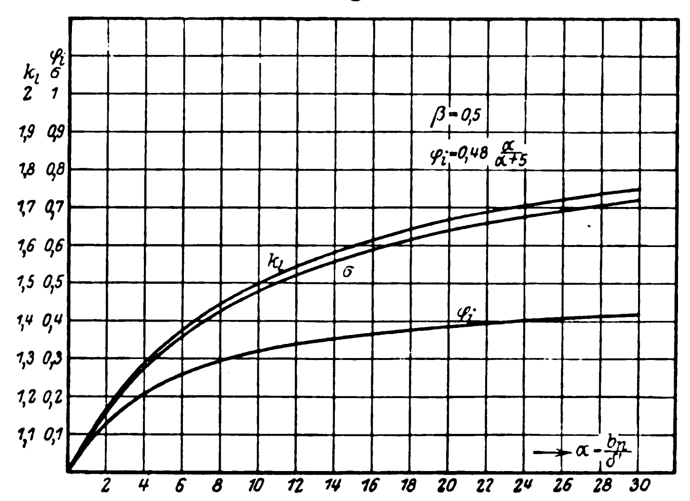


Bild 16. k_l, σ und φ_i als Funktionen von α.

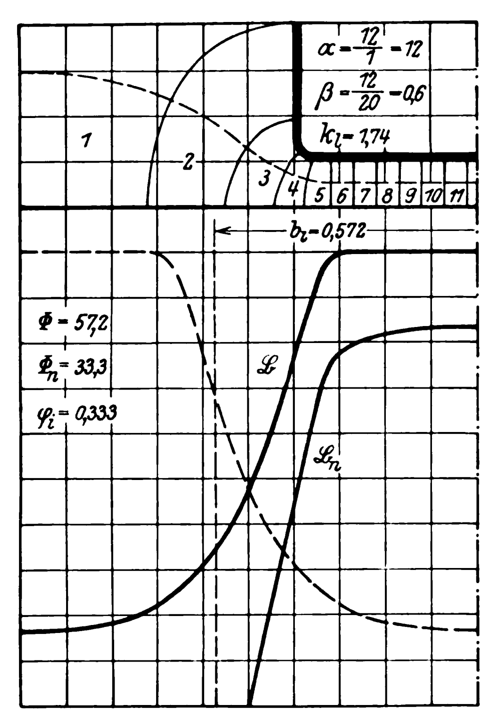


Bild 17. Verteilung des Flusses über die Polteilung bei $\beta = 0,6$ und $\alpha = 12$.

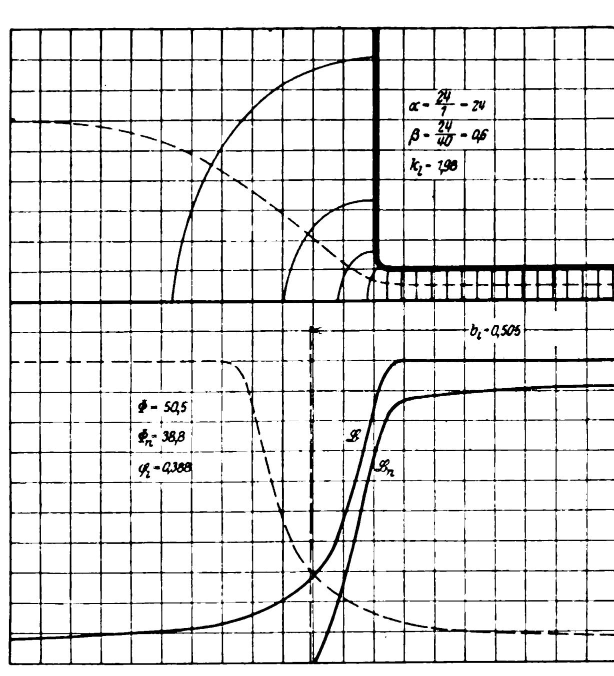


Bild 18. Verteilung des Flusses über die Polteilung bei $\beta = 0,6$ und $\alpha = 24$.

$$\varphi_i = 0,48 \frac{\alpha}{\alpha + 5},$$

wobei $\alpha = \frac{b_n}{\delta'}$.

Für $\beta = 0,6$ ist in Bild 17 und 18 φ_i ermittelt. In Bild 17 ist $\alpha = 12$ und $\varphi_i = 0,333$. Nach der Gleichung gilt ohne Streuung in die Nut

$$\varphi_i = 0,4 \frac{\alpha}{\alpha + 5} = 0,4 \frac{12}{17} = 0,282.$$

Der wirkliche Wert ist also $\frac{0,333}{0,282} = 1,18$ mal so groß, so daß

$$\varphi_i = 0,47 \frac{\alpha}{\alpha + 5}$$

wird.

Derselbe Wert ergibt sich aus Bild 18, denn dort ist $\varphi_i = 0,388$ und ohne Streuung wäre

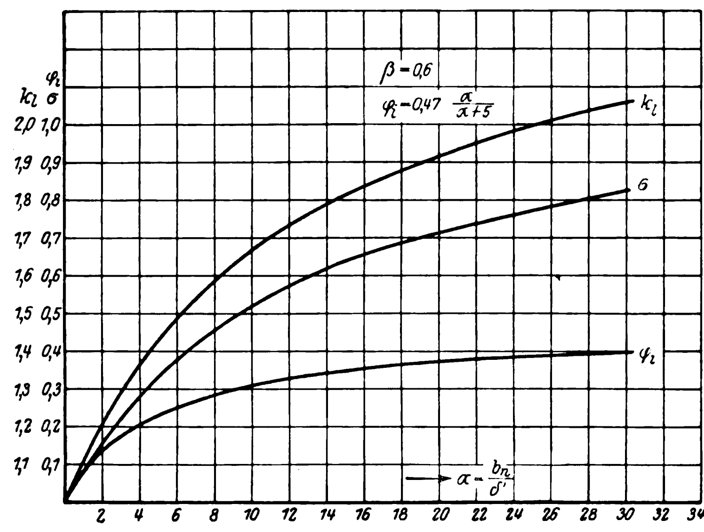


Bild 19. k_l, σ und φ_i als Funktionen von α.

$$\varphi_i = 0,4 \frac{24}{29} = 0,331,$$

$$\frac{0,388}{0,331} = 1,18.$$

Für $\beta = 0,6$ ergibt sich also fast dieselbe nützliche Linienzahl wie für $\beta = 0,5$.

Bild 19 zeigt wieder, wie schon Bild 16 für $\beta = 0,5$, k_l, σ und φ_i abhängig von α.

Die wirklichen Werte für das Verhältnis $\frac{\Phi_n}{\Phi}$ sind

bei $\beta = 0,5$ $\quad \sigma = 0,96\ (k_l - 1)$ statt $\sigma = (k_l - 1)$
bei $\beta = 0,6$ $\quad \sigma = 0,786\ (k_l - 1)$ „ $\sigma = 0,667\ (k_l - 1)$.

Werden die Kraftröhrenbilder unter der Voraussetzung $\frac{\alpha}{\beta} =$ konstant aufgezeichnet, so ergeben sich Abhängigkeiten nach Bild 20 und 21. Für Bild 20 gilt $\frac{\alpha}{\beta} = 10$ und für Bild 21 ist $\frac{\alpha}{\beta} = 20$. Es zeigt sich, daß größere Werte als $\beta = 0,6$ wieder kleinere Werte von φ_i ergeben.

VII. Aufstellung der Leerlaufcharakteristik.

Nach Annahme bzw. Festlegung der Abmessungen des magnetischen Kreises sind die Querschnitte und mittleren Längen der Induktionslinien bekannt. Mit



ihnen wird auf die bekannte Weise die Abhängigkeit $\Phi_i = f(AW_s)$ aufgestellt. AW_s ist die Amperewindungszahl für den magnetischen Kreis. Es ergibt sich die bekannte Kurve Bild 22. Nach Ziehen der Luftlinie, die mit Hilfe des korrigierten Luftspalts δ' berechnet wird, ergibt sich für irgendeine AW_s-Zahl OD der zugehörige Wert von α aus

$$\alpha = \frac{AB}{AC} \cdot \alpha' = DF,$$

wobei

$$\alpha' = \frac{b_n}{\delta'}$$

ist.

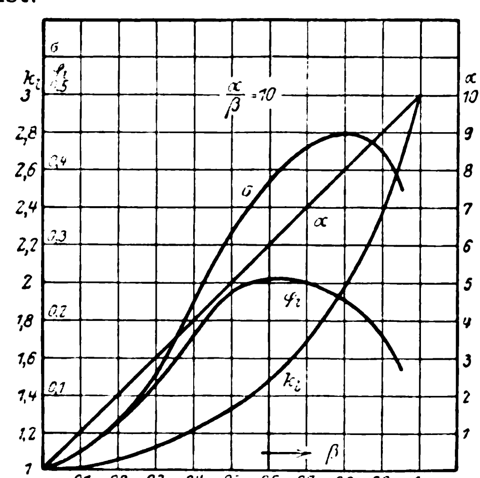


Bild 20. k_l, σ und φ_i als Funktionen von β.

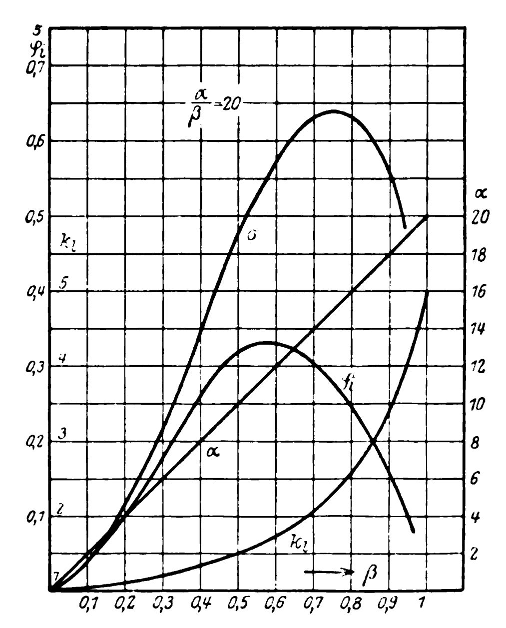


Bild 21. k_l, σ und φ_i als Funktionen von β.

Zu dem jeweiligen α berechnet sich φ_i aus

$$\varphi_i = 0{,}48 \frac{\alpha}{\alpha + 5} \quad \text{für } \beta = 0{,}5,$$

$$\varphi_l = 0{,}47 \frac{\alpha}{\alpha + 5} \quad \text{für } \beta = 0{,}6.$$

Aus $\Phi_n = \varphi_i \cdot \Phi_i$ ergibt sich dann die EMK mit Hilfe von

$$E = k \cdot f \cdot z_1 \cdot \Phi_{np} \cdot 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Beispiel: Die in Bild 5 dargestellte Maschine hat folgende Querschnitte des magnetischen Kreises:

Luftquerschnitt $Q_l = D \cdot \pi \cdot l_i = 39{,}9 \cdot \pi \cdot 7 = 875$ cm²,
Querschnitt der Statorzähne $Q_z = 40 \cdot 2{,}3 \cdot 7 \cdot 0{,}9 = 580$ cm²,
„ des Statorjoches $Q_{js} = 50{,}5 \cdot \pi \cdot 3 = 476$ cm²
„ des Rotorjoches $Q_{jr} = 28{,}5 \cdot \pi \cdot 5 \frac{1}{1{,}1} = 400$ cm².

Um nicht mit verschiedenen Werten des Flusses rechnen zu müssen, ist der Rotorjochquerschnitt um 10% verkleinert, entsprechend 10% Streuung. Die Längen in den einzelnen Teilen werden Bild 5 entnommen, sie sind in der folgenden Tabelle eingetragen.

Die Polteilung ist bei 20 Zacken

$$\tau_p = \frac{40 \cdot \pi}{20} = 6{,}28 \text{ cm},$$

also bei $\beta = 0{,}5$

$$b_n = 3{,}14 \text{ cm}.$$

Die Nutöffnung der Statornuten ist $b_s = 4$ mm, $\delta = 2{,}25$ mm.

$$\alpha_s = \frac{b_s}{\delta} = \frac{4}{2{,}25} = 1{,}78,$$

$$\beta_s = \frac{b_s}{t_{n\,s}} = \frac{4}{31{,}4} = 0{,}127.$$

$$k_{1\,s} = \frac{1}{1 - \dfrac{1{,}78 \cdot 0{,}127}{6{,}78}} = 1{,}034,$$

$$\delta' = 2{,}25 \cdot 1{,}034 = 2{,}33 \text{ mm},$$

$$\alpha' = \frac{b_n}{\delta'} = \frac{31{,}4}{2{,}33} = 13{,}5.$$

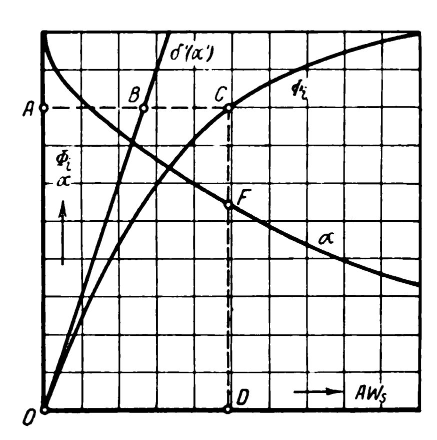


Bild 22. $\Phi_i = f(AW_s)$.

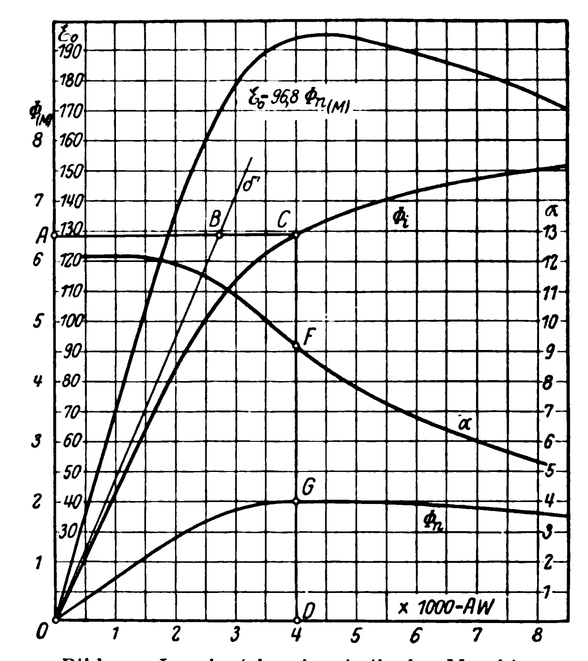


Bild 23. Leerlaufcharakteristik der Maschine Bild 5 berechnet.

Teil des magnet. Kreises	Q	l	$\Phi_i = 2{,}5 \cdot 10^6$			$\Phi_i = 5 \cdot 10^6$			$\Phi_i = 6 \cdot 10^6$			$\Phi_i = 7{,}5 \cdot 10^6$		
			$\mathfrak{B}$	aw	AW	$\mathfrak{B}$	aw	AW	$\mathfrak{B}$	aw	AW	$\mathfrak{B}$	aw	AW
Luft	875	0,466	2860	—	1065	5720	—	2130	6850	—	2550	8580	—	3195
Statorzähne	580	4	4300	1,4	6	8600	4,3	17	10300	6,5	26	12900	12	50
Statorjoch	476	30	5260	2	60	10520	4	120	12600	7	210	15780	28	840
Rotorjoch	400	30	6250	2	60	12500	7	210	15000	18	540	18750	130	3900
$AW_s =$					1191			2477			3326			7985

In Bild 23 ist Φ_i als Funktion von AW_s aufgetragen. Für $AW_s = 4000$, z. B. ist $\Phi_i = DC = 6{,}45 \cdot 10^6$. Dazu gehört

$$\alpha = \frac{AB}{AC} \cdot 13{,}5 = \frac{5{,}45}{8} \cdot 13{,}5 = 9{,}2 = DF.$$

Damit wird

$$\varphi_i = 0{,}48 \frac{9{,}2}{9{,}2 + 5} = 0{,}31,$$

also

$$\Phi_n = \varphi_i \cdot \Phi_i = 0{,}31 \cdot 6{,}45 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6.$$

Mit $k = 2{,}15$, $f = 450$ und $z_1 = 200$ wird daher

$$E_0 = 2{,}15 \cdot 450 \cdot 200 \frac{\Phi_n}{20} \cdot 10^{-8} = 96{,}8 \cdot \Phi_n = 96{,}8 \cdot 2 = 193{,}6.$$

Auf dieselbe Weise werden weitere Punkte der E_0-Kurve bestimmt, ein Vergleich von Bild 23 und 4 ergibt eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung.

Zur Wärmetheorie des elektrischen Durchschlages.

Von

V. Fock, Leningrad.

1. Das Wesen des Wärmedurchschlages.

Durch eine Reihe von neuzeitlich erschienenen Arbeiten[1] kann es als festgestellt gelten, daß bei hohen Temperaturen der elektrische Durchschlag von Isolatoren nach der sogenannten Wärmetheorie geschieht.

Dieser Theorie liegt die folgende Idee zugrunde[2]: Die an den Isolator angelegte Spannung ruft in ihm einen elektrischen Strom hervor, wobei eine entsprechende Joulesche Wärmemenge ausgeschieden wird. Die dadurch verursachte Erwärmung des Isolators hat eine Vergrößerung der elektrischen Leitfähigkeit und somit auch des Stromes zur Folge, was eine erhöhte Ausscheidung der Jouleschen Wärme und ein weiteres Anwachsen der Temperatur des Isolators verursacht.

Wird der Isolator von außen gut gekühlt und ist die angelegte Spannung nicht allzu hoch, so kann sich ein stationärer Zustand einstellen, bei dem die ganze im Isolator ausgeschiedene Wärmemenge nach außen abgeleitet wird und keine weitere Temperaturerhöhung stattfindet.

Im Gegenfall, wo der Isolator mangelhaft gekühlt wird und eine bedeutende Spannung angelegt ist, kommt es zu keinem stationären Zustand: die Temperatur wächst unbegrenzt und der Isolator wird durchgeschlagen.

Wird die Abkühlung des Isolators nicht geändert, sondern nur das Potential variiert, so ist der stationäre Zustand nur bei solchen Spannungen möglich, die einen bestimmten kritischen Wert nicht übertreffen. Diesen kritischen Wert der Spannung wollen wir die Durchschlagspannung nennen.

Es sei hier bemerkt, daß die maximale Temperatur im Inneren des Isolators in dem extremen (d. h. der größtmöglichsten Spannung entsprechenden) stationären Zustand[3] bedeutend niedriger als diejenige im Augenblick des Durchschlages sein kann.

2. Grundgleichungen.

Bei der mathematischen Stellung des Problems müssen gleichzeitig sowohl die Potential- als auch die Temperaturverteilung betrachtet werden. Die Grundgleichungen des stationären Zustandes lauten:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \sigma (\operatorname{grad} \varphi)^2 = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 0. \tag{2}$$

Hier ist T die (absolute) Temperatur, φ das Potential, k die Wärmeleitfähigkeit und $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ die elektrische Leitfähigkeit des Isolators (ϱ spezifischer Widerstand).

In der Gleichung (1) stellt das erste Glied die aus der Volumeinheit in der Zeiteinheit abgeführte Wärmemenge und das zweite Glied die im selben Volumen

[1] Vgl. L. Inge, N. Semenoff und A. Walther, Zeitschr. f. Physik. **32**, 273, 1925; ebenda **34**, 15, 1925; ebenda **37**, 292, 1926. Arch. f. Elektrot. XVII, 453, 1927.

[2] Vgl. Wagner, J. A. I. E. E. 1034, 1922. — Rogowski, Arch. f. Elektrot. XII, 153, 1924. — Kármán, ebenda XIII, 174, 1924.

[3] Es könnte auch der Fall eintreten, daß diese maximale Temperatur T_m die Schmelz- (oder Zerstörungs-) Temperatur T_k übertrifft; dann geschieht der Durchschlag schon früher, nämlich wenn $T_m = T_k$ wird.

Im folgenden werden wir aber annehmen, daß $T_m < T_k$ ist, was auch in der Mehrzahl der in Betracht kommenden Fälle wohl zutreffen wird.

und in derselben Zeit entwickelte Joulesche Wärmemenge dar. Durch die Gleichung (1) wird folglich das Wärmegleichgewicht der Volumeinheit des Isolators zum Ausdruck gebracht.

In der Gleichung (2) ist die Größe

$$\sigma \cdot \operatorname{grad} \varphi = j \tag{3}$$

der Vektor der elektrischen Stromdichte. Diese Gleichung drückt also die Abwesenheit von Stromquellen im Isolator aus.

Zu diesen Gleichungen müssen noch die Grenzbedingungen für das Potential und die Temperatur hinzugefügt werden.

Sind die Grenzbedingungen für die Temperatur gegeben, so hat man zur Bestimmung der Durchschlagspannung zu untersuchen, welche Grenzbedingungen für das Potential eine reelle Lösung der obigen Gleichungen zulassen. Der größte Wert der angelegten Spannung, bei dem eine solche Lösung noch existiert, ist die Durchschlagspannung[1].

Selbstverständlich ist die Durchschlagspannung je nach den thermischen Grenzbedingungen, d. h. je nach der Art der Kühlung des Isolators verschieden.

In unseren Gleichungen sind sowohl k als auch σ Funktionen der Temperatur. Die Temperaturabhängigkeit von σ ist für die Existenz des Wärmedurchschlags wesentlich. Wäre die elektrische Leitfähigkeit konstant, so würde für beliebige Grenzbedingungen für die Temperatur und das Potential eine Lösung der obigen Gleichungen existieren. Die Unmöglichkeit des thermischen Gleichgewichts könnte dann nicht als Ursache des Durchschlages betrachtet werden.

Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich folgendermaßen umformen: Multipliziert man die zweite Gleichung mit $\varphi - \varphi_0$, wo φ_0 eine willkürliche Konstante ist, und addiert sie zur ersten, so bekommt man:

$$\operatorname{div} \{ k \operatorname{grad} T + \sigma (\varphi - \varphi_0) \operatorname{grad} \varphi \} = 0. \tag{4}$$

Fügt man (4) noch die Gleichung

$$\operatorname{div} (\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 0 \tag{2}$$

hinzu, so erhält man ein System, das dem ursprünglichen System (1) und (2) äquivalent ist.

3. Eine Partikularlösung der Gleichungen.

Eine Untersuchung der soeben aufgestellten Gleichungen in ihrer allgemeinen Form läßt sich wohl kaum durchführen. Wir werden uns deshalb mit der Betrachtung einiger Spezialfälle beschränken.

Bezeichnen wir mit u das unbestimmte Integral

$$u = -\int^{T} 2\, k(T)\, \varrho(T)\, dT, \tag{5}$$

so können wir die Gleichung (4) in folgender Form schreiben:

$$\operatorname{div} \{ \sigma \operatorname{grad} [u - (\varphi - \varphi_0)^2] \} = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung läßt die Lösung

$$u = (\varphi - \varphi_0)^2 + \text{const} \tag{7}$$

zu. Die letztere Gleichung ist mit der Forderung gleichbedeutend, daß die Potentialniveaus mit den isothermischen Flächen zusammenfielen. Diese Forderung kann den Grenzbedingungen widersprechen. Lassen jedoch die letzteren eine solche Forderung zu, so wird die ganze Aufgabe bedeutend vereinfacht. Dann ist nämlich $\sigma\, d\varphi$ das exakte Differential einer Funktion w, die, der Formel (2) gemäß, der Laplaceschen Gleichung genügt. Aus den Grenzbedingungen für die Spannung und die Temperatur lassen sich diejenigen für w bestimmen. Aus den letzteren

[1] Falls in einer solchen Lösung $T_m > T_k$ ausfällt, bestimmt sich die Durchschlagspannung nicht mehr aus der Bedingung der Existenz einer reellen Lösung, sondern aus der Bedingung $T_m = T_k$.

läßt sich weiter auch die Funktion w selbst berechnen. Sowohl die Grenzbedingungen als auch die Funktion w enthalten mehrere unbekannte Parameter [die in der Formel (7) auftretenden Konstanten, die maximale Temperatur im Innern des Isolators usw.]. Diese Parameter hat man dann aus einer entsprechenden Anzahl von Gleichungen zu bestimmen. Dem Durchschlag wird der Fall entsprechen, wo eine solche Bestimmung unmöglich ist; die mathematische Bedingung dazu ist das Verschwinden des entsprechenden Jacobians.

Die Forderung (7) wird von selbst erfüllt, falls alle Funktionen nur von einer Koordinate abhängen, d. h. wenn wir es mit einem eindimensionalen Problem zu tun haben. Diese Aufgabe werden wir im folgenden eingehender betrachten.

Was das räumliche Problem betrifft, so begnügen wir uns mit der folgenden Bemerkung: Sind auf zwei getrennten Teilen der Oberfläche des Isolators bestimmte konstante Temperaturen und bestimmte konstante Spannungen vorgeschrieben und läßt die übrige Oberfläche weder Wärme $\left(k \frac{\partial T}{\partial n} = 0\right)$, noch Strom $\left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0\right)$ durch, so existiert eine Lösung unserer Gleichungen, welche der Forderung (7) genügt. Die das Potential einschränkende Bedingung kann in diesem Falle ohne Integration der Differentialgleichungen der Gleichung (7) entnommen werden.

4. Zweidimensionales Problem.

Im zweidimensionalen Fall lassen sich die Gleichungen (4) und (2) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x} + \sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y} + \sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0. \tag{9}$$

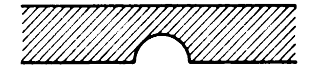


Bild 1. Ursprüngliches einfach zusammenhängendes Gebiet.



Bild 2. Transformiertes einfach zusammenhängendes Gebiet.

Bild 3. Ursprüngliches zweifach zusammenhängendes Gebiet. Erstes Beispiel.

Bild 4. Ursprüngliches zweifach zusammenhängendes Gebiet. Zweites Beispiel.

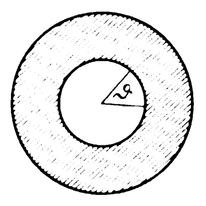


Bild 5. Transformiertes zweifach zusammenhängendes Gebiet.

Die Gleichungen behalten ihre Form, wenn man statt x und y andere „isothermische" Koordinaten, ξ und η einführt, die mit den ursprünglichen durch die Beziehung

$$x + i y = f(\xi + i \eta) \tag{10}$$

verknüpft sind.

Diese Invarianzeigenschaft der Gleichungen erlaubt zuweilen, die gegebene Aufgabe auf eine einfachere zurückzuführen.

Falls der Querschnitt des Isolators ein einfach zusammenhängendes, durch zwei beliebige unendliche Kurven begrenztes Gebiet (Bild 1) darstellt, läßt er sich auf ein anderes durch zwei parallele Geraden begrenztes Gebiet konform abbilden (Bild 2). Ist das gegebene Gebiet zweifach zusammenhängend (Bild 3 und 4), so läßt es sich auf ein durch zwei konzentrische Kreise begrenztes ringförmiges Gebiet abbilden (Bild 5). Die Untersuchung der Gleichungen für das transformierte Gebiet ist in der Regel einfacher als für das ursprüngliche Gebiet.

Falls die auf den Grenzen des ursprünglichen Gebietes vorgeschriebene Relation zwischen der Temperatur und dem Wärmestrom in eine solche mit konstanten Koeffizienten übergeht, wird die Aufgabe eindimensional. Diese Aufgabe wollen wir im nächsten Paragraphen ausführlich behandeln.

5. Eindimensionales Problem.

Der einfachste und wichtigste Fall ist der, wo alle Funktionen nur von einer Koordinate abhängen. Wir wollen den Fall eingehender betrachten, wo der Isolator die Form einer unendlichen ebenen Platte hat. Die Dicke der Platte sei $2h$ und diejenige der anliegenden flachen Elektroden sei δ (Bild 6)[1].

Alle Größen hängen nur von der Koordinate z ab. Für das erste Medium (Isolator) lauten dann die Gleichungen (4) und (2):

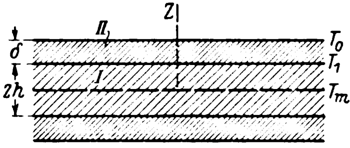


Bild 6. Isolator, plattenförmig.

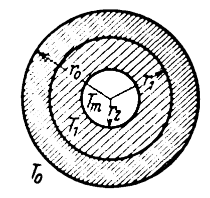


Bild 7. Isolator, zylinderförmig.

$$\frac{d}{dz}\left(k_1 \frac{dT}{dz} + \sigma \varphi \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\sigma \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0. \tag{12}$$

Für das zweite Medium (Elektrode) ist das Potential überall konstant, und die Temperatur ist eine lineare Funktion von z. Die Grenzbedingungen für das Potential an der Grenzfläche Isolator—Elektrode lauten:

$$z = h \quad \varphi = \varphi_1; \qquad z = -h \quad \varphi = -\varphi_1. \tag{13}$$

Die Grenzbedingungen für die Temperatur an derselben Fläche sind:

$$z = h \left\{ \begin{array}{l} (T)_{h-0} = (T)_{h+0} = T_1 \\ \left(k_1 \frac{dT}{dz}\right)_{h-0} = \left(k_2 \frac{dT}{dz}\right)_{h+0} \end{array} \right\} \tag{14}$$

und an der äußeren Grenzfläche der Elektrode:

$$z = h + \delta \qquad k_2 \frac{dT}{dz} + \lambda (T - T_0) = 0. \tag{15}$$

In diesen Formeln ist k_2 die Wärmeleitfähigkeit der Elektroden, λ die äußere Wärmeleitfähigkeit, T_0 die gegebene Temperatur des umgebenden Raumes, T_1 die noch unbekannte Temperatur an der Grenzfläche Elektrode—Isolator. Für den Fall,

[1] Diese Anordnung entspricht ungefähr den experimentellen Verhältnissen.

wo die Temperatur der äußeren Grenzfläche der Elektrode vorgeschrieben und gleich T_0 ist, muß man $\lambda = \infty$ setzen.

Die Grenzbedingungen für die untere Elektrode sind ganz analog; wir werden sie deshalb hier nicht anführen. Es ist klar, daß die Temperatur zur Mittelfläche des Isolators ($z = 0$) symmetrisch verteilt sein wird. In dieser Mittelschicht wird die Temperatur ihren maximalen Wert $T = T_m$ erreichen. Das Potential wird in dieser Ebene gleich Null sein.

Aus der Formel (12) folgt

$$\sigma \frac{d\varphi}{dz} = j, \tag{16}$$

wo j die konstante Stromdichte bedeutet. Unter Berücksichtigung von (16) ergibt sich aus (11):

$$k_1 \frac{dT}{dz} + j\varphi = 0, \tag{17}$$

da ja bei $\varphi = 0$ die Temperatur ihren maximalen Wert erreicht. Weiterhin ist

$$\varphi^2 = \int_T^{T_m} 2\varrho(T)\,k(T)\,dT = u(T) - u(T_m). \tag{18}$$

Führen wir (18) in (17) ein, so bekommen wir

$$k_1 \frac{dT}{dz} + j\sqrt{u(T) - u(T_m)} = 0 \tag{19}$$

und folglich

$$j \cdot z = \int_T^{T_m} \frac{k_1(T)\,dT}{\sqrt{u(T) - u(T_m)}}. \tag{20}$$

Dies ist die Lösung unserer Gleichungen für das erste Medium.

Für das zweite Medium erhalten wir, unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen (14) und (15)

$$T = T_1 - g\frac{z-h}{h}(T_1 - T_0), \tag{21}$$

wo

$$g = \frac{\lambda h}{k_2 + \lambda\delta} \tag{22}$$

gesetzt ist.

Damit der Forderung der Stetigkeit der Temperatur und des Wärmestromes an der Grenzfläche Isolator—Elektrode genügt wird, müssen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} j \cdot h &= \int_{T_1}^{T_m} \frac{k_1(T)\,dT}{\sqrt{u(T) - u(T_m)}} \\ j \cdot \varphi_1 &= g\frac{k_2}{h}(T_1 - T_0) \\ \varphi_1^2 &= u(T_1) - u(T_m) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

bestehen.

Wir eliminieren nun die unbekannte Stromdichte j und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} F_1(T_1, T_m) &= \int_{T_1}^{T_m} \frac{k_1(T)\,dT}{\sqrt{u(T) - u(T_m)}} - g\frac{k_2}{\varphi_1}(T_1 - T_0) = 0 \\ F_2(T_1, T_m) &= u(T_1) - u(T_m) - \varphi_1^2 = 0 \end{aligned}\right| \tag{24}$$

Aus diesem Gleichungssystem müssen die beiden Unbekannten T_1 und T_m berechnet werden. Dazu hat man die beiden Gleichungen nach T_1 und T_m auf-

zulösen. Die Unmöglichkeit einer solchen Auflösung charakterisiert den kritischen Wert des Potentials, d. h. die Durchschlagspannung. Die mathematische Bedingung dafür ist das Verschwinden der Funktionaldeterminante der Funktionen F_1 und F_2 nach den Veränderlichen T_1 und T_m. Wir erhalten also zur Bestimmung der Durchschlagspannung die weitere Gleichung

$$\frac{\partial F_1}{\partial T_1}\frac{\partial F_2}{\partial T_m} - \frac{\partial F_1}{\partial T_m}\frac{\partial F_2}{\partial T_1} = 0. \tag{25}$$

Führt man in (25) das Differenzieren aus, so ergibt sich:

$$\frac{g\,k_2}{\varphi_1} - \varrho(T_1)\,k_1(T_1)\int_{T_1}^{T_m}\frac{\sigma'(T)\,dT}{\sqrt{u(T)-u(T_m)}} = 0. \tag{26}$$

Durch die drei Gleichungen (24) und (26) werden die Durchschlagspannung, die Dicke des Isolators (Parameter g) und die äußere Temperatur T_0 durch die beiden Hilfsvariablen T_1 und T_m parametrisch ausgedrückt.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß alle in diesem Abschnitt angeführten Betrachtungen auch in dem Falle ihre Geltung beibehalten, wo der Isolator und die Elektrode die Form zylindrischer Kreisschichten haben (vgl. Bild 7), wobei das Potential der inneren Elektrode gleich Null, dasjenige der äußeren Elektrode gleich φ_1 ist. Man müßte nur in diesem Fall z durch lg r (lg natürlicher Logarithmus) ersetzen. Für die Größe g, die in unseren Endformeln (24) und (26) auftritt, würde sich dann der Ausdruck

$$g = \frac{\lambda\,r_0(\lg r_1 - \lg r_2)}{k_2 + \lambda\,r_0(\lg r_0 - \lg r_1)} \tag{27}$$

ergeben, wo die Bedeutung von r_0, r_1 und r_2 aus Bild 7 entnommen werden kann.

6. Die zahlenmäßige Berechnung. Erster Fall.

Es sei die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes des Isolators durch die Formel

$$\varrho = \varrho_1\,e^{-\frac{T}{\Theta}} \tag{28}$$

gegeben, die Wärmeleitfähigkeit aber von der Temperatur unabhängig[1]. In diesem Fall lassen sich alle Integrale in geschlossener Form berechnen.

Für die Funktion u bekommt man den Wert:

$$u = 2\,k_1\,\varrho_1\,\Theta\,e^{-\frac{T}{\Theta}}. \tag{29}$$

Führt man nun der Kürze halber die Bezeichnungen

$$\frac{T}{\Theta} = x; \quad \frac{\varphi_1}{\sqrt{2\,\varrho_1\,k_1\,\Theta}} = v; \quad g\frac{k_2}{k_1} = c \tag{30}$$

ein, so lassen sich die Gleichungen (24) und (26) folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_m}\frac{dx}{\sqrt{e^{-x}-e^{-x_m}}} - \frac{c}{v}(x_1 - x_0) = 0 \\ &e^{-x_1} - e^{-x_m} - v^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\frac{c}{v} - e^{-x_1}\int_{x_1}^{x_m}\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{-x}-e^{-x_m}}} = 0. \tag{32}$$

---

[1] Die möglicherweise vorhandene Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit ist praktisch im Vergleich mit derjenigen des Widerstandes unbedeutend.

[2] $\exp(x) = e^x$.

Führt man noch den Parameter α durch die Beziehung

$$\cos\alpha = e^{\frac{1}{2}(x_1 - x_m)}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{33}$$

ein, und drückt man x_m durch x_1 und α aus, so kommt man zu dem Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} &2\alpha\sec\alpha\, e^{\frac{1}{2}x_1} - \frac{c}{v}(x_1 - x_0) = 0 \\ &e^{-x_1}\sin^2\alpha - v^2 = 0 \\ &\frac{c}{v} - e^{\frac{1}{2}x_1}\sec^3\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Eliminiert man in (34) die Größe x_1, so bekommt man eine parametrische Darstellung der Durchschlagspannung und der Dicke des Isolators durch den Parameter α:

$$\left.\begin{aligned} &c = \sin\alpha\sec^3\alpha\,(1 + \sin\alpha\cos\alpha) \\ &v = e^{-\frac{1}{2}x_0}\,\psi(\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

wo

$$\psi(\alpha) = \sin\alpha\cdot\exp\left(-\frac{\alpha\cos^2\alpha}{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 \tag{36}$$

gesetzt ist.

In dem soeben betrachteten Spezialfall drückt sich die Durchschlagspannung (35) als Produkt von zwei Faktoren aus, von denen einer nur von der Temperatur, der andere nur von der Dicke des Isolators abhängt. Für große Werte von c (d. h. bei guter Kühlung und für beträchtliche Dicken der Isolatorschicht) ist der Hilfswinkel α nahe gleich $\frac{\pi}{2}$ und $\psi(\alpha)$ nahe gleich 1. In diesem Falle hängt das Potential v nur wenig von der Dicke ab und strebt mit wachsendem c dem Grenzwert $e^{-\frac{1}{2}x_0}$ zu. In allen Fällen ist die Durchschlagspannung kleiner als dieser Grenzwert. Aus den Formeln (35) folgt außerdem, daß das Produkt der Durchschlagspannung mit der Quadratwurzel der Leitfähigkeit von der Temperatur nicht abhängt.

Tabelle 1.

α^0	c	$\psi(\alpha)$	α^0	c	$\psi(\alpha)$
0	0,0000	0,0000	45,0	2,571	0,5210
2,5	0,0038	0,0265	47,5	3,173	0,5544
5,0	0,0154	0,0530	50,0	3,937	0,5882
7,5	0,0349	0,0796	52,5	4,921	0,6224
10,0	0,0628	0,1064	55,0	6,207	0,6568
12,5	0,0999	0,1334	57,5	7,920	0,6913
15,0	0,1470	0,1606	60,0	10,28	0,7256
17,5	0,2053	0,1881	62,5	13,52	0,7597
20,0	0,2764	0,2160	65,0	18,22	0,7930
22,5	0,3621	0,2442	67,5	25,25	0,8255
25,0	0,4654	0,2730	70,0	36,27	0,8566
27,5	0,5886	0,3020	72,5	54,44	0,8860
30,0	0,7364	0,3317	75,0	86,86	0,9131
32,5	0,9139	0,3618	77,5	150,6	0,9375
35,0	1,128	0,3925	80,0	294,8	0,9587
37,5	1,387	0,4238	82,5	699,7	0,9761
40,0	1,702	0,4557	85,0	2363	0,9891
42,5	2,090	0,4880	87,5	18909	0,9972
45,0	2,571	0,5210	90,0	∞	1,0000

Um das Berechnen der Durchschlagspannung zu erleichtern, sind in der Tabelle I[1] die Werte von c und $\psi(\alpha)$ angeführt.

7. Zahlenmäßige Berechnung. Zweiter Fall.

Für die meisten Isolatoren ist jedoch das Widerstandsgesetz (28) nicht zutreffend. Es muß durch das genauere

$$\varrho = \varrho_1 e^{\frac{\Theta}{T}} \tag{37}$$

ersetzt werden.

In diesem Fall läßt sich die Integration nicht in geschlossener Form ausführen, und man ist gezwungen, zur sog. mechanischen Quadratur zu greifen.

Wir wollen, analog den Formeln (30) des vorigen Abschnittes, die Bezeichnungen

$$x = \frac{\Theta}{T}; \quad v = \frac{\varphi_1}{\sqrt{2 \varrho_1 k_1 \Theta}}; \quad c = g \frac{k_2}{k_1} \tag{38}$$

einführen[2].

Die Funktion u wird dann gleich

$$u = 2 k_1 \varrho_1 \Theta f(x), \tag{39}$$

wo

$$f(x) = \int \frac{e^x}{x^2} dx = Ei(x) - \frac{e^x}{x} \tag{40}$$

und $Ei(x)$ das sogenannte Exponentialintegral ist.

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die Formeln (24) und (26) folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c}{v}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right) &= \int_{x_m}^{x} \frac{dx}{x^2 \sqrt{f(x) - f(x_m)}} \\ v^2 &= f(x_1) - f(x_m) \\ \frac{c}{v} &= e^{x_1} \int_{x_m}^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{f(x) - f(x_m)}} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die Funktion $f(x)$ ist monoton zunehmend; für alle in Betracht kommenden Werte von x bleibt sie positiv. Nun folgt aus (41), daß $x_0 > x_1$ ist. Daraus ergibt sich für v die Ungleichung

$$v^2 \leqq f(x_0). \tag{42}$$

Für große Werte von c ist $f(x_m)$ sehr klein im Vergleich zu $f(x_1)$; außerdem ist dann auch die Differenz $x_0 - x_1$ sehr klein. Daraus folgt, daß auch im Falle des zweiten Widerstandsgesetzes das Potential v mit zunehmenden c dem von der Dicke unabhängigen Grenzwert

$$v_0 = \sqrt{f(x_0)} \tag{43}$$

zustrebt.

Um die Berechnung zu erleichtern, führen wir einen neuen Parameter α mittels der Beziehung

$$e^{\frac{1}{2}(x_1 - x_m)} = \sec \alpha \tag{44}$$

[1] Alle in diesem Aufsatze enthaltenen Tabellen sind von Herrn N. Kremenewski, Student der Universität Leningrad, berechnet worden.

[2] Setzt man $\Theta = 9000^0$, so entspricht dem Temperaturintervall 375^0 abs. $\leqq T \leqq 750^0$ abs. der Bereich $12 \leqq x \leqq 24$.

Tabelle 2.
Die Funktion c.

α/x	12	14	16	18	20	22
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,5	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038
5,0	0,0153	0,0153	0,0153	0,0153	0,0153	0,0153
7,5	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349	0,0349
10,0	0,0628	0,0628	0,0628	0,0628	0,0628	0,0628
12,5	0,0998	0,0998	0,0998	0,0998	0,0998	0,0998
15,0	0,1467	0,1467	0,1467	0,1468	0,1468	0,1468
17,5	0,2048	0,2048	0,2048	0,2049	0,2049	0,2050
20,0	0,2755	0,2755	0,2756	0,2757	0,2758	0,2758
22,5	0,3606	0,3607	0,3608	0,3610	0,3611	0,3612
25,0	0,4626	0,4629	0,4631	0,4634	0,4636	0,4637
27,5	0,5844	0,5850	0,5854	0,5857	0,5860	0,5863
30,0	0,7300	0,7310	0,7315	0,7321	0,7324	0,7329
32,5	0,9048	0,9058	0,9065	0,9074	0,9082	0,9086
35,0	1,114	1,116	1,117	1,118	1,119	1,120
37,5	1,367	1,369	1,371	1,373	1,375	1,375
40,0	1,674	1,677	1,680	1,683	1,685	1,686
42,5	2,049	2,054	2,058	2,063	2,065	2,067
45,0	2,512	2,519	2,526	2,531	2,535	2,538
47,5	3,090	3,101	3,109	3,116	3,123	3,126
50,0	3,818	3,833	3,845	3,856	3,864	3,870
52,5	4,750	4,771	4,789	4,804	4,816	4,824
55,0	5,960	5,990	6,015	6,037	6,054	6,066
57,5	7,558	7,604	7,641	7,671	7,696	7,715
60,0	9,717	9,787	9,841	9,886	9,923	9,950

ein und setzen

$$\left.\begin{aligned} H(\alpha, x) &= \frac{e^{\frac{x}{2}} \operatorname{tg} \alpha}{x \sqrt{f(x + 2 \lg \sec \alpha) - f(x)}} \\ \Phi(\alpha, x) &= 2 \int_0^\alpha \cos^2 \alpha \, H(\alpha, x) \, d\alpha \\ \Psi(\alpha, x) &= 2 \int_0^\alpha \left(\frac{x}{x + 2 \lg \sec \alpha} \right)^2 H(\alpha, x) \, d\alpha \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Die Funktion $H(\alpha, x)$ genügt der Ungleichung

$$1 \leqq H(\alpha, x) \leqq 1 + \frac{2}{x} \lg \sec \alpha. \tag{46}$$

Hieraus lassen sich für große x folgende Näherungsformeln für $\Phi(\alpha, x)$ und $\Psi(\alpha, x)$ ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\alpha, x) &\sim \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ \Psi(\alpha, x) &\sim 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Mit Hilfe der Funktionen H, Φ, Ψ können die Größen $\frac{1}{x_0}$, c und v parametrisch durch α und x_m ausgedrückt werden. Den Parameter x_m wollen wir im folgenden einfach mit x ohne Index bezeichnen.

Tabelle 3.

Die Funktion $\frac{1}{x_0}$.

α/x	12	14	16	18	20	22
0	0,07639	0,06633	0,05859	0,05247	0,04750	0,04339
2,5	0,07639	0,06632	0,05859	0,05247	0,04750	0,04339
5,0	0,07638	0,06631	0,05858	0,05246	0,04750	0,04339
7,5	0,07635	0,06630	0,05857	0,05245	0,04749	0,04337
10,0	0,07633	0,06628	0,05855	0,05243	0,04748	0,04337
12,5	0,07629	0,06625	0,05854	0,05242	0,04746	0,04336
15,0	0,07625	0,06623	0,05851	0,05240	0,04745	0,04334
17,5	0,07620	0,06619	0,05848	0,05238	0,04742	0,04333
20,0	0,07614	0,06614	0,05843	0,05235	0,04740	0,04331
22,5	0,07607	0,06608	0,05840	0,05231	0,04738	0,04328
25,0	0,07598	0,06602	0,05835	0,05227	0,04734	0,04325
27,5	0,07588	0,06595	0,05829	0,05222	0,04730	0,04323
30,0	0,07577	0,06586	0,05822	0,05217	0,04726	0,04319
32,5	0,07564	0,06576	0,05815	0,05211	0,04720	0,04314
35,0	0,07549	0,06565	0,05806	0,05204	0,04715	0,04310
37,5	0,07533	0,06552	0,05797	0,05196	0,04709	0,04304
40,0	0,07514	0,06538	0,05785	0,05188	0,04701	0,04298
42,5	0,07492	0,06522	0,05772	0,05177	0,04692	0,04291
45,0	0,07468	0,06504	0,05758	0,05165	0,04682	0,04283
47,5	0,07441	0,06484	0,05742	0,05152	0,04671	0,04274
50,0	0,07410	0,06459	0,05723	0,05137	0,04659	0,04263
52,5	0,07375	0,06432	0,05702	0,05120	0,04645	0,04250
55,0	0,07335	0,06401	0,05678	0,05101	0,04630	0,04238
57,5	0,07290	0,06368	0,05651	0,05079	0,04612	0,04223
60,0	0,07239	0,06330	0,05620	0,05053	0,04590	0,04205

Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x_0} &= \frac{1}{x + 2\lg\sec\alpha} - \frac{1}{x_2}\cos^2\alpha\,\frac{\Psi(\alpha,x)}{\Phi(\alpha,x)} \\ c &= \sin\alpha\sec^3\alpha\,\frac{\Phi(\alpha,x)}{H(\alpha,x)} \\ v &= \frac{1}{x}\,e^{\frac{x}{2}}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{H(\alpha,x)} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Bei großen x unterscheidet sich der Ausdruck für c in (48) nur wenig von demjenigen, den wir im vorigen Abschnitt hatten [Formel (35)]. Die Größe c hängt nur wenig von x, die Größe x_0 nur wenig von α ab.

In den Tabellen 2—4 sind die Werte der Größen c, $\frac{1}{x_0}$, ${}_{10}\lg v$ für verschiedene Werte von x ($12 \leqslant x \leqslant 22$, Intervall 2,0) und von α ($0^0 < \alpha < 60^0$, Intervall $2{,}5^0$) angeführt[1].

Um aus diesen Tabellen die Werte der Durchschlagspannung zu ermitteln, muß man zuerst aus den gegebenen x_0 und c die Größen x und α berechnen. Dazu kann man in erster Annäherung

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} \tag{49}$$

[1] Dieser Wertbereich von x und α entspricht den in der anfangs zitierten Arbeiten von L. Inge, N. Semenoff, und A. Walther beschriebenen Experimenten.

Tabelle 4.
Die Funktion $_{10}\lg v$.

α/x	12	14	16	18	20	22
0	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞
2,5	0,1666	0,5340	0,9103	1,2934	1,6820	2,0749
5,0	0,4684	0,8358	1,2122	1,5952	1,9838	2,3767
7,5	0,6457	1,0131	1,3894	1,7726	2,1611	2,5540
10,0	0,7723	1,1397	1,5160	1,8993	2,2879	2,6808
12,5	0,8715	1,2390	1,6153	1,9986	2,3871	2,7801
15,0	0,9534	1,3209	1,6973	2,0806	2,4692	2,8622
17,5	1,0236	1,3912	1,7676	2,1510	2,5396	2,9326
20,0	1,0854	1,4530	1,8296	2,2129	2,6016	2,9946
22,5	1,1409	1,5086	1,8852	2,2687	2,6573	3,0504
25,0	1,1916	1,5595	1,9362	2,3196	2,7084	3,1015
27,5	1,2386	1,6066	1,9834	2,3668	2,7556	3,1489
30,0	1,2826	1,6509	2,0276	2,4112	2,8000	3,1933
32,5	1,3244	1,6927	2,0695	2,4532	2,8422	3,2354
35,0	1,3644	1,7326	2,1098	2,4935	2,8825	3,2759
37,5	1,4028	1,7713	2,1486	2,5324	2,9215	3,3149
40,0	1,4402	1,8089	2,1862	2,5702	2,9595	3,3529
42,5	1,4770	1,8458	2,2232	2,6074	2,9968	3,3903
45,0	1,5131	1,8822	2,2599	2,6442	3,0337	3,4273
47,5	1,5491	1,9185	2,2964	2,6809	3,0705	3,4642
50,0	1,5852	1,9549	2,3330	2,7176	3,1074	3,5012
52,5	1,6217	1,9917	2,3700	2,7549	3,1448	3,5387
55,0	1,6588	2,0291	2,4077	2,7928	3,1828	3,5769
57,5	1,6968	2,0675	2,4465	2,8318	3,2220	3,6163
60,0	1,7362	2,1073	2,4866	2,8722	3,2627	3,6571

setzen und das diesem x und dem gegebenen c entsprechende α den Tabellen entnehmen. Den genaueren Wert von x kann man daraufhin mittels Interpolation aus der Tabelle 3 für das gegebene x_0 und berechnete α finden. Ist eine größere Genauigkeit erwünscht, so kann man die ganze Berechnung wiederholen, indem man von den Werten von α und x ausgeht, die man in der vorigen Annäherung gefunden hat.

Sind nun α und x bekannt, so bietet es keine Schwierigkeit, auch den Wert von v nach der Tabelle 4 für $_{10}\lg v$ zu bestimmen.

Leningrad, Physikalisch-Technisches Laboratorium, März 1927.

Berechnung des elektrischen Feldes von Hochspannungstransformatoren mit Hilfe der konformen Abbildung, wenn mehrere Wicklungen mit verschiedenen Potentialen vorhanden sind.

Von

Dr. **Johann Labus**,
Deutsche technische Hochschule in Prag.

Inhalt:

A. Einleitung.
B. Abbildung eines geradlinig begrenzten Bereiches auf einen Parallelstreifen.
C. Konforme Abbildung eines polygonalen Bereiches auf ein homogenes Feld, wenn die Umrandung drei verschiedenen Potentialen angehört.
D. Der Rand wird von vier Teilen gebildet, welche verschiedene Potentiale besitzen.
E. Das Potential verläuft längs der Wicklung nach einem bestimmten Gesetze.
F. Zusammenfassung.

A. Einleitung.

Durch die fortwährende Steigerung der Spannungen im Maschinen- und Apparatebau der Elektrotechnik wird der Konstrukteur gezwungen, immer mehr seine Aufmerksamkeit auf das elektrostatische Problem zu lenken. Im gegebenen Falle handelt es sich meist um die Berechnung des elektrischen Feldes in Bereichen, welche von Geraden begrenzt sind, wenn wir uns fortan nur auf parallelebene Probleme beschränken wollen. Im Archiv[1] sind nun einige verdienstvolle Arbeiten, welche diese Aufgabe behandeln, erschienen, in welchen mit Hilfe der konformen Abbildung das elektrische Feld im Innern eines Transformators auf das genau bekannte Gebiet eines Plattenkondensators, welcher sich beiderseits ins Unendliche erstreckt, abgebildet wird. Auf diese Weise kann man zu jedem Punkte dieses Parallelstreifens den entsprechenden im Transformatorbereich auffinden und dort die elektrische Feldstärke der Größe und Richtung nach angeben. Es wurden bisher aber nur Fälle behandelt, bei welchen im Transformator nur zwei konstante Potentiale längs der Begrenzung herrschen, und zwar das Potential der Hochspannungswicklung und das der geerdeten Teile (Mantel mit Einschluß der Niederspannungswicklung). Der Verfasser hat es sich zur Aufgabe gestellt, die Theorie in dem Sinne zu erweitern, daß es auch möglich ist, das elektrische Feld im Innern eines Transformators zu berechnen, wenn seine Berandung (Wicklungen und Mantel) verschiedene Potentiale besitzen und außerdem, wenn diese längs der einzelnen Wicklungen nicht konstant sind, sondern, wie dies tatsächlich auch der Wirklichkeit entspricht, längs derselben ansteigen. Als Beispiel sei der Transformator mit Tertiärwicklung genannt. Diesen verwendet man, wenn in einem Transformator drei Netze miteinander verkettet sind (z. B. Hochspannung mit 110000 Volt, Mittelspannung mit 35000 Volt und Niederspannung mit 6000 Volt). Man stellt diesen Transformator mit Tertiärwicklung auch in Umspannstationen auf, wenn dort der cos φ der Übertragung mit Hilfe eines Synchronmotors oder eines Asynchronmotors mit Phasenschieber verbessert werden soll. Diese Maschine schließt man dann an die Tertiärwicklung dieses Transformators an. Die Rechnung geht vom sogenannten Schwarz-Christoffelschen Theorem der konformen Abbildung aus, mit dessen Hilfe man den

[1] Prof. Dr.-Ing. W. Rogowski, Die elektrische Festigkeit am Rande des Plattenkondensators. Arch. f. Elektrot. Bd. XII, S. 1. — Dr. P. Andronescu, Das parallel- und meridianebene Feld nebst Beispielen. Arch. f. Elektrot. Bd. XIV, S. 379. — Dr. L. Dreyfus, Über die Anwendung der konformen Abbildung zur Berechnung der Durchschlag- und Überschlagspannung zwischen kantigen Konstruktionsteilen unter Öl. Arch. f. Elektrot. Bd. XIII, S. 123. — Dr. E. Weber, Die konforme Abbildung in der elektrischen Festigkeitslehre. Arch. f. Elektrot. Bd. XVII, S. 174.



Bereich eines Polygones auf die obere Halbebene abbilden kann. Obwohl in der genannten Arbeit von E. Weber die Theorie, die zur Erläuterung dieses Theorems führt, gegeben ist, so versucht es der Verfasser, um auch für den noch nicht so weit informierten Leser diese Arbeit als Ganzes erscheinen zu lassen, auf vielleicht etwas anderem Wege diese Theorie zu entwickeln. Die Grundlage dazu bildet die diesbezügliche mathematische Originalliteratur. Vorausgesetzt werden nur die wichtigsten Tatsachen über die Theorie der Funktionen mit komplexen Argumenten.

B. Abbildung eines geradlinig begrenzten polygonalen Bereiches auf einen Parallelstreifen.

Um das elektrische Feld im Innern eines Transformators auf einfache Weise berechnen zu können, muß man es auf die Berechnung des Feldes einer einfachen Anordnung überführen. Dies ist, wie schon erwähnt, der Bereich zwischen den Platten eines beiderseits ins Unendliche gehenden Kondensators. Das abgebildete elektrische Feld muß die wichtigsten Eigenschaften des ursprünglichen besitzen: es müssen sich Kraft- und Potentiallinien unter rechten Winkeln schneiden, oder anders gesagt, die Abbildung muß in den kleinsten Teilen ähnlich, d. i. konform sein. Kleine Quadrate der einen Figur müssen kleinen Quadraten in der anderen Figur entsprechen. Die konforme Abbildung ist daher ein besonderer Fall einer Transformation von zwei Bereichen aufeinander. Bezeichnet z den (komplexen) Wert des einen Bereiches und w den des abgebildeten Bereiches, so ist die Abbildungsaufgabe dann gelöst, wenn es gelingt, w als Funktion von z darzustellen oder umgekehrt.

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} \tag{1}$$

ist das Verhältnis zweier entsprechender sehr kleiner Strecken der Bereiche w und z und stellt somit den Maßstab der Transformation dar, der sich von Stelle zu Stelle ändert. Der absolute Betrag dieser Größe stellt die lineare Vergrößerung der Strecke Δz vor, während die Phase dieser Größe angibt, unter welchem Winkel die beiden Strecken Δz und Δw gegeneinander liegen. Soll diese Transformation eindeutig sein, so muß naturgemäß diese Größe an jeder Stelle nur einen einzigen Wert besitzen und daher von der Richtung der Strecke Δz unabhängig sein. Diese Forderung führt zur Definition der „Funktion einer komplexen Veränderlichen". Da, wie schon erwähnt, der Differentialquotient von der Richtung unabhängig sein muß, nach welcher differenziert wird, kann man nach x oder nach i y differenzieren:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial i y}.$$

Die Größen w und z drückt man durch ihre reellen und imaginären Bestandteile

$$w = u + i v, \quad z = x + i y$$

aus und erhält auf diese Weise

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2}$$

die sog. Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welchen die Bestandteile der Funktionen w und z genügen müssen, damit w eine analytische Funktion von z ist, oder umgekehrt.

Aus der genannten Bedingung, daß der Ausdruck in Gleichung (1) von der Richtung unabhängig sein soll, ergibt sich sofort die Konformität der Abbildung: Man zeichnet zwei Strecken Δz_1 und Δz_2 durch einen Punkt mit dem eingeschlossenen Winkel φ und da

$$\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} = \frac{\Delta w_2}{\Delta w_1}, \left(\left| \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} \right| e^{i\varphi} = \left| \frac{\Delta w_2}{\Delta w_1} \right| e^{i\psi} \right),$$

6*



so ergibt sich, daß der von Δw_1 und Δw_2 eingeschlossene Winkel ψ gleich ist dem Winkel φ.

Zu unserer Aufgabe zurückkehrend, wollen wir versuchen, diejenige Funktion w zu finden, welche den polygonalen Bereich eines Transformators zunächst auf das Gebiet der oberen Halbebene z abbildet. Als Nächstes bilden wir dann die obere Halbebene auf einem Parallelstreifen ab und lösen so die Aufgabe in zwei aufeinanderfolgenden Schritten.

Ohne zunächst zu zeigen, auf welche Weise man zu diesem Ergebnisse gelangt, schreiben wir die Funktion, welche die Abbildung eines geradlinig begrenzten polygonalen Bereiches auf die obere Ebene leistet, hin:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C_1}{(z - x_1)^{\gamma_1} (z - x_2)^{\gamma_2} (z - x_3)^{\gamma_3} \ldots\ldots} \tag{3a}$$

$$w = C_1 \int \frac{dz}{(z - x_1)^{\gamma_1} (z - x_2)^{\gamma_2} (z - x_3)^{\gamma_3} \ldots\ldots} + C_2 \tag{3}$$

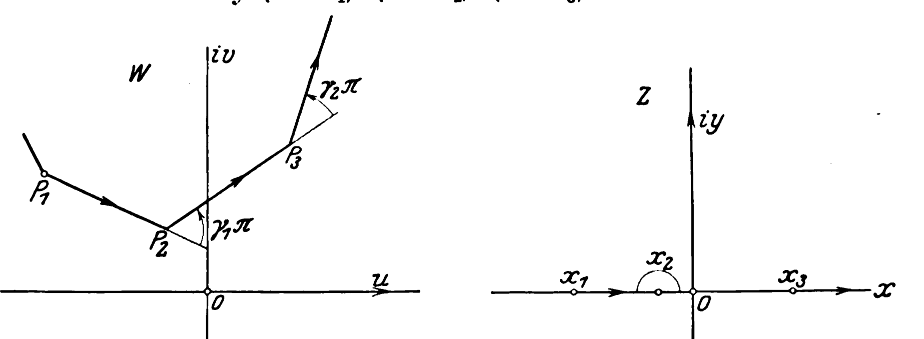


Bild 1. Abbildung eines polygonalen Bereiches auf die obere Halbebene.

Bild 1 ist ein Teil eines Polygons. $\gamma\pi$ ist der Winkel, um welchen man im positiven Sinne (gegen den Uhrzeigersinn) eine Polygonseite drehen muß, um in die Richtung der nächstfolgenden zu gelangen, wobei man z. B. in der mit Pfeilen angedeuteten Weise die Berandung so durchläuft, daß der innere Teil des Polygons stets zur linken Seite liegt. Die Abbildung erfolgt so, daß den inneren Punkten des Polygons Punkte der oberen Halbebene entsprechen und die Berandung des Polygons in die reelle z-Achse übergeht. $x_1, x_2 \ldots\ldots$ sind Punkte auf der reellen z-Achse, welche den Ecken des Polygons entsprechen und deren Lage durch die Gestalt des Polygons gegeben ist und mit Hilfe des vorgegebenen Bildes auch ermittelt wird. In diesen Punkten wird $\frac{dw}{dz}$ unendlich. Der Maßstab der Transformation hat daher an diesen Stellen einen unbestimmten Wert und die Konformität ist somit dort gestört. In den Ecken eines Polygons wird deshalb die Abbildung nicht winkeltreu sein. Diese Punkte müssen in derselben Reihenfolge liegen wie die Ecken des Polygons, so daß beim Fortschreiten längs der X-Achse die obere Halbebene ebenfalls zur linken Hand liegt. C_2 ist eine Integrationskonstante, welche die Lage des Polygons in der w-Ebene festsetzt, während durch C_1 vor allem die absolute Größe des Polygons gegeben ist. Es ist leider nicht möglich, für jedes beliebige Polygon allgemein die Abbildungsfunktion unmittelbar anzugeben; diese kann erst durch Integration nach Gleichung (3) erhalten werden.

Wir wollen uns jetzt überzeugen, daß die angeschriebene Funktion [Gleichung (3)] tatsächlich die Abbildung herstellt. Zu diesem Zwecke zeigen wir nur z. B., daß der reellen z-Achse der gebrochene Linienzug des Polygonumfanges entspricht. Wir beschreiben um den Punkt x_2 einen Halbkreis

$$z = x_2 + \varrho e^{i\varphi}$$

und betrachten zunächst den Punkt $\varphi = \pi$ auf der Strecke $x_1\ x_2$. Nach früherem ist der (komplexe) Maßstab zwischen den beiden Strecken $P_1 P_2$ und $x_1 x_2$

$$\frac{d\,w}{d\,z} = \frac{C_1}{(x_2 - x_1 - \varrho)^{\gamma_1}\,(\varrho\, e^{i\pi})^{\gamma_2}\,(x_2 - x_3 - \varrho)^{\gamma_3} \ldots\ldots}.$$

Da der betrachtete Punkt auf der Strecke $x_1 x_2$ liegt, so muß der entsprechende Punkt in der w-Ebene auf der Seite $P_1 P_2$ liegen.

Setzen wir hingegen $\varphi = 0$, so liegt der Punkt auf der Strecke $x_2 x_3$ und dann ist

$$\frac{d\,w}{d\,z} = \frac{C_1}{(x_2 - x_1 + \varrho)^{\gamma_1}\,\varrho^{\gamma_2}\,(x_2 - x_3 + \varrho)^{\gamma_3} \ldots\ldots}.$$

Der abgebildete Punkt liegt jetzt auf der Seite $P_2 P_3$. Die Phase dieser beiden Ausdrücke stellt den Winkel zwischen einer Seite des Polygons und der entsprechenden Strecke auf der X-Achse dar. In der Phase unterscheiden sich nun untereinander diese beiden Ausdrücke (ϱ ist vernachlässigbar klein) um den Wert $e^{i\gamma_2\pi}$ und somit ist bewiesen, daß beim Überschreiten des Punktes x_2 der X-Achse in der w-Ebene eine Änderung der Bewegungsrichtung um den Winkel $\gamma_2\pi$ erfolgt. Daher entspricht also einem Fortschreiten längs der X-Achse eine Fortbewegung auf den Polygonseiten.

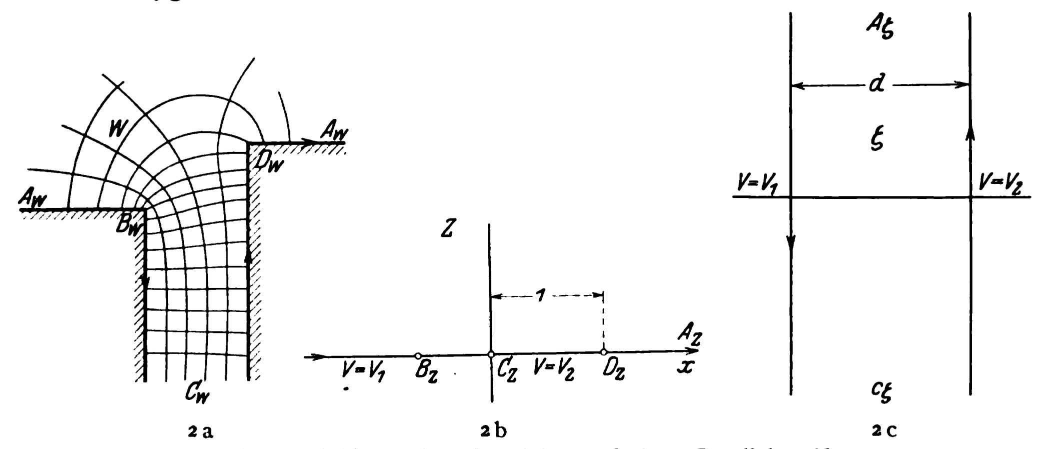


Bild 2. Abbildung eines Bereiches auf einen Parallelstreifen.

Über die praktische Anwendung des Ausdruckes (3) sei auf die Arbeit von Ernst Weber hingewiesen, in der sich alles Weitere findet. Es soll nur erwähnt werden, daß man bei der Durchführung dieser Abbildungsaufgabe drei Eckpunkten des gegebenen Polygons drei beliebige Punkte x_ν der X-Achse in der z-Ebene zuordnen kann. Die Lage der übrigen Punkte auf der X-Achse ergibt sich durch die entsprechende Anwendung der Gleichung (3). Man muß ferner bei der Abbildung strenge darauf achten, daß der Richtungssinn eingehalten wird; d. h. durchläuft man in der w-Ebene den Rand des Bereiches in einem gegebenen Sinne, so muß das Innere auf derselben Seite liegen wie die obere Halbebene, wenn man die X-Achse in derselben Richtung durchläuft.

Nach durchgeführter Abbildung des Bereiches der w-Ebene auf die obere Halbebene z, erfolgt die Abbildung der z-Ebene auf den Parallelstreifen eines Kondensators, der sich zu beiden Seiten ins Unendliche erstreckt. In Bild 2 wird der Weg der aufeinanderfolgenden Abbildungen an einem einfachen Beispiele gezeigt.

Bild 2a stellt zwei gegenüberliegende Wicklungen eines Transformators dar, welche zwei verschiedene, längs ihrer Begrenzung konstante Potentiale besitzen. Die drei willkürlich zu wählenden Punkte wurden mit Rücksicht auf den Potentialsprung bei A_w und C_w so gewählt, daß A_z in den unendlich fernen Punkt, C_z in

den Nullpunkt und D_z in den Punkt $x = 1$ fällt. Die Lage des Punktes B_z auf der x-Achse ergibt sich dann aus Gleichung (3) durch Einsetzung der entsprechenden Werte. Da in den Punkten A_w und C_w ein Potentialsprung von V_2 auf V_1 erfolgt, so muß man bei der Abbildung der oberen Halbebene auf den Bereich ζ des Kondensators diesen Punkten die unendlich fernen Punkte des Parallelstreifens zuordnen. In den drei Bildern ist durch die eingezeichneten Pfeile der Richtungssinn beim Umlauf des Bereiches eingetragen. Beim Umlauf im Uhrzeigersinn bleibt der Bereich immer auf der linken Seite.

Bei der Abbildung der oberen Halbebene z auf den Parallelstreifen ζ bedient man sich am einfachsten wieder der Gleichung (3). Das Polygon ist dann in diesem Falle ein sog. Zweiseit. Es ergibt sich dann

$$\zeta = C_1' \int \frac{d z}{(z - 0)^1} + C_2' = C_1' \ln z + C_2',$$

da der Außenwinkel bei C_ζ', $(+\pi)$ beträgt.

Die Konstante C_1' erhält man, wenn man über die im Unendlichen liegende Strecke d bei C_ζ integriert, welcher in der z-Ebene ein um den Punkt C_z beschriebener kleiner Halbkreis

$$z = \varrho e^{i\varphi}$$

entspricht, wobei der Radius ϱ sehr klein gedacht wird. Es ist dann

$$\int_0^d d\zeta = d = C_1' \{\ln \varrho + i\varphi\}_\pi^0 = -i\pi C_1',$$

für die Konstante C_2' ergibt sich der Wert Null, was durch Einsetzen der beiden Werte für den Punkt A_z bzw. A_ζ leicht zu ersehen ist, und wir erhalten daher

$$\zeta = \frac{i d}{\pi} \ln z. \tag{4}$$

Die Abbildung der w-Ebene auf die ζ-Ebene setzt sich nach

$$\frac{d w}{d \zeta} = \frac{\frac{d w}{d z}}{\frac{d \zeta}{d z}} \tag{5}$$

aus den beiden beschriebenen Abbildungen zusammen.

Bei der Anwendung der Gleichung (3) ergibt sich, daß man die angegebene Integration nicht mehr durchführen kann, wenn der zu untersuchende Bereich mehrere Ecken besitzt, für welche der Wert $\gamma < 1$ ist, d. h. für welche der Winkel $\gamma\pi$ (siehe Bild 1) kleiner als 180^0 ist. Man erhält dann Integrale, welche in geschlossener Form nicht zu lösen sind. Es wäre also das Problem nur in den seltensten Fällen einfach lösbar. Den projektierenden Ingenieur interessiert jedoch gewöhnlich nicht die Funktion w selbst, sondern es ist für ihn wichtig und gewöhnlich auch hinreichend, die elektrische Feldstärke in einzelnen Punkten zu kennen.

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergibt sich, wenn wir statt x und y die Bestandteile der Funktion

$$\zeta = \xi + i\eta; \quad \xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v)$$

einführen;

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = 0. \tag{6}$$

Diese Beziehung erhält man, wenn man die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \eta}{\partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

nach u differenziert und addiert. Dann macht man dasselbe, indem man nach v differenziert.



ξ und η erfüllen somit die Laplacesche Gleichung, und es stellt daher die Schar der Geraden

$$\xi(u, v) = \text{konstant},$$

welche parallel zu den Belegungen des Kondensators der ζ-Ebene verlaufen, in der w-Ebene die Potentiallinien dar.

$$\eta(u, v) = \text{konstant}$$

ist dann in der w-Ebene die Schar der Kraftlinien.

Nach einem bekannten Satze berechnet sich die elektrische Feldstärke mit

$$\mathfrak{E}_w = \mathfrak{E}_u + i\,\mathfrak{E}_v = -\frac{\partial \xi}{\partial u} - i\frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{7}$$

In der Einleitung ist darauf hingewiesen worden, daß bei einer analytischen Funktion des komplexen Argumentes der Differentialquotient von der Richtung, nach welcher differenziert wird, unabhängig sein muß, und daher ist:

$$\frac{d\zeta}{dw} = \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial i v} = \frac{\partial \xi}{\partial u} + i\frac{\partial \eta}{\partial u}.$$

Mit Rücksicht auf die zweite Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

folgt

$$\frac{d\zeta}{dw} = \frac{\partial \xi}{\partial u} - i\frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{8}$$

Im Vergleich mit der Gleichung (7) sehen wir nun, daß die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_w$ der negativ konjugierte Wert des Ausdruckes in Gleichung (8) ist und daher

$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{K}\left[\frac{d\zeta}{dw}\right]. \tag{9}$$

$\mathfrak{K}$ vor der Klammer deutet an, daß man den konjugierten Wert zu nehmen hat, um die Feldstärke in einem Punkte der w-Ebene zu erhalten.

Um die Feldstärke zu berechnen, braucht man daher das Integral der Gleichung (3) nicht aufzulösen, besonders wenn es sich um die Ermittlung des Feldverlaufes in der Nähe der Ecken handelt, da die entsprechenden Punkte auf der X-Achse vorliegen.

Die Abbildung erfolgt, wie wir gesehen haben, über die obere Halbebene, und wir bringen daher die Gleichung (9) auf die Form:

$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{K}\left[\frac{\frac{d\zeta}{dz}}{\frac{dw}{dz}}\right] \tag{10}$$

und setzen wir die Gleichung (4) ein

$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{K}\left[\frac{\frac{i\,d}{\pi}\cdot\frac{1}{z}}{\frac{dw}{dz}}\right].$$

C. Abbildung eines polygonalen Bereiches auf ein homogenes Feld, wenn die Umrandung drei verschiedenen Potentialen angehört.

Bei den ausgeführten Transformatoren liegen die Verhältnisse so, daß außer den beiden Wicklungen der geerdete Mantel, und in bestimmten Fällen eine dritte Wicklung, die sog. Tertiärwicklung die Berandung des zu untersuchenden Bereiches bilden. Der Rand besteht dann aus mehreren Teilen, welche verschiedene Potentiale besitzen, die wir vorläufig längs der einzelnen Wicklungen noch als konstant ansehen

wollen. Wir werden daher bei der Abbildung nicht mehr mit dem gewöhnlichen Plattenkondensator auskommen. Um die Aufgabe auch für diesen Fall einfach lösen zu können, versuchen wir, den gegebenen Bereich wieder auf den Bereich eines homogenen elektrischen Feldes abzubilden. Der Einfachheit halber gehen wir schrittweise vor, indem wir zunächst Bereiche mit drei verschiedenen Randpotentialen betrachten (Bild 3). Bei dieser und den folgenden Aufgaben setzen wir voraus, daß die Abbildung des gegebenen Bereiches der w-Ebene auf die obere Halbebene z mit Hilfe der Gleichung (3) schon durchgeführt ist (siehe auch Bild 4). Es ist nun die Abbildung der oberen Halbebene auf den Bereich eines homogenen elektrischen Feldes durchzuführen.

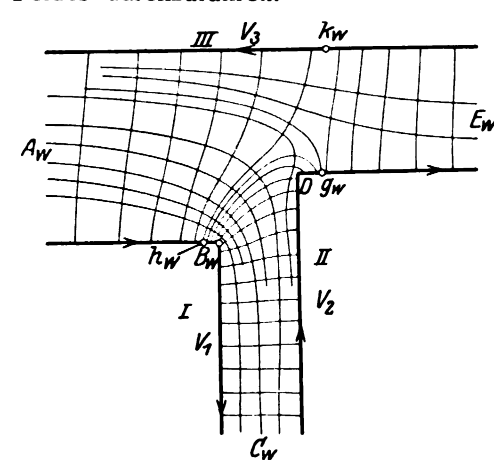


Bild 3. Bereich mit 3 verschiedenen Randpotentialen.

Bewegen wir uns in der Richtung der im Bild 3 eingezeichneten Pfeile längs des Randes von A aus, so sehen wir, daß die Kraftlinien, welche von der Hochspannungswicklung (I) mit dem Potential V_1 zunächst nach der Seite III mit dem

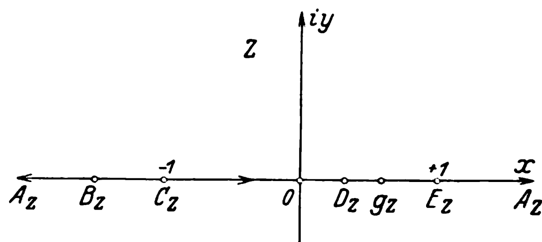


Bild 4. Abbildung des Bereiches in Bild 3 auf die obere Halbebene.

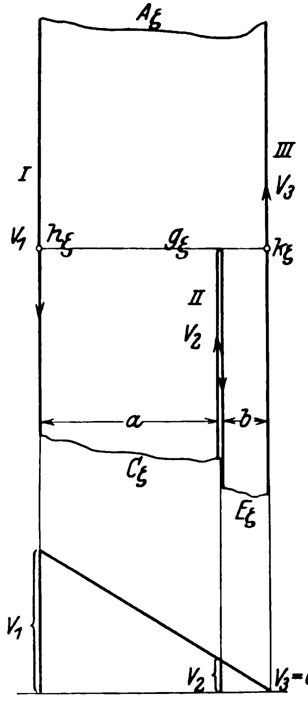


Bild 5 und 6. Bereich des homogenen Feldes.

Potential V_3 gehen. In einem gewissen Punkte (h_w), dessen Lage von der Anordnung abhängt, gehen die nächsten Kraftlinien nicht mehr nach III (V_3), sondern zur Mittelspannungswicklung II (V_2). Es sei

$$V_1 > V_2 > V_3.$$

Es sieht so aus, als ob sich an dieser Stelle den Kraftlinien ein Hindernis entgegengestellt hätte, welches sie gegen III abschirmt. Dasselbe bemerkt man, wenn man sich auf der Seite II in der Pfeilrichtung bewegt: Hinter dem Punkte g_w gehen die Kraftlinien nicht mehr zur Wicklung I herüber, sondern enden am Mantel III. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes denkt man sich in der ζ-Ebene des Plattenkondensators an einer Stelle, welche der Spannung V_2 entspricht, einen Leiter parallel zu den beiden Belegungen des Kondensators, welche die Abbildung der Seiten I und III sind. Dieser Leiter reicht bis zum Punkte g_ζ. Durch diesen Leiter muß man sich den Parallelstreifen längs desselben bis zum Punkte g_ζ aufgeschnitten denken, so daß der Bereich in der ζ-Ebene durch den mit Pfeilen versehenen Linienzug umgrenzt ist (Bild 5). Damit das homogene elektrische Feld zwischen den Platten I und III durch die Anwesenheit des Leiters II, nicht gestört wird, muß man ihn an diejenige Stelle bringen, in welcher das Potential des Kon-

densators den Wert V_2 besitzt (Bild 6). Auf diese Art ist in jedem Punkte der ζ-Ebene die elektrische Feldstärke gegeben, zu welchem dann der zugehörende Punkt im Bild 3 gefunden werden kann. Vergleicht man die Bilder 3 und 5 miteinander, so erkennt man leicht, daß dem Bereiche $h_\zeta, C_\zeta, g_\zeta$ das elektrische Feld zwischen I und II, dem Bereiche $g_\zeta, E_\zeta, k_\zeta$ das Feld zwischen II und III und schließlich dem Bereiche $k_\zeta, h_\zeta, A_\zeta$ das Kraftlinienbild zwischen den Kanten I und III des Bildes 3 entspricht.

Um die Abbildungsfunktion der ζ-Ebene auf die obere Halbebene z zu finden, benützt man die Gleichung (3). Die Ecken des Polygons sind $A_\zeta, C_\zeta, g_\zeta$ und E_ζ. Drei Punktepaare (A_ζ, A_z; C_ζ, C_z; E_ζ, E_z) sind schon durch die Abbildung der w- auf die z-Ebene festgelegt. Es ergibt sich dann

$$\zeta = C_1 \int \frac{dz}{(z+1)^1 (z-x_g)^{-1} (z-1)^1} + C_2 = C_1 \int \frac{(z-x_g)}{z^2-1} dz + C_2,$$

da der Winkel $\gamma = 1$ an den Ecken C_ζ und E_ζ und $\gamma = -1$ an der Ecke g_ζ beträgt. Die Auswertung dieses Integrales ergibt

$$\zeta = C_1 \left\{ \frac{1-x_g}{2} \ln(z-1) + \frac{1+x_g}{2} \ln(z+1) \right\} + C_2 \tag{11}$$

Zur Bestimmung der Werte C_1 und x_g führen wir die Integration über kleine Halbkreise, welche wir um C_z und E_z ziehen, durch. Diesen Halbkreisen entsprechen in der ζ-Bbene die im Unendlichen sich befindlichen Strecken a und b. Die Gleichung dieses Halbkreises um C_z lautet, wenn ϱ sein Radius ist:

$$z = -1 + \varrho e^{i\varphi},$$

dann ist

$$z^2 - 1 = \varrho e^{i\varphi} (\varrho e^{i\varphi} - 2) \text{ und } dz = i \varrho e^{i\varphi}$$

und

$$\int d\zeta = C_1 \int_\pi^0 \frac{(-1 - x_g + \varrho e^{i\varphi}) i \varrho e^{i\varphi}}{\varrho e^{i\varphi} (\varrho e^{i\varphi} - 2)} d\varphi = a.$$

Vernachlässigt man die unendlich kleinen Größen neben den endlichen, so folgt:

$$-a = i \frac{1+x_g}{2} C_1 \pi. \tag{12}$$

Ebenso erfolgt die Integration längs des kleinen Kreises um den Punkt E_z mit

$$z = 1 + \varrho e^{i\varphi}$$

$$\zeta = C_1 \int_\pi^0 \frac{(1 - x_g + \varrho e^{i\varphi}) i \varrho e^{i\varphi}}{\varrho e^{i\varphi} (2 + \varrho e^{i\varphi})} d\varphi = b.$$

$\varrho e^{i\varphi}$ kann man als sehr kleine Größe neben den endlichen Größen vernachlässigen. Dann ist

$$b = -i C_1 \frac{1-x_g}{2} \pi. \tag{13}$$

Schließlich erhalten wir aus den Gleichungen (12) und (13) die unbekannten Konstanten

$$C_1 = i \frac{a+b}{\pi}; \quad x_g = \frac{a-b}{a+b} \tag{14}$$

und die Abbildungsfunktion

$$\zeta = i \frac{b}{\pi} \ln(z-1) + i \frac{a}{\pi} \ln(z+1) + C_2.$$

Die Integrationskonstante C_2 berechnet sich aus der Annahme, daß der Punkt g_ζ mit dem Nullpunkt der ζ-Ebene zusammenfallen soll; d. h. für $z = x_g$ wird $\zeta = 0$. Es ist dann:

$$C_2 = -\frac{i}{\pi}\left\{b \ln\left(\frac{-2b}{a+b}\right) + a \ln\left(\frac{2a}{a+b}\right)\right\}$$

und die gesuchte Funktion lautet:

$$\zeta = \frac{i}{\pi} \ln\left\{\left(\frac{z-1}{-2b}\right)^b \left(\frac{z+1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\} \tag{15}$$

Bei einer richtig durchgeführten Abbildung müssen sich, wie schon einmal darauf hingewiesen, die Berandungen beider Bereiche Punkt für Punkt entsprechen. Betrachtet man die Bilder 4 und 5, so sieht man daß dem Stück -1 bis $+1$ auf der x-Achse die Ordinate $u = 0$ (II_ζ) durch den Punkt g_ζ in der ζ-Ebene entspricht und dort nur imaginare Werte annimmt. Es muß daher, wie gleich zu sehen ist, für

$$|z| < 1$$

die Funktion

$$\zeta = \frac{i}{\pi} \ln\left\{\left(\frac{1-z}{2b}\right)^b \left(\frac{z+1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\} \tag{16}$$

rein imaginär sein.

Liegt der Punkt z auf der X-Achse rechts vom Punkte E_z, so daß $z > 1$ ist, so ergibt sich für die Bildfunktion

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{i}{\pi} \ln\left\{\left(\frac{z-1}{2ib}\right) \left(\frac{z+1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\} \\ &= \frac{i}{\pi}\left[\ln\left\{\left(\frac{z-1}{2b}\right)^b \left(\frac{z+1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\} - \ln i^{2b}\right]\end{aligned}$$

und mit

$$\ln i^{2b} = i\pi b$$

folgt

$$\zeta = b + \frac{i}{\pi} \ln\left\{\left(\frac{z-1}{2b}\right)^b \left(\frac{z+1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\}. \tag{17}$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes ist rein imaginär. Der reelle Teil von ζ ist die konstante Strecke b, und es wandert daher ζ auf der Ordinate III von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn z auf der X-Achse von $+1$ nach $+\infty$ fortschreitet.

Für die Werte

$$z < -1$$

lautet die Funktion

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{i}{\pi} \ln\left\{\left(\frac{|z|+1}{2b}\right)^b \left(\frac{|z|-1}{2a} i^2\right)^a (a+b)^{a+b}\right\} \\ &= \frac{i}{\pi}\left[\ln\left\{\left(\frac{|z|+1}{2b}\right)^b \left(\frac{|z|-1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\} + \ln i^{2a}\right]\end{aligned}$$

und da wie früher

$$\ln i^{2a} = i\pi a,$$

so ist

$$\zeta = -a + \frac{i}{\pi} \ln\left\{\left(\frac{|z|+1}{2b}\right)^b \left(\frac{|z|-1}{2a}\right)^a (a+b)^{a+b}\right\}. \tag{18}$$

Das ist ein ähnlicher Ausdruck wie Gleichung (17); nur tritt an Stelle von b die Strecke $-a$ und ζ liegt daher auf der Ordinate I, wenn z auf die X-Achse links vom Punkte -1 fällt.

Für $z = -1$, $+1$ und ∞ nimmt ζ den Wert $\pm i\infty$ an, was sofort aus Gleichung (15) zu ersehen ist.

Auf diese Weise haben wir die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung nachgeprüft.

Die elektrische Feldstärke berechnet sich nach Gleichung (10) mit



$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{R}\left[\frac{\frac{d\zeta}{dz}}{\frac{dw}{dz}}\right] = -\mathfrak{R}\left[\frac{i\,\frac{a+b}{\pi}\,\frac{z-\frac{a-b}{a+b}}{z^2-1}}{\frac{dw}{dz}}\right] \tag{19}$$

Die Abbildung der w-Ebene auf die obere Halbebene z erfolgt für das vorhandene Beispiel (Bild 3) durch die Funktion

$$\frac{dw}{dz} = C_1' \frac{\sqrt{(z-x_B)(z-x_D)}}{z^2-1}$$

mit

$$C_1' = -\frac{m_A}{\pi} \quad \text{und} \quad m_C = \frac{\pi}{2}\, i\, C_1' \sqrt{(1+x_B)(1+x_D)}\,. \tag{20}$$

In Gleichung (19) eingesetzt, ergibt sich

$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{R}\left[\frac{i\,\frac{a+b}{\pi}\left(z-\frac{a-b}{a+b}\right)}{C_1'\sqrt{z-x_B)(z-x_D)}}\right]. \tag{21}$$

Setzen wir zur Kontrolle $z = -1$, so erhalten wir mit Rücksicht auf Gleichung (20) die Stärke des homogenen Feldes zwischen den Kanten I und II in der Nähe des Punktes C_w mit:

$$\mathfrak{E}_w = -\frac{a}{m_C} = \frac{V_1 - V_2}{m_C}\ \text{Volt/cm}\,. \tag{22}$$

D. Der Rand wird von vier Teilen gebildet, welche verschiedene Potentiale besitzen.

Um zu zeigen, wie man vorgehen muß, wenn der Rand statt drei mehrere verschiedene Potentiale besitzt, wird noch ein Beispiel besprochen, bei welchem die Umrandung aus vier Teilen I, II, III und IV mit den vier verschiedenen Potentialen V_1, V_2, V_3 und V_4 besteht (Bild 7). Der Vollständigkeit halber wird in diesem Beispiele auch die Abbildung der w-Ebene auf die obere Halbebene durchgeführt.

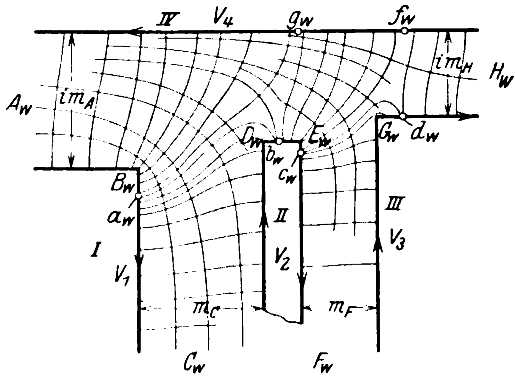


Bild 7. Bereich mit 4 verschiedenen Randpotentialen.

Die drei willkürlich zu wählenden Punkte auf der X-Achse nehmen wir so an, daß den Punkten A_w, C_w und F_w unseres Bereiches die Punkte ∞, 0 und $+1$ der X-Achse entsprechen. Die Gleichung (3) lautet dann:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C_1}{(z+x_B)^{-1/2}(z-0)^1(z-x_D)^{-1/2}(z-x_E)^{-1/2}(z-1)^1(z-x_G)^{-1/2}(z-x_H)^1}$$

$$= C_1 \frac{\sqrt{(z+x_B)(z-x_D)(z-x_E)(z-x_G)}}{z(z-1)(z-x_H)}\,. \tag{23}$$

Dieses Beispiel zeigt schon, daß die Ermittlung der elektrischen Feldstärke mit Hilfe der konformen Abbildung bei komplizierten Bereichen in der praktischen Durchführung auf große Schwierigkeiten stößt, da das Integral der Gleichung (3) dann nicht mehr in geschlossener Form lösbar ist. Wir haben bereits erwähnt, daß zur Berechnung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}_w$ in irgendeinem Punkte der w-Ebene die Kenntnis dieses Integrals nicht erforderlich ist, und es genügt, wenn man $\frac{dw}{dz}$ gegeben hat. Allerdings kann man die Feldstärke dann nur in der Nähe der Eckpunkte berechnen; um das Feld auch in allen inneren Punkten des Bereiches angeben zu können, müßte man jedoch w als Funktion von z gegeben haben, da die Feldstärke in Gleichung (10) nicht als Funktion von w, wie es erwünscht wäre, sondern in Abhängigkeit von z ausgedrückt ist.

Der Ausdruck $\frac{dw}{dz}$ [siehe Gleichung (3a)] enthält die unbekannten Konstanten $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$, von welchen nur drei willkürlich auf der X-Achse festgelegt werden können. Die anderen bestimmt man dadurch, daß man die Gleichung (3) auf das vorliegende Beispiel anwendet, wie jetzt gezeigt wird.

Um die Punkte C_z, F_z und H_z, welche den im Unendlichen liegenden Punkten der w-Ebene entsprechen, beschreiben wir Halbkreise mit dem sehr kleinen Radius ϱ. Der Halbkreis um den Punkt C_z lautet:

$$z = \varrho e^{i\varphi}$$

und dann ist

$$dw = C_1 \frac{\sqrt{(\varrho e^{i\varphi} + x_B)(\varrho e^{i\varphi} - x_D)(\varrho e^{i\varphi} - x_E)(\varrho e^{i\varphi} - x_G)}}{\varrho e^{i\varphi}(\varrho e^{i\varphi} - 1)(\varrho e^{i\varphi} - x_H)} i\varrho e^{i\varphi} \cdot d\varphi.$$

Dem Linienintegral längs dieses Halbkreises entspricht in der w-Ebene die im Unendlichen gelegene Strecke m_C. Vernachlässigen wir die sehr kleine Größe $\varrho e^{i\varphi}$ neben den endlichen Größen und setzen wir für φ die Grenzen π und 0 ein, so ergibt sich:

$$m_C = \pi C_1 \frac{\sqrt{x_B x_D x_E x_G}}{x_H}. \tag{24}$$

Auf ähnliche Art ist die Rechnung in der Umgebung der Punkte F_z und H_z durchzuführen. Daraus folgen die Bedingungsgleichungen:

$$m_F = -i\pi C_1 \frac{\sqrt{(1 + x_B)(1 - x_D)(1 - x_E)(1 - x_G)}}{1 - x_H} \tag{25}$$

$$m_H = -\pi C_1 \frac{\sqrt{(x_H + x_B)(x_H - x_D)(x_H - x_E)(x_H - x_G)}}{x_H(x_H - 1)}. \tag{26}$$

Der Strecke m_A entspricht ein unendlich großer Halbkreis in der z-Ebene. Dividiert man im Zähler und Nenner die Gleichung (23) durch z, so ist für große Werte von z, welche auf dem Halbkreis liegen sollen:

$$\frac{dw}{dz} = C_1 \frac{1}{z}$$

und

$$w = C_1 \ln z + C_2.$$

Die Integration längs dieses Halbkreises zwischen den Grenzen 0 und π ergibt

$$\int dw = i\,m_A = C_1 \Big\{ \ln \varrho + i\varphi \Big\}_0^\pi = i\pi C_1$$

und daher

$$C_1 = \frac{m_A}{\pi}. \tag{27}$$



Auf diese Weise haben wir vier Bestimmungsgleichungen gewonnen. Zur vollständigen Lösung der Aufgabe müßte man jetzt die Gleichung (23) integrieren. Wie schon erwähnt, ist aber diese Integration sehr kompliziert, und wir wollen uns mit einer Näherungslösung begnügen. Für den Fall, daß x_D und x_E sehr nahe beisammen liegen, können wir schreiben

$$x_D \cong x_E\,^*.$$

Die Gleichung (23) geht dann in

$$\frac{dw}{dz} = C_1 \frac{z - x_E}{z(z-1)(z-x_H)} \sqrt{(z+x_B)(z-x_G)} \tag{28}$$

über und läßt sich in dieser Form nach bekannten Methoden integrieren. Indem wir zwischen den Punkten E und G integrieren, erhalten wir eine weitere Bestimmungsgleichung und können mit Hilfe dieser und der Gleichungen

$$\frac{m_F}{m_A} = \frac{1 - x_E}{1 - x_H} \sqrt{(1+x_B)(x_G - 1)}, \tag{25a}$$

$$\frac{m_C}{m_A} = \frac{x_E}{x_H} \sqrt{x_B x_G}, \tag{24a}$$

$$\frac{m_H}{m_A} = \frac{x_E - x_H}{x_H(x_H - 1)} \sqrt{(x_H + x_B)(x_H - x_G)} \tag{26a}$$

[welche wir erhalten, wenn wir in die Gleichungen (24), (25) und (26) $x_D = x_E$ einsetzen] die unbekannten Konstanten x_B, x_E, x_G und x_H ausrechnen.

Um die elektrische Feldstärke angeben zu können, müssen wir jetzt die obere Halbebene ähnlich wie im vorigen Kapitel auf den Bereich eines homogenen elektrischen Feldes abbilden (Bild 8 und 9).

Es gelten dieselben Überlegungen wie im vorhergehenden Kapitel. Vergleicht man die Bilder 3 und 7, so sieht man, daß der Bereich

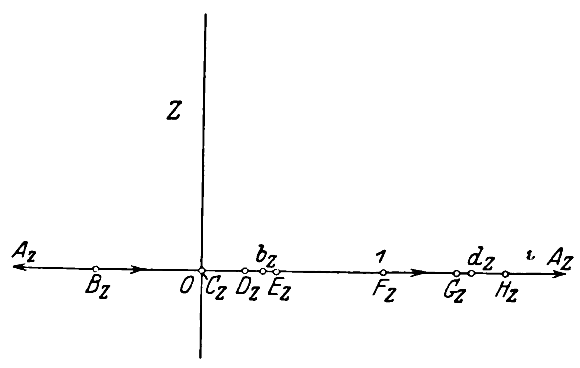


Bild 8. Abbildung des Bereiches in Bild 7 auf die obere Halbebene.

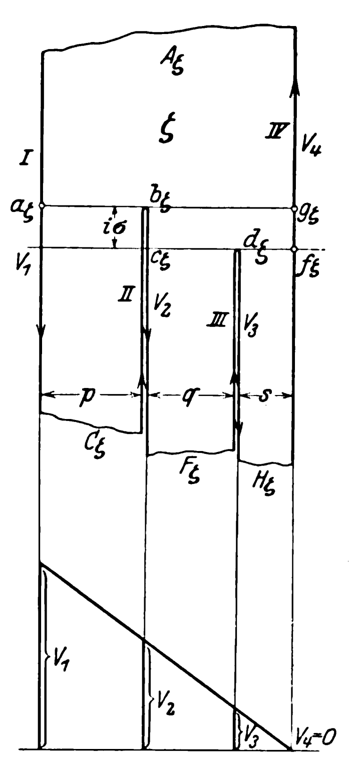


Bild 9 u. 10. Abbildung des Bereiches in Bild 7 auf den Bereich eines homogenen Feldes.

in Bild 7 noch um die Berandung III mit dem Potential V_3 erweitert wurde. In Bild 10 ist wieder die Potentialverteilung eines homogenen elektrischen Feldes gezeichnet, wenn

$$V_1 > V_2 > V_3 > V_4.$$

* Falls diese Annahme nicht zulässig ist, muß man sich numerischer Methoden bedienen; siehe S. Bergmann, Math. Ztschr. Bd. 19/2, § 3.

Zum Zwecke der Abbildung des Transformatorbereiches auf das homogene Feld eines Plattenkondensators denken wir uns parallel zu den Belegungen I und IV des Kondensators im Abstande s und q zwei leitende Platten III und II, welchen die Potentiale V_3 und V_2 aufgedrückt sind (Bild 9). Das homogene Feld wird dann trotz dieser eingeführten Platten erhalten bleiben. Den Punkten a_w, b_w, c_w, d_w, f_w, g_w entsprechen die Punkte a_ζ, b_ζ, c_ζ, d_ζ, f_ζ und g_ζ der w-Ebene, in welchen die Kraftlinien auseinander gehen. Längs dieser eingeführten Platten denkt man sich den Kondensatorbereich aufgeschnitten, so daß die beiden Seiten dieser Platten mit zur Berandung gehören. Die eingezeichneten Pfeile geben den Umlaufsinn an, der so gewählt ist, daß der Bereich beim Umlauf immer zur linken Seite liegt.

Die Abbildung des Bereiches der ζ-Ebene auf die obere Halbebene erfolgt wieder mit Hilfe der Gleichung (3):

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{C_1'}{(z-0)^1 (z-x_b)^{-1} (z-1)^1 (z-x_d)^{-1} (z-x_H)^1} = C_1' \frac{(z-x_b)(z-x_d)}{z(z-1)(z-x_H)}. \quad (29)$$

Die Integration stößt in diesem Falle auf keine Schwierigkeiten, weil alle Winkel des Polygons $\gamma\pi = \pm\pi$ betragen. Statt drei willkürlicher Punkte mußten die vier Punkte A_z, C_z, F_z und H_z auf der X-Achse dieser Abbildung zugrunde gelegt werden, weil sie durch die Abbildung der w-Ebene auf die obere Halbebene schon gegeben sind. Dafür lassen wir aber die Lage der Ecke b_ζ im Polygon der ζ-Ebene (den Abstand $i\sigma$ der Ecken b_ζ und d_ζ) vorläufig noch unbestimmt.

Zur Ermittlung der Konstanten C_1', x_b und x_d beschreiben wir wie bisher um die Punkte C_z, F_z und H_z kleine Halbkreise, welchen in der ζ-Ebene die im Unendlichen gelegenen Strecken p, q und s entsprechen. Für den Punkt F_z ergibt sich dann:

$$z = 1 + \varrho e^{i\varphi}$$

und

$$\int dw = q = i C_1' \frac{(1-x_b)(1-x_d)}{1-x_H} \int_\pi^0 d\varphi = -i\pi C_1' \frac{(1-x_b)(1-x_d)}{1-x_H}. \quad (30)$$

Ähnlich erfolgt die Integration längs der Halbkreise um die Punkte C_z und H_z und man erhält daraus:

$$-p = i\pi C_1' \frac{x_b x_d}{x_H}, \quad (31)$$

$$-s = i\pi C_1' \frac{(x_H - x_b)(x_H - x_d)}{x_H (x_H - 1)}. \quad (32)$$

Aus den Gleichungen (30), (31) und (32) ergibt sich

$$C_1' = \frac{i}{\pi}(p+q+s) \quad (33)$$

und ferner die Beziehungen zur Berechnung der Konstanten x_b und x_d:

$$x_b^2 - \frac{(p+s)+(p+q)x_H}{p+q+s} \cdot x_b + \frac{p x_H}{p+q+s} = 0, \quad (34)$$

$$x_d = \frac{p}{p+q+s} \cdot \frac{x_H}{x_b}. \quad (35)$$

Zum Zwecke der Integration der Gleichung (29) zerlegen wir den Bruch in die Partialbrüche:

$$\frac{(z-x_b)(z-x_d)}{z(z-1)(z-x_H)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-x_H}$$

und erhalten durch Vergleich der beiden Seiten:

$$A = \frac{x_b \cdot x_d}{x_H}; \quad B = \frac{(1-x_b)(1-x_d)}{1-x_H}; \quad C = \frac{(x_H - x_b)(x_H - x_d)}{x_H(x_H - 1)}.$$



Mit Rücksicht auf die Gleichungen (30), (31) und (32) ergeben sich diese Koeffizienten einfach mit:

$$A = -\frac{p}{i\pi C_1'}; \qquad B = -\frac{q}{i\pi C_1'}; \qquad C = -\frac{s}{i\pi C_1'} \tag{36}$$

und somit ist

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i}{\pi}\left\{\frac{p}{z} + \frac{q}{z-1} + \frac{s}{z-x_H}\right\}, \tag{37a}$$

$$\zeta = \frac{i}{\pi}\cdot \ln\left\{z^p \cdot (z-1)^q (z-x_H)^s\right\} + C_2'. \tag{37}$$

Die Integrationskonstante C_2' ergibt sich aus der Bedingung, daß wir den Nullpunkt der ζ-Ebene willkürlich in den Punkt d_ζ verlegen. Es ist daher für

$$z = x_d \ldots . \zeta = 0$$

und folglich

$$C_2' = -\frac{i}{\pi}\cdot \ln\left\{(x_d)^p (x_d - 1)^q (x_d - x_H)^s\right\}. \tag{38}$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen erhalten wir schließlich:

$$\zeta = \frac{i}{\pi}\cdot \ln\left\{\left(\frac{z}{x_d}\right)^p \left(\frac{z-1}{x_d-1}\right)^q \left(\frac{z-x_H}{x_d-x_H}\right)^s\right\}. \tag{39}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nachträglich der ζ-Wert des Punktes b_ζ berechnen, wenn man

$$z = x_b$$

einsetzt. Für ζ ist $-q + i\sigma$ zu setzen und man erhält dann

$$-q + i\sigma = \frac{i}{\pi}\cdot \ln\left\{\left(\frac{x_b}{x_d}\right)^p \left(\frac{x_b-1}{x_d-1}\right)^q \left(\frac{x_b-x_H}{x_d-x_H}\right)^s\right\}.$$

Da die einzelnen Glieder unter den Logarithmuszeichen alle reell sind, so sieht es aus, als ob die rechte Seite dieser Gleichung rein imaginär wäre, während die linke Seite komplex ist. Berücksichtigt man aber den Umstand, daß nach Bild 8 $x_b < 1$ ist, so ergibt sich

$$-q + i\sigma = \frac{i}{\pi}\cdot \ln\left\{\left(\frac{x_b}{x_d}\right)^p \left(\frac{1-x_b}{x_d-1}\right)^q \left(\frac{x_H-x_b}{x_H-x_d}\right)^s \cdot (-1)^q\right\}.$$

Nach früherem ist nun

$$(\quad 1)^q = i^{2q} \qquad \text{und} \qquad \ln(-1)^q = i\pi q$$

und daher

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\cdot \ln\left\{\left(\frac{x_b}{x_d}\right)^p \left(\frac{1-x_b}{x_d-1)}\right)^q \left(\frac{x_H-x_b}{x_H-x_d}\right)^s\right\} \tag{41}$$

σ kann je nach der Beschaffenheit des Bereiches der w-Ebene positiv oder negativ sein.

Wenn die Gleichung (39) den Bereich der ζ-Ebene richtig auf die obere Halbebene abbildet, so muß die X-Achse der oberen Halbebene der Berandung des Bereiches in der ζ-Ebene entsprechen. Für die Punkte

$$z = 0, \ = 1, \ = x_H$$

muß ζ die Werte

$$\zeta = \frac{i}{\pi}\ln 0 = -\frac{i}{\pi}\cdot\infty$$

annehmen, was für die drei entsprechenden Punkte der ζ-Ebene C_ζ, F_ζ und H_ζ auch zutrifft, während für

$$z = \infty, \qquad \zeta = \frac{i}{\pi}\ln\infty = +\frac{i}{\pi}\cdot\infty$$

wird und dem Punkte A_ζ entspricht. Schließlich ist für $z = x_d$, $\zeta = \frac{i}{\pi} \ln 1 = 0$ und für $z = x_b$ erhält man nach Gleichung (39) und (41) $\zeta = -q + i\sigma$. Dadurch haben wir uns überzeugt, daß die Punkte 0, 1, x_H, x_b und x_d der X-Achse in die Eckpunkte des Polygons der ζ-Ebene übergehen.

z soll sich jetzt auf der X-Achse zwischen $-\infty$ und 0 bewegen. Die ersten zwei Klammerausdrücke in Gleichung (39) nehmen dann negative Werte an. Das Argument des Logarithmus wird aber wieder positiv, wenn man für z überall den absoluten Betrag einsetzt und mit $(-1)^p (-1)^q$ multipliziert. ζ ergibt sich dann mit

$$\zeta = \frac{i}{\pi} \cdot \ln \left\{ \left(\frac{|z|}{x_d} \right)^p \left(\frac{|z| - 1}{x_d - 1} \right)^q \left(\frac{z - x_H}{x_d - x_H} \right)^s \right\} + \frac{i}{\pi} \cdot \ln (-1)^p (-1)^q.$$

Da nun

$$\frac{i}{\pi} \cdot \ln (-1)^p (-1)^q = \frac{i}{\pi} (i\pi p + i\pi q) = -(p+q),$$

so sieht man, daß ζ aus dem konstanten reellen Gliede $-(p+q)$ und einem reinen imaginären Anteil besteht und daher für die gegebenen Werte von z auf der Ordinate I_ζ wandert (Bild 9).

Genau dieselbe Überlegung gilt, wenn

$$z > x_H.$$

In diesem Falle ist der dritte Klammerausdruck der Gleichung (39) negativ, und man erhält auf ähnliche Weise wie vorher:

$$\zeta = s + \frac{i}{\pi} \ln \left\{ \left(\frac{z}{x_d} \right)^p \left(\frac{z - 1}{x_d - 1} \right)^q \left(\frac{z - x_H}{x_H - x_d} \right)^s \right\},$$

das heißt: ζ wandert längs der Ordinate IV_ζ (in Bild 9), wenn sich z auf der X-Achse rechts vom Punkte x_H bewegt.

Ähnliche Betrachtungen zeigen schließlich, daß sich ζ längs der doppelt zu zählenden Geraden II_ζ und III_ζ fortbewegt, wenn $0 < z < 1$ bzw. $1 < z < x_H$ ist.

Die elektrische Feldstärke berechnet sich nach Gleichung (10) für irgendeinen Punkt der w-Ebene, indem man dort die Gleichungen (28), (37a) und (27) einsetzt, mit

$$\mathfrak{E}_w = -\Re \left[\frac{\frac{d\zeta}{dz}}{\frac{dw}{dz}} \right] = -\Re \left[\frac{i}{m_A} \cdot \frac{p(z-1)(z-x_H) + qz(z-x_H) + sz(z-1)}{(z-x_E)\sqrt{(z-x_B)(z-x_G)}} \right]. \quad (42)$$

Bestimmen wir wieder die elektrische Feldstärke in den Punkten C, F, H und A, indem wir in Gleichung (42) für z die Werte 0, 1, x_H und ∞ einsetzen, so müssen sich die von vornherein bekannten Ausdrücke für das homogene Feld an diesen Stellen ergeben.

Für den Punkt C ist z. B. zu setzen $z = 0$. Dann ist

$$\mathfrak{E}_w = -\Re \left[\frac{i}{m_A} \cdot \frac{p\, x_H}{(-x_E)\sqrt{x_B x_G}} \right]$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (24a)

$$\mathfrak{E}_w = -\Re \left[\frac{i}{m_A} (-p) \left(\frac{m_A}{m_C} \right) \right] = \frac{p}{m_C} = \frac{V_1 - V_2}{m_C} \text{ Volt/cm}.$$

Dieselbe Überlegung gilt für die drei anderen Stellen F, H und A.

Auf Grund der Gleichung (42) kann man die elektrische Feldstärke in jedem beliebigen Punkt der w-Ebene berechnen. Zu diesem Zwecke müßte man aus Gleichung (23) (oder der Annäherung 24) für ein gegebenes w, in welchem das Feld ermittelt werden soll, den zugehörigen z-Wert ausrechnen, da $\mathfrak{E}_w$ eine Funktion von z ist. Wir haben bereits gesehen, daß dies in den meisten Fällen mit großen



Schwierigkeiten verbunden ist, und man wird daher den umgekehrten Weg gehen, indem man zu einem bestimmten z die Feldstärke und gleichzeitig die zugehörige Stelle w in der w-Ebene angibt. Man wird sich jedoch, wie schon erwähnt, begnügen, die Feldstärke in der Umgebung wichtiger Punkte (der Eckpunkte, wo das Feld am stärksten ist) zu ermitteln, für welche die z-Werte auf der X-Achse schon vorliegen.

Die Bilder 11 bis 14 zeigen, wie der Bereich der ζ-Ebene beschaffen sein muß, wenn zwischen den Randpotentialen die Beziehung

$$V_2 > V_1 > V_3 > V_4$$

herrscht.

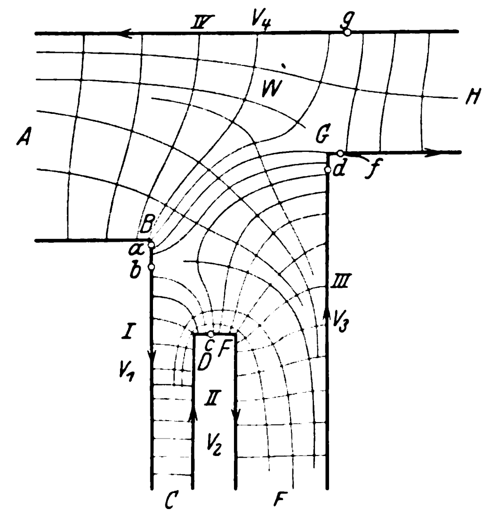


Bild 11. Elektrisches Feld mit den Randpotentialen $V_2 > V_1 > V_3 > V_4$.

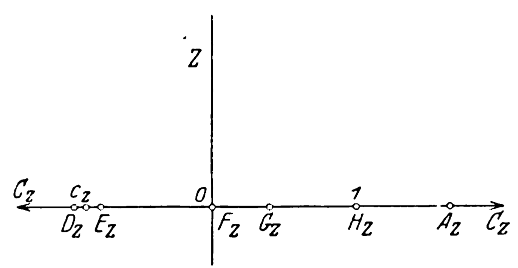


Bild 12. Abbildung des Bereiches in Bild 11 auf die obere Halbebene.

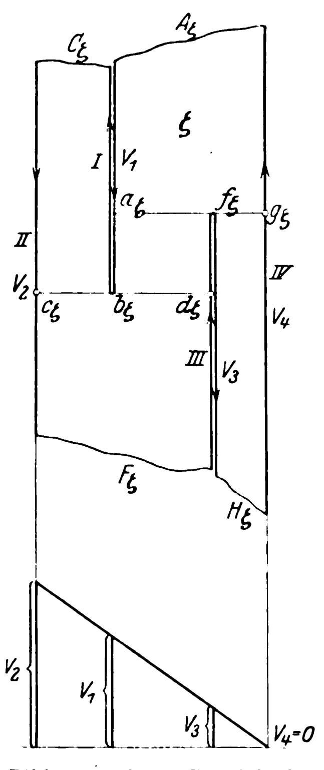


Bild 13 und 14. Bereich des homogenen Feldes zu Bild 11.

E. Das Potential ist längs einer Wicklung nicht mehr konstant.

Bei den bisherigen Betrachtungen zerfiel der Rand des gegebenen Bereiches in mehrere Teile mit verschiedenen, aber längs derselben konstanten Potentialen. Wir wollen jetzt zum allgemeineren Falle übergehen. Das Potential soll längs einer Wicklung von einem höheren Werte am Anfang der Wicklung zu einem niederen Werte am Ende der Wicklung stetig abfallen. Zur Ermittlung der elektrischen Feldstärke muß man wieder den Transformatorbereich auf den Bereich eines homogenen elektrischen Feldes abbilden.

Bild 15 stellt die Hoch- und Niederspannungswicklung, sowie einen Teil des geerdeten Mantels eines Hochspannungstransformators dar. Die Windungen der Hochspannungswicklung sollen sich zwischen den Punkten B und F erstrecken. Das Potential steigt vom Werte V_2 im Punkte F auf den Wert V_1 im Punkte B

an. Die Kraftlinien treffen, wie aus dem gezeichneten Bild zu ersehen ist, nicht mehr senkrecht auf die Wicklung auf, sondern besitzen eine Komponente parallel zur Wicklungsbegrenzung. Diese Komponente ist durch die Kapazität zwischen den Windungen bedingt. Längs der Strecke AB hat das Potential die konstante Größe V_1. Unterhalb des Punktes F herrscht überall das Potential V_2. Schließlich kann man längs der Niederspannungswicklung III das Potential als konstant ansehen.

Man bildet nun auf die gewöhnliche Weise die w-Ebene auf die obere Halbebene ab. Diese Aufgabe bietet für dieses Beispiel keine Schwierigkeiten, weil zur Bestimmung der unbekannten Konstanten (da wir den Ecken A, B und C die Punkte auf der X-Achse ∞, — 1 und 0 zugeordnet haben, so sind noch die Konstanten C_1, x_D und x_E zu berechnen) genügend Gleichungen vorhanden sind. Die Abbildung des Transformatorbereiches auf die obere Halbebene erfolgt durch:

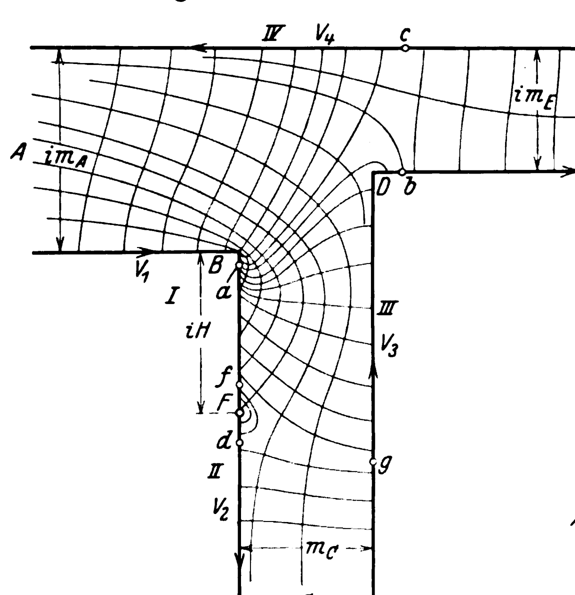


Bild 15. Längs des Randes FB steigt das Potential an.

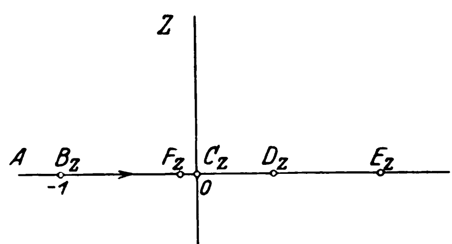


Bild 16. Abbildung des Bereiches in Bild 15 auf die obere Halbebene.

$$\frac{dw}{dz} = C_1 \cdot \frac{\sqrt{(z+1)(z-x_D)}}{z(z-x_E)}. \tag{43}$$

Die dem Punkte F auf der X-Achse entsprechende Stelle x_F erhält man aus Gleichung (43), wenn man diese zwischen den Grenzen x_B und x_F integriert und für $w = w_B - w_F = iH$ setzt.

Die obere Halbebene wird dann, wie Bild 17 zeigt, auf den Bereich eines homogenen Feldes abgebildet. Zu diesem Zwecke zeichnet man in Bild 18 den Potentialverlauf eines homogenen Feldes, welches sich parallel zur reellen Achse ξ der ζ-Ebene erstrecken soll, auf. Den Strecken der Berandung des Bildes 15): AB, FC, CE und EA entsprechen in der ζ-Ebene Äquipotentiallinien, parallel zur Richtung der imaginären Achse η, deren Stellung man aus Bild 18 findet, wenn man dort die entsprechenden Potentialwerte, welche längs dieser Kanten herrschen, aufsucht. Jedem Randpunkt des Transformatorbereiches (Bild 15) entspricht daher ein Punkt in der ζ-Ebene, den man mit Rücksicht auf sein gegebenes Potential an so eine Stelle bringen muß, daß die Homogenität des elektrischen Feldes der ζ-Ebene nicht gestört wird.

Da längs der Kante $F_W B_W$ das Potential ansteigt, so muß dieser Strecke in der ζ-Ebene eine bestimmte Kurve zwischen F_ξ und B_ξ entsprechen. Wir verbinden



nun die Punkte F_ζ und B_ζ durch eine Gerade. Im homogenen Felde treffen dann die Kraftlinien unter gleichem Winkel auf diese Gerade. Auf Grund der Konformität zwischen den beiden Abbildungen müssen offenbar auch in der w-Ebene die entsprechenden Kraftlinien die Kante B_w—F_w unter demselben Winkel schneiden. Die Verteilung der Wicklung, welche diesem Falle entspricht, kann man dann ausrechnen, wenn man zu den einzelnen Punkten der Strecke B_ζ — F_ζ der ζ-Ebene die entsprechenden Punkte auf der Kante B_w—F_w aufsucht und dort die zugehörigen Potentiale nach Bild 18 einträgt. Andererseits entspricht einem linearen Abfall des Potentials längs dieser Kante eine bestimmte Kurve im Bereich des homogenen Feldes. Das Abbildungsproblem kann man aber dann nicht mehr auf die im folgenden beschriebene Weise lösen, da sich das Schwarzsche Theorem nicht mehr anwenden läßt.

Zu unserem Falle zurückkehrend, sehen wir, daß in Bild 17 parallel zur ξ-Achse ein homogenes elektrisches Feld entsteht, falls man sich dort in jedem Punkte des gezeichneten Randes das entsprechende Potential, welches ihm in Bild 15 zukommt, aufgedrückt denkt. Die Stellen a_ζ, b_ζ, c_ζ, d_ζ, f_ζ und g_ζ entsprechen denjenigen Punkten, in welchen im Transformatorbereich zwei benachbarte Kraftlinien von zwei verschiedenen Kanten zusammenlaufen. Der Umlaufsinn um die drei Bereiche der w-, z- und ζ-Ebene ist wieder durch die eingetragenen Pfeile angegeben.

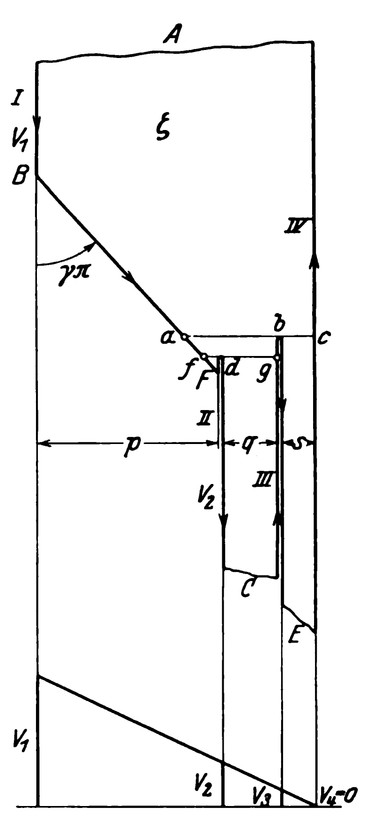


Bild 17 und 18. Abbildung des Transformatorbereiches in Bild 15 auf ein homogenes Feld für den Fall, daß die Kraftlinien die Kante BF unter demselben Winkel treffen.

Die Abbildungsfunktion lautet dann:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dz} &= \frac{C_1'}{(z-x_B)^\gamma (z-x_F)^{1-\gamma}(z-x_d)^{-1}(z-x_c)(z-x_b)^{-1}(z-x_E)^1} \\ &= C_1' \cdot \frac{(z-x_F)^\gamma (z-x_b)(z-x_d)}{z(z+1)^\gamma (z-x_F)(z-x_E)}\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Die drei Punktepaare, welche wir zunächst einander zuordnen mußten, sind A, C und E. Da nun auch die Punkte B_z und F_z durch die schon erfolgte Abbildung der w-Ebene auf die obere Halbebene, auf der x-Achse festgelegt sind, so muß man dafür die Lage der Ecken B_ζ und F_ζ des Polygons der ζ-Ebene vorläufig noch unbestimmt lassen. Diese werden dann (oder was dasselbe ist: der Winkel γ) nachträglich ermittelt. Ebenso unbekannt sind noch die Ordinaten der Punkte b_ζ und d_ζ. Zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe ist die Kenntnis der Konstanten C_1', x_b, x_d und γ [in Gleichung (44)] notwendig. Zu ihrer Bestimmung integrieren wir wieder wie in den vorigen Kapiteln längs der Strecken bei A_w, C_w und E_w. Der im Unendlichen gelegenen Strecke q bei C_w entspricht ein kleiner Halbkreis

$$z = \varrho e^{i\varphi}$$

um den Punkt C_z. Die Integration der Gleichung (44) längs dieses Halbkreises ergibt dann, wenn man die sehr kleinen Größen neben den endlichen vernachlässigt,

$$\int d\zeta = q = \int_{\pi}^{0} C_1' \cdot \frac{(-x_F)^\gamma (-x_b)(-x_d)}{\varrho e^{i\varphi} (-x_F)(-x_E)} \cdot i\varrho e^{i\varphi} d\varphi$$

oder

$$q = -i\pi C_1' \frac{x_b}{x_E} (-x_F)^\gamma \frac{(x_d)}{(x_F)}. \tag{45}$$

Eine ähnliche Integration längs des kleinen Halbkreises

$$z = x_E + \varrho e^{i\varphi}$$

um den Punkt x_E, der eine Integration längs der Strecke s bei E_w entspricht, führt zu

$$s = -i\pi C_1' \frac{(x_E - x_F)^\gamma (x_E - x_b)(x_E - x_d)}{x_E (x_E + 1)^\gamma (x_E - x_F)}. \tag{46}$$

Schließlich erhält man aus einer Integration längs des sehr großen Halbkreises bei A_z, dem die Strecke $p + q + s$ entspricht:

$$-(p + q + s) = i\pi C_1'. \tag{47}$$

Auf diese Weise haben wir drei Bestimmungsgleichungen gewonnen, benötigen aber zur Berechnung unserer vier unbekannten Konstanten noch eine Gleichung. Diese erhalten wir, wenn wir das Integral

$$\int_{B\zeta}^{F\zeta} d\zeta = \zeta_F - \zeta_B = C_1' \int_{-1}^{x_F} \frac{(z - x_F)^\gamma (z - x_b)(z - x_d)}{(z + 1)^\gamma \cdot z \cdot (z - x_F)(z - x_E)} \cdot dz \tag{48}$$

zwischen den Grenzen B_z und F_z integrieren.

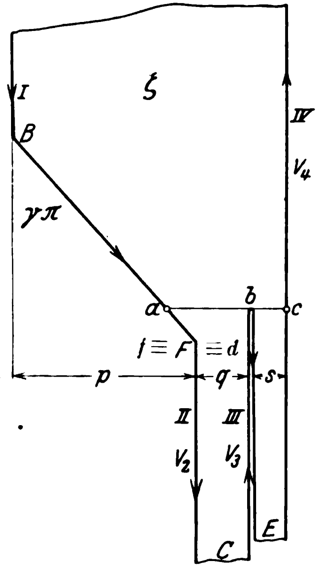


Bild 19. Vereinfachtes Bild des homogenen Feldes unter der Annahme, daß $f \equiv F \equiv d$.

Die Auflösung dieses Integrals stößt aber auf große Schwierigkeiten, und wir wollen uns der Einfachheit halber so helfen, daß wir die Punkte d, f und F zusammenfallend annehmen. Durch diese Annahme haben wir das Feld zwischen der Hochspannungswicklung (um den Punkt F_w herum) und der unterhalb liegenden Kante II vernachlässigt. Diesem Felde entspricht in Bild 17 das Feld zwischen den Strecken f_ζ, F_ζ und F_ζ, d_ζ. An Stelle dieses Bildes tritt dann der Bereich, wie er in Bild 19 gezeichnet ist. Die gemachte Annahme ist nur dann zulässig, wenn das Verhältnis $\frac{m_e}{H}$ klein ist und außerdem die Spannungsdifferenz $V_2 - V_3$ und somit der Wert q von Null verschieden sind. Es entsteht dann zwischen den Kanten II und III ein kräftiges Feld, das die Ausbildung des vernachlässigten Feldes verhindert.

Auf diese Weise bleiben nur mehr drei unbekannte Konstante übrig, zu deren Bestimmung die Gleichungen (45), (46) und (47) hinreichend sind. Unter der Voraussetzung der gemachten Annahme ($x_d = x_F$) lauten dann die Gleichungen:

$$q = -i\pi C_1' \cdot \frac{x_b}{x_E} (-x_F)^\gamma \tag{45a}$$

$$s = -i\pi C_1' \cdot \frac{(x_E - x_b)(x_E - x_F)^\gamma}{x_E (x_E + 1)^\gamma}, \tag{46a}$$

$$i\pi C_1' = -(p + q + s). \tag{47a}$$

Aus diesen Beziehungen können wir die Unbekannten C_1', x_b und γ ermitteln und erhalten für die Abbildung

$$\frac{d\zeta}{dz} = C_1' \frac{(z - x_b)(z - x_F)^\gamma}{z(z - x_E)(z + 1)^\gamma}. \tag{48a}$$

Diese Gleichungen gelten, wie schon erwähnt, unter der Voraussetzung, daß q von Null verschieden ist, daß also die Kanten II und III nicht dasselbe Potential besitzen.

Die Spannungsdifferenz zwischen II und IV, das ist zwischen der Niederspannungswicklung und dem Mantel ist gegenüber der Hochspannung gewöhnlich klein, und man kann $s = 0$ setzen, Dann fällt der Punkt b mit der Ecke E zusammen, so daß $x_b = x_E$ wird, und somit ist

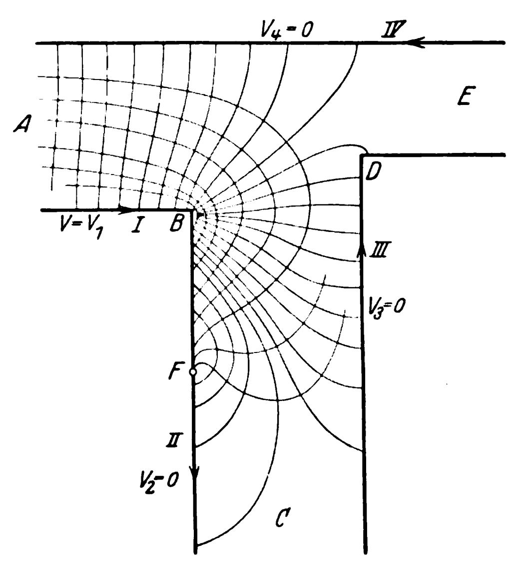


Bild 20. Zwischen den Kanten II und III und den Kanten III und IV ist keine Potentialdifferenz vorhanden.

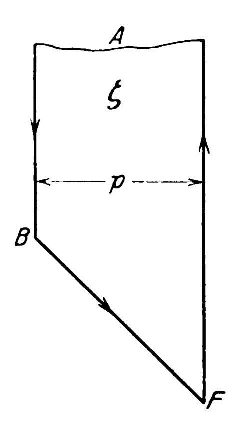


Bild 21. Bereich des homogenen Feldes, wenn zwischen den Rändern II, III u. IV keine Potentialdifferenz herrscht (siehe Bild 20).

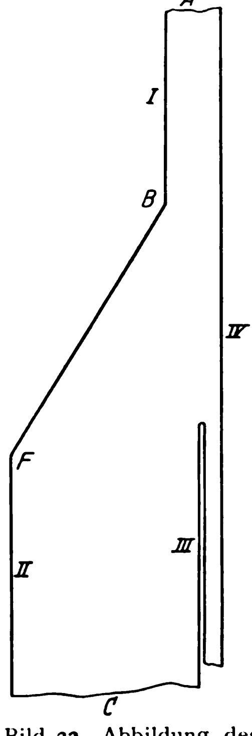


Bild 22. Abbildung des Bereiches in Bild 15, auf ein homogenes Feld, wenn das Potential von F nach B abfällt.

$$q = (p + q)(-x_F)^\gamma \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{\log \frac{q}{p+q}}{\log(-x_F)}, \tag{45b}$$

$$C_1' = \frac{i}{\pi} \cdot (p + q) \tag{47b}$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i}{\pi}(p + q)\frac{(z - x_F)^\gamma}{z(z + 1)^\gamma}. \tag{48b}$$

Ist jedoch zwischen den Kanten II und III keine Potentialdifferenz vorhanden und das Verhältnis $\frac{m_c}{H}$ noch außerdem groß, so wird ein großer Teil der Kraftlinien, welche von der Hochspannungswicklung BF ausgehen, gegen die Kante FC verlaufen (siehe Bild 20) und unsere gemachte Annahme gilt daher für $q = 0$ nicht mehr. Die Begrenzung des homogenen Feldes, auf welches die Abbildung erfolgt, ist dann, falls auch $s = 0$, aus Bild 21 ersichtlich und die Abbildungsfunktion lautet

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i}{\pi} \cdot \frac{p}{(z - x_B)^\gamma (z - x_F)^{1-\gamma}}.$$

Der Winkel γ ergibt sich durch Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen x_B und x_F. Der Punkt d fällt mit C zusammen (siehe Bild 20) und daher ist $x_d = x_C = 0$ [siehe auch Gleichung (45)].

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_w$ in einem Punkte des Transformatorbereiches berechnet man wieder nach Gleichung (10). Falls z. B. die Spannungsdifferenz zwischen den Kanten II und III von Null verschieden ist, dagegen $V_3 = V_4$, so ergibt sich die Feldstärke mit Rücksicht auf die Gleichungen (43) und (48b) mit

$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{R}\left[\frac{\frac{d\zeta}{dz}}{\frac{dw}{dz}}\right] = -\mathfrak{R}\left[\frac{\frac{i}{\pi}(p+q)(z-x_F)^{\gamma}(z-x_E)}{C_1(z+1)^{\gamma+\frac{1}{2}}\sqrt{z-x_D}}\right].$$

Zur Kontrolle lassen wir wieder $z = 0$ werden und berechnen das elektrische Feld in der Nähe des Punktes C_w, an welcher Stelle es homogen sein muß. Dann ist für $z = 0$:

$$\mathfrak{E}_w = -\mathfrak{R}\left[\frac{\frac{i}{\pi}(p+q)(-x_F)^{\gamma}(-x_E)}{C_1 i\sqrt{x_D}}\right].$$

Für $(-x_F)^{\gamma}$ setzen wir den Wert $\frac{q}{p+q}$ aus Gleichung (45b) ein. Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt für den gezeichneten Fall nach Bild 15, falls man diesen Bereich auf die obere Halbebene abbildet:

$$\frac{\sqrt{x_D}}{x_E} = -\frac{m_c}{\pi C_1}$$

und es folgt somit:

$$\mathfrak{E}_w = -\frac{q}{m_c} = \frac{V_2 - V_3}{m_c}\ \text{Volt/cm}.$$

Auf eine ähnliche Weise kann der Fall behandelt werden, wenn das Potential längs der Hochspannungswicklung von der Ecke B_w gegen den unterhalb liegenden Punkt F_w ansteigt. Unterhalb dieses Punktes denkt man sich der Einfachheit halber eine konstante Spannungsdifferenz zwischen den Kanten II und III. Die Abbildung auf ein homogenes elektrisches Feld erfolgt nach Bild 22. Bei der Durchführung der Berechnung setzt man, ähnlich wie im vorhergehenden Beispiele, voraus, daß keine Kraftlinien von der Kante BF zur Kante BA (um die Ecke B herum) verlaufen, was übrigens nur dann eintritt, wenn zur gegenüberliegenden Kante IV ein sehr kleines oder gar kein Potentialgefälle vorhanden ist. Diesem Felde würde ein Einschnitt bei B, ähnlich wie in Bild 17, an der Stelle F entsprechen. Bei größeren Spannungsdifferenzen zwischen I und IV hingegen kann sich dieses Feld nicht ausbilden und man gelangt zum Bild 22.

Am Schlusse dieser Betrachtungen zeigen wir der Vollständigkeit halber, wie man diese Probleme auch mit Hilfe des Greenschen Satzes, oder, da es sich um die Potentialbestimmung im Inneren eines Kreises handelt, mit Hilfe des Poissonschen Satzes lösen könnte. Das Poissonsche Integral

$$V(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(1,\psi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+1^2}\,d\psi \tag{49}$$

ermöglicht es, im Inneren des Einheitskreises das Potential in irgendeinem Punkte $re^{i\varphi}$ zu berechnen, wenn das Potential $V(1,\psi)$ längs der Peripherie dieses Kreises gegeben ist, wobei die Integration über den Rand des Kreises zu erstrecken ist. Um nun das Feld im Inneren eines Transformatorbereiches zu ermitteln, müßte man diesen auf die Fläche dieses Einheitskreises abbilden. Liegt die Abbildung auf die



obere Halbebene schon vor [Gleichung (3)], so erfolgt die weitere Abbildung auf den Einheitskreis durch die linear gebrochene Funktion

$$\lambda = -\frac{z - i}{z + i}. \tag{50}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Peripherie des Kreises der X-Achse entspricht.

Mit Hilfe des Poissonschen Integrals bestimmt man dann zu jedem λ das zugehörige Potential und die Aufgabe ist gelöst, wenn man zu jedem Punkte w den entsprechenden λ-Wert und das Potential an dieser Stelle angeben kann. Abgesehen von den Schwierigkeiten der Abbildung auf die obere Halbebene, welche durch die Integration der Gleichung (3) entstehen, kommt noch hier die Bestimmung des Integrals (49) hinzu.

Zusammenfassung.

Mit Hilfe des Schwarzschen Theorems der konformen Abbildung kann man geradlinig begrenzte polygonale Bereiche, deren Inneres von der Laplaceschen Gleichung beherrscht ist, auf die obere Halbebene abbilden. Durch eine weitere Abbildung der oberen Halbebene auf den Bereich eines Plattenkondensators, der sich beiderseits ins Unendliche erstreckt (Parallelstreifen), führt man das Gebiet des Polygons auf den genau bekannten Bereich eines homogenen elektrischen Feldes über und ist somit imstande, die Feldstärke und das Potential in jed m Punkte des gegebenen Bereiches anzugeben.

Eine Anwendung dieser Theorie ergibt sich bei der elektrostatischen Berechnung von Hochspannungstransformatoren, falls der betrachtete Bereich nicht sehr kompliziert ist, da man sonst auf schwer lösbare Integrale stößt.

In der vorliegenden Arbeit werden Bereiche von Transformatoren untersucht, deren Berandung aus mehreren Wicklungen mit verschiedenen Potentialen besteht. Der Verfasser gibt an Hand von zwei Beispielen an, wie die Berandung des homogenen Feldes, auf welches der Transformatorbereich abgebildet wird, beschaffen sein muß. Die Abbildung wird durchgeführt und die elektrische Feldstärke angegeben.

Es werden auch die Fälle untersucht, wenn längs einer Wicklung das Potential stetig ansteigt, so daß infolge des Spannungsunterschiedes zwischen den einzelnen Punkten derselben Wicklung die Kraftlinien unter einem Winkel auf die Wicklung auftreffen, der von 90° verschieden ist. Um diese Aufgabe der Rechnung zugänglich zu machen, muß man sich auf alle Fälle beschränken, bei denen dieser Winkel längs der Wicklung konstant ist. Man kann dann hinterher die Verteilung der Wicklung berechnen, die dieses Feld verursacht.



Zur Tangensformel von Breitfeld. II.

Von

G. Hauffe, Dresden.

Einleitung.

Als Breitfeld im Jahre 1899 seine Tangensformel[1] veröffentlichte, enthielt er sich vorsätzlich eines Urteils über deren praktische Verwertung. Heute ist ihre Brauchbarkeit allgemein anerkannt: Schaubilder[2] sind entworfen worden, die den $\cos\varphi$ des symmetrisch belasteten Drehstromnetzes aus dem Verhältnis der Ausschläge der beiden nach Behn-Eschenburg und Aron geschalteten Leistungsmesser abzulesen gestatten; neuerlich hat Groezinger[3] eine Fluchtlinientafel entworfen, die die Auswertung der Breitfeldschen Formel beschleunigen soll. Neben ihrem praktischen Wert kommt ihr eine tiefere Bedeutung zu: zweifellos ist sie ein Sonderfall einer allgemeineren Gleichung, die für das symmetrisch belastete n-Phasensystem den Leistungsfaktor aus den Ausschlägen der $n - 1$ notwendigen Leistungsmesser zu berechnen gestattet. Mit dieser Frage soll sich die vorliegende Arbeit befassen.

Gesamtleistung und Teilleistungen des symmetrisch belasteten n-Phasensystems.

Für die Gesamtleistung des symmetrisch belasteten n-Phasensystems gilt:

$$N_{ges} = n P I \cos\varphi, \tag{1}$$

P = Zweigspannung,
I = Zweigstrom,
φ = Phasenverschiebung zwischen beiden.

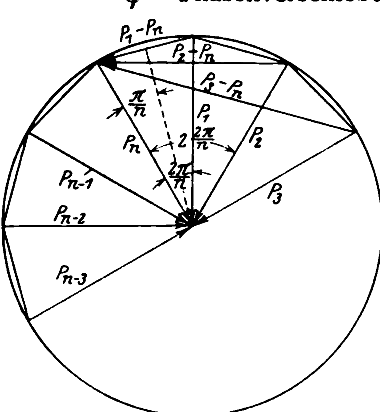


Bild 1. Spannungspolygon des n-Phasensystems.

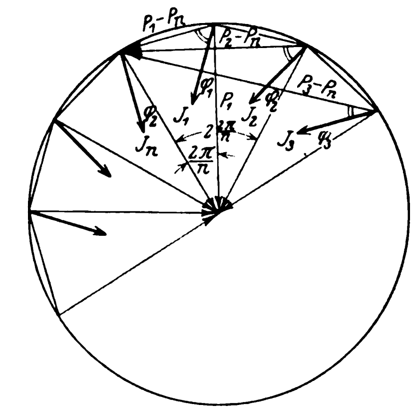


Bild 2. Spannungen und Ströme des symmetrisch belasteten n-Phasensystems.

Sie wird ermittelt als Summe der $n - 1$ Leistungsmesser-Angaben. Die Gleichung (1) fassen wir auf als Gleichung zwischen den beiden Unbekannten „Leistungsfaktor $\cos\varphi$" und „Zweigscheinleistung P. I". Aus dem Momentanwert der Gesamtleistung entwickeln wir die Ausdrücke der Teilleistungen; es ist:

$$n_{ges} = p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3 + \ldots\ldots + p_n i_n.$$

Die Bemerkung, daß nur $n - 1$ Leistungsmesser erforderlich seien, besagt, daß ein Nulleiter nicht vorhanden ist, also gilt nach Kirchhoff

[1] ETZ 1899, S. 120.
[2] W. Skirl, Wechselstromleistungsmessungen. Springer, Berlin 1920, S. 180.
[3] Groezinger, Fluchtlinientafel zur Berechnung des $\cos\varphi$. Springer, Berlin 1925.

$$\sum_{k=1}^{k=n} i_k = 0$$

oder

$$i_n = -i_1 - i_2 - i_3 - \ldots\ldots - i_{n-1}$$

und

$$n_{ges} = (p_1 - p_n)\, i_1 + (p_2 - p_n)\, i_2 + (p_3 - p_n)\, i_3 + \ldots\ldots + (p_{n-1} - p_n)\, i_{n-1}.$$

Aus dem Spannungspolygon, Bild 1, folgt:

$$P_1 - P_n = 2\,P_1 \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} = 2\,P \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$P_2 - P_n = 2\,P_2 \cdot \sin 2\frac{2\pi}{2n} = 2\,P \cdot \sin 2\frac{\pi}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_k - P_n = 2\,P \cdot \sin k\frac{\pi}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{n-1} - P_n = 2\,P \cdot \sin (n-1)\frac{\pi}{n}.$$

Die Effektivwerte der Ströme sind:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots\ldots = I_{n-1} = I,$$

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom eines Leistungsmessers wird aus Bild 2 abgelesen:

$$\sphericalangle (P_1 - P_n)\, I_1 = \sphericalangle (P_1 - P_n)\, P_1 - \varphi_1 = \frac{1}{2}\left(180 - \frac{2\pi}{n}\right) - \varphi_1 = 90 - \frac{\pi}{n} - \varphi_1,$$

$$\sphericalangle (P_2 - P_n)\, I_2 = \sphericalangle (P_2 - P_n)\, P_2 - \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(180 - 2\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi_2 = 90 - 2\frac{\pi}{n} - \varphi_2$$

allgemein:

$$\sphericalangle (P_k - P_n)\, I_k = \sphericalangle (P_k - P_n)\, P_k - \varphi_k = 90 - k\frac{\pi}{n} - \varphi_k.$$

Da Symmetrie vorausgesetzt war, ist

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots\ldots = \varphi_{n-1} = \varphi$$

und man erhält als Angabe des k. Leistungsmessers

$$N_k = 2\,P \sin k\frac{\pi}{n} \cdot J \cos\left(90 - k\frac{\pi}{n} - \varphi\right) = 2\,P\,J \sin k\frac{\pi}{n} \sin\left(k\frac{\pi}{n} + \varphi\right),$$

sowie die Gesamtleistung nach Übergang zu Effektivwerten:

$$N_{ges} = \sum_{k=1}^{k=n-1} N_k = 2\,P\,J \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin k\frac{\pi}{n} \sin\left(k\frac{\pi}{n} + \varphi\right).$$

Es erübrigt sich, die einfache Rechnung vorzuführen, die auf das bekannte Ergebnis

$$N_{ges} = n\,P\,J \cos\varphi$$

führt.

Die allgemeine Gleichung für tang φ.

Wir bemerken aber, daß jede beliebige additive Kombination der $n-1$ Leistungsmesser-Angaben — in dieser Summe müssen manche Glieder mit negativem Vorzeichen eingesetzt werden, mindestens aber eines — eine lineare Funktion von Ausdrücken der Form N_k ist. Diese beliebige Funktion wollen wir schreiben:



$$N_b = F\left(2\,P\,I \sin k\frac{\pi}{n} \sin\left(k\frac{\pi}{n} + \varphi\right)\right)_{k=1}^{k=n-1}.$$

Löst man $\sin\left(k\frac{\pi}{n} + \varphi\right)$ auf, so wird

$$N_b = F\left(2\,P\,I\left(\sin^2 k\frac{\pi}{n}\cos\varphi + \sin k\frac{\pi}{n}\cos k\frac{\pi}{n}\sin\varphi\right)\right)_{k=1}^{k=n-1}.$$

$\sin\varphi$ ist durch den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ ausdrückbar, folglich ist

$$N_b = \Phi\,(P\,I, \cos\varphi). \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) lassen den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ errechnen, im allgemeinen ergibt sich einfacher $\tang\varphi$.

Es war gesagt worden, daß außer der Summe der Leistungsmesser-Angaben, welche die Gesamtleistung ergibt, noch eine beliebige Kombination der Leistungsmesser-Angaben hinzugenommen werden müßte, um den Leistungsfaktor zu errechnen. Bei Vielphasensystemen gibt es eine große Zahl solcher Kombinationsmöglichkeiten und dementsprechend auch eine gleiche Zahl von Ausdrücken für $\tang\varphi$. Bei Drehstrom aber, wo mit zwei Wattmetern gemessen wird, ist außer der Gesamtleistung $N_{ges} = N_1 + N_2$ nur die Kombination $N_1 - N_2$ möglich.

Auf die Tangensformel von Breitfeld müssen wir kommen, wenn wir beim Vielphasensystem als beliebige Kombination N_b folgende festsetzen: Wir addieren die Angaben aller Leistungsmesser mit geradzahliger Ordnungszahl und subtrahieren die Summe von der Summe der Angaben der Leistungsmesser mit ungerader Ordnungszahl, d. h. wir bilden

$$N_b = (N_1 + N_3 + N_5 + \ldots\ldots) - (N_2 + N_4 + N_6 + \ldots\ldots).$$

Sei zunächst angenommen, daß die Phasenzahl des Systems ungerade ist, so läßt sich schreiben:

$$N_1 + N_3 + N_5 + \ldots = 2\,P\,J\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin(2h-1)\frac{\pi}{n}\sin\left((2h-1)\frac{\pi}{n} + \varphi\right),$$

$$N_2 + N_4 + N_6 + \ldots = 2\,P\,J\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin 2h\frac{\pi}{n}\sin\left(2h\frac{\pi}{n} + \varphi\right).$$

und

$$N_b = 2\,P\,I\left(\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin(2h-1)\frac{\pi}{n}\sin\left((2h-1)\frac{\pi}{n} + \varphi\right) - \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin 2h\frac{\pi}{n}\sin\left(2h\frac{\pi}{n} + \varphi\right)\right).$$

Aus (1) ergibt sich

$$P\,I = \frac{N_{ges}}{n \cdot \cos\varphi}$$

so daß

$$N_b = \frac{2\,N_{ges}}{n \cdot \cos\varphi}\left(\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin^2(2h-1)\frac{\pi}{n}\cos\varphi + \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin(2h-1)\frac{\pi}{n}\cos(2h-1)\frac{\pi}{n}\sin\varphi\right.$$

$$\left. - \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin^2 2h\frac{\pi}{n}\cos\varphi - \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin 2h\frac{\pi}{n}\cos 2h\frac{\pi}{n}\sin\varphi\right).$$

Hierin setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\left.\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin^2 (2h-1)\frac{\pi}{2} = S_1; & \displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin (2h-1)\frac{\pi}{n} \cos (2h-1)\frac{\pi}{n} = S_2; \\ \displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin^2 2h\frac{\pi}{n} = S_3; & \displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sin 2h\frac{\pi}{n} \cos 2h\frac{\pi}{n} = S_4.\end{array}\right\} \quad (3)$$

und erhalten

$$N_b = \frac{2\,N_{ges}}{n \cdot \cos\varphi}\left((S_1 - S_3)\cos\varphi + (S_2 - S_4)\sin\varphi\right)$$

$$n \cdot N_b = 2\,N_{ges}\left((S_1 - S_3) + (S_2 - S_4)\operatorname{tang}\varphi\right)$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{n \cdot N_b - 2\,N_{ges}(S_1 - S_3)}{2\,N_{ges}(S_2 - S_4)}.$$

Für die Summenausdrücke S gelten die Gleichungen (3), solange die Zahl n der Phasen eine ungerade ist. Bei geradzahligem n haben sie die Werte

$$\left.\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n}{2}} \sin^2 (2h-1)\frac{\pi}{n} = S_1; & \displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n}{2}} \sin (2h-1)\frac{\pi}{n} \cos (2h-1)\frac{\pi}{n} = S_2; \\ \displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n-2}{2}} \sin^2 2h\frac{\pi}{n} = S_3; & \displaystyle\sum_{h=1}^{h=\frac{n-2}{2}} \sin 2h\frac{\pi}{n} \cos 2h\frac{\pi}{n} = S_4\end{array}\right\} \quad (4)$$

Die für tang φ entwickelte Gleichung kann als die allgemeine Gleichung angesehen werden, von der die Breitfeldsche Formel ein Sonderfall ist. Es gilt nämlich für Drehstrom:

$$N_b = N_1 - N_2; \qquad N_{ges} = N_1 + N_2;$$

$$\begin{array}{llll} S_1 = \sin^2\frac{\pi}{3}; & S_2 = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}; & S_3 = \sin^2 2\frac{\pi}{3}; & S_4 = \sin 2\frac{\pi}{3}\cos 2\frac{\pi}{3}; \\ = 3/4 & = \sqrt{3}/4 & = 3/4 & = -\sqrt{3}/4 \end{array}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3(N_1 - N_2) - 2(N_1 + N_2)\cdot 0}{2(N_1 + N_2)\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}\,\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}.$$

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die Tangensformel von Breitfeld der Sonderfall einer allgemeinen Gleichung ist, welche im symmetrisch belasteten Mehrphasensystem den Leistungsfaktor aus den Angaben der n — 1 notwendigen Leistungsmesser zu errechnen gestattet.

Eine neue Schaltung zur Messung der Durchschlagsverzögerung elektrischer Isolatoren.

Von

Otto Mayr.

Mitteilung aus dem Hochspannungslaboratorium der AEG Transformatorenfabrik. Berlin-Oberschöneweide.

Inhaltsübersicht.

I. Zur Definition der Durchschlagsverzögerung.
II. Beschreibung der Meßmethode.
III. Über die Meßgenauigkeit.
IV. Meßergebnisse.
Die Versuchsanordnung.
Die Verzögerung bei Überschlägen in Luft.
Die Verzögerung flüssiger und fester Isolatoren.

I. Zur Definition der Durchschlagsverzögerung.

Wird an eine Funkenstrecke plötzlich eine konstante Spannung angelegt, welche mindestens gleich der stationären Überschlagspannung ist, so wird nach kurzer Zeit ein Überschlag erfolgen. Unter der Funkenverzögerung versteht man dabei im allgemeinen die Zeit vom Anlegen der Spannung bis zum Beginn des Überschlags, welcher durch die Ausbildung eines Funkenkanals festgelegt ist.

In gewissen Fällen, wie z. B. bei der Beurteilung eines Überspannungsableiters, darf man jedoch nicht vergessen, daß der Widerstand des Funkenkanals zunächst sehr groß ist. Bis zum wirklichen Zusammenbruch der Spannung an der Funkenstrecke vergeht deshalb, vom Einsetzen des Überschlags an gerechnet, nochmals eine geringe Zeit, welche im folgenden Widerstandsverzögerung genannt sei. In den meisten Fällen ist diese Widerstandsverzögerung im Vergleich zur Funkenverzögerung sehr gering. Doch darf gerade bei ebenen Elektroden und bei Kugeln, welche wegen ihrer überaus geringen Funkenverzögerung für Überspannungsableiter ausschließlich in Frage kommen, die Widerstandsverzögerung nicht vernachlässigt werden.

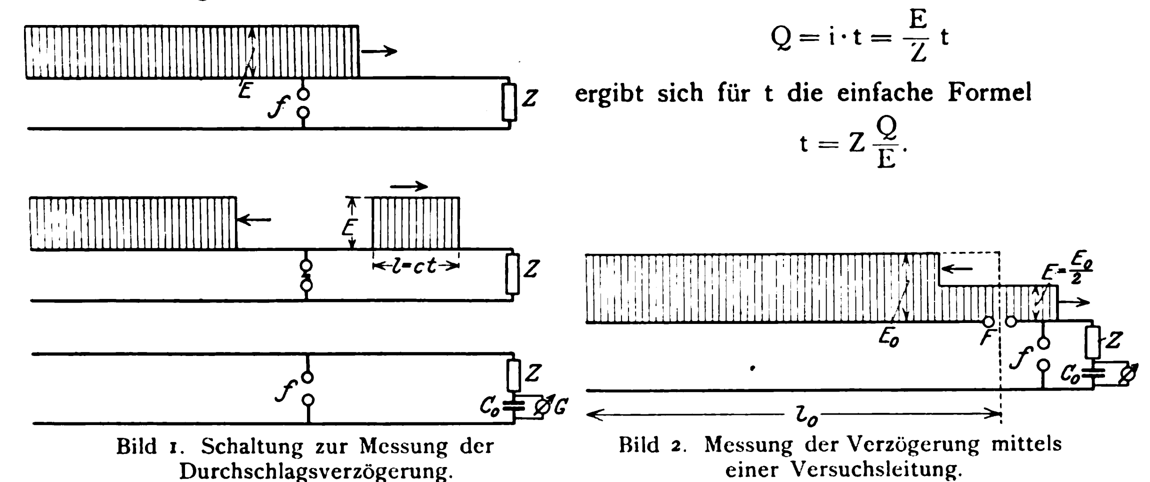
Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich in der Praxis aus der Forderung, momentan eine bestimmte Spannung anzulegen. Die uns zum schnellsten Schalten zur Verfügung stehenden Funkenstrecken ändern ihren Widerstand ebenfalls nicht momentan vom Wert Unendlich auf den Wert Null. Die eingangs gestellte Forderung ist deshalb immer nur bis zu einem gewissen Grade erfüllt. Ebenso wie die Widerstandsverzögerung der zu untersuchenden Funkenstrecke, ist auch diese Tatsache in erster Linie bei Messungen an Funkenstrecken mit kleinster Verzögerung zu berücksichtigen.

II. Beschreibung der Meßmethode.

Bild 1a zeigt eine Leitung, welche am rechten Ende durch einen dem Wellenwiderstand der Leitung gleichen, induktionsfreien, Ohmschen Widerstand Z überbrückt ist. Bei f ist die zu untersuchende Funkenstrecke eingebaut. Eine von links kommende Wanderwelle von der Höhe E wird, solange die Funkenstrecke f nicht anspricht, wie in Bild 1a gezeigt, ungehindert über f hinaus weiterlaufen. Sobald jedoch f anspricht, kann weitere Ladung an f nicht mehr vorbei. Der Rest der Welle wird dann bei f mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert (Bild 1b) und läuft wieder auf der Leitung zurück. Der von f durchgelassene Teil der Welle, welcher am Leitungsende von dem Widerstand Z reflexionsfrei verschluckt wird, gibt ein direktes Maß für die gesamte Verzögerung, d. i. Funkenverzögerung plus Wider-



standsverzögerung. Zwischen der Länge l dieses Wellenabschnittes und der gesamten Verzögerung t besteht die Beziehung $l = c\,t$. Die Zeit t wird am einfachsten durch Messung der Ladung des Wellenabschnittes bestimmt. Zu diesem Zweck wird nach Bild 1c in Reihe mit dem Widerstand Z ein ballistisches Galvanometer G mit parallel geschaltetem Schutzkondensator C_0 eingebaut. Wird dieser Schutzkondensator genügend groß bemessen, so wird er zunächst, ohne daß an seinen Klemmen eine nennenswerte Spannung auftritt, die gesamte Ladung Q der Welle aufnehmen. Nachdem der Funke bei f in kürzester Zeit wieder erlischt, muß sich bei geeigneter Wahl der Zeitkonstante des Galvanometerkreises die Ladung Q über das Galvanometer ausgleichen. Da



$$Q = i \cdot t = \frac{E}{Z}\,t$$

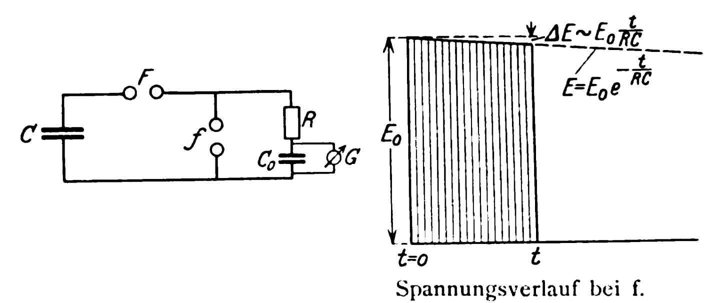
ergibt sich für t die einfache Formel

$$t = Z\,\frac{Q}{E}.$$

Bild 1. Schaltung zur Messung der Durchschlagsverzögerung.

Bild 2. Messung der Verzögerung mittels einer Versuchsleitung.

Die Erzeugung einer Wanderwelle konstanter Spannung erfolgt am besten nach der Schaltung Bild 2. Eine Leitung von der Länge l_0 wird über einen in Bild 2 nicht eingetragenen hochohmigen Widerstand an eine hochgespannte Gleichstromquelle angelegt. Die Leitung wird bis zu der durch den Elektrodenabstand bei F gegebenen Spannung E_0 aufgeladen. Der Überschlag bei F löst eine in der Richtung $F \rightarrow Z$ laufende Wanderwelle von der Höhe $E = \frac{E_0}{2}$ und der Länge $2\,l_0$ aus.



Spannungsverlauf bei f.

Bild 3. Messung der Verzögerung mittels Kondensator und Widerstand.

Die Schaltung kann, wenn f entfernt ist, zur Eichung des ballistischen Galvanometers benützt werden. Ist bei gegebener Spannung E_0 der Galvanometerausschlag in diesem Fall α_0. so ergibt sich dann bei gleicher Spannung für einen beliebigen Ausschlag α die Verzögerung

$$t = \frac{2\,l_0}{c}\,\frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

Ist t größer als $\frac{2 l_0}{c}$, so wird man, falls eine Verlängerung der Versuchsleitung nicht möglich ist, mit dieser Schaltung nicht mehr auskommen. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, statt der Versuchsleitung eine konzentrierte Kapazität zu verwenden (Bild 3). Die bei f auftretende Spannung ist dann allerdings nicht mehr konstant. Sie fällt, wie in Bild 3 gezeigt wird, nach einer e-Funktion ab. Da jedoch der Widerstand R bei entsprechender Empfindlichkeit des Galvanometers sehr hoch gewählt werden kann, läßt es sich meist so einrichten, daß die Spannung bis zum vollendeten Überschlag bei f nur um wenige Prozent absinkt. Rechnet man dann mit konstanter Spannung $E = E_0$ (vgl. Bild 3), so wird wieder $i = \frac{E}{R}$ und damit aus $Q = i\,t$

$$t = R\frac{Q}{E}.$$

Abschließend sei noch bemerkt, daß die oben angegebenen Schaltungen, von der überaus einfachen theoretischen Grundlage abgesehen, die Annehmlichkeit haben, daß bei jedem Überschlag eine Galvanometerablesung und damit die Bestimmung von t erfolgen kann. Dadurch sind vor allem Messungen an flüssigem und festem Isoliermaterial viel weniger zeitraubend wie bei anderen Methoden, wo man die Durchschlagspannung durch Verstellen von Funkenstrecken eingrenzen muß.

III. Über die Meßgenauigkeit.

Der in Bild 1 und 3 skizzierte Spannungsverlauf läßt sich praktisch nie genau erreichen. Wie schon eingangs erwähnt wurde, dauert es immer eine gewisse Zeit bis der Funkenwiderstand sowohl bei F als auch bei f so klein ist, daß er dem Widerstand Z bezw. R gegenüber verschwindet. Die Folge davon ist, daß die Spannung bei f nicht momentan einsetzt und auch nach beendetem Überschlag bei f nicht plötzlich auf Null absinkt. Man hat deshalb statt der in Bild 1 und 3 gezeichneten Kurven in Wirklichkeit etwa die in Bild 4 und 5 angegebenen Verhältnisse zu erwarten. Die genaue Kurvenform läßt sich allerdings theoretisch nicht

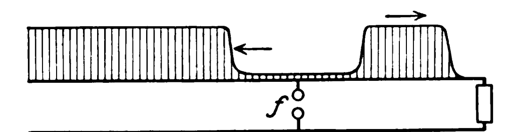


Bild 4. Spannungsverlauf nach Bild 1 b unter Berücksichtigung des endlichen Funkenwiderstandes.

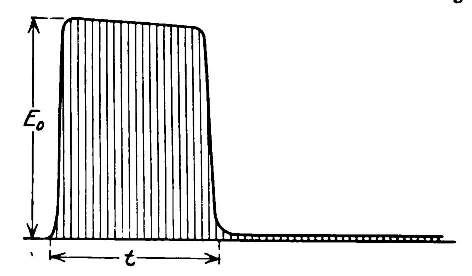


Bild 5. Spannungsverlauf nach Bild 3 unter Berücksichtigung des endlichen Funkenwiderstandes.

ermitteln. Nimmt man jedoch an, daß zunächst f nicht anspricht, so läßt sich wenigstens der Spannungsanstieg bei f mittels der Toeplerschen Formel[1] für den Funkenwiderstand nachrechnen. Man kommt dann z. B. bei der Schaltung nach Bild 3 zu dem Ergebnis, daß, bevor bei f überhaupt die Spannung E erreicht ist, über F und R erst die Ladung

$$Q_0 = \frac{k\,F}{R}\,\frac{E}{E_0 - E}\,\mathrm{Cb}$$

abgeflossen sein muß. Dabei bedeutet k die Toeplersche Funkenkonstante ($k \sim 10^{-4}$) und F die Funkenlänge bei F in cm. Dem entspricht eine zusätzliche Zeit von

[1] Toepler, Arch. f. Elektrot. Bd. XIV, S. 305, 1925. — O. Mayr, Arch. f. Elektrot. Bd. XVII, S. 52.

$$t_0 = \frac{k F}{E_0 - E} \text{ sec.}$$

Man erhält z. B. bei $F = 0{,}6$ cm und $E_0 - E = 1$ kV, d. i. 5% von $E_0 = 20$ kV, $t_0 = 0{,}06\,\mu$sec, bei $F = 3$ cm und $E_0 - E = 5$ kV, d. i. 5% von $E_0 = 100$ kV, $t_0 = 0{,}06\,\mu$sec.

Sind die gemessenen Verzögerungen von derselben Größenordnung wie t_0, was z. B. bei Kugeln vorkommen kann, so ist eine sehr große Genauigkeit nicht mehr zu erwarten. Das Abfallen der Spannung nach erfolgtem Überschlag bei f läßt sich aus mathematischen Gründen nicht genau nachrechnen. Auch steht noch nicht fest, ob bei dem sich entwickelnden starken Funken, welcher häufig die Helligkeit eines Lichtbogens erreicht, die Toeplersche Formel noch richtig ist. Die neueren Kathodenstrahl-Oszillogramme zeigen jedoch, daß der Spannungszusammenbruch mindestens ebenso rasch erfolgt wie der Spannungsanstieg. Es ist klar, daß der Funkenwiderstand bei f nicht auf Null herabsinken kann. Es wird sich deshalb an die hohe Rechteckwelle eine durch die Restladung bedingte Welle von geringer Höhe und großer Länge (vgl. Bild 4 und 5) anschließen. In den meisten Fällen wird der Ausgleich der Restladung über f oszillatorisch erfolgen, so daß sich die noch über R nach C_0 fließenden Ladungen teilweise wieder aufheben. Messungen mit Kapazitäten von 130000 cm bis herab zu 800 cm ergaben selbst bei kleinsten Verzögerungen vollkommene Übereinstimmung, so daß merkliche Fehler durch die Restladung wohl nicht zu befürchten sind. Soweit Fehler möglich sind, ist dies also einzig dem Mangel zuzuschreiben, rechteckige Wellen von extremer Steilheit zu erzeugen. Im allgemeinen hat die Messung aber für Zeiten von 0,1 μsec aufwärts Anspruch auf praktisch ausreichende Genauigkeit.

IV. Meßergebnisse.

Die Versuchsanordnung.

Die nachfolgend mitgeteilten Kurven sind durchwegs mit der Schaltung nach Bild 3 aufgenommen. Das Ergebnis wurde, wie noch berichtet wird, in einigen Fällen mit der Schaltung nach Bild 2 nachgeprüft. Als Kondensator C (Bild 3) wurden zwei parallel geschaltete Kabel von je 350 m Länge und insgesamt $0{,}144\,\mu F = 130000$ cm Kapazität verwendet. Die Kabel sind für 300 kV_{max} Betriebspannung gebaut und wurden über eine Gleichrichterröhre und einen Wasserwiderstand von etwa einer Million Ohm bis auf 100 kV_{max} aufgeladen. Der Widerstand R hatte meist 3000 Ω. Bei einigen Messungen wurde er, wenn $t < 1\,\mu$sec war, zur Erhöhung der Empfindlichkeit auf 500 Ω erniedrigt. Das Material war Schniewindtband von 100 mm Breite und 0,2 mm Drahtdurchmesser. Versuche mit gleich großen Wasserwiderständen ergaben genaue Übereinstimmung[1]. In allen Fällen ist der Wellenwiderstand der Kabel, welcher pro Kabel 30 Ω, in der Parallelschaltung also 15 Ω beträgt, im Vergleich zu R so gering, daß die Kabel wenigstens bis zum Ansprechen von f als konzentrierte Kapazitäten anzusehen sind. Bei den größten gemessenen Verzögerungen von 10 μsec bei $R = 3000\,\Omega$ bzw. 1 μsec bei $R = 500\,\Omega$ beträgt der maximale Spannungsverlust ΔE nach Bild 3 nur 2,5 bzw. 1,5%.

Das Galvanometer war ein Instrument mit Fadenaufhängung und Zeigerablesung. Es wurde zusammen mit einem zugehörigen Empfindlichkeitswähler 1:1 bis 1:10000 und einem Parallelkondensator $C_0 = 40\,\mu F$ benützt. Durch direkte Entladungen von C ohne die Funkenstrecke f wurde die Galvanometerkonstante in der richtigen Schaltung nachgeprüft. Die am Galvanometer mögliche Maximalspannung ist gegeben, wenn C, auf 100000 Volt aufgeladen, etwa infolge großer Verzögerung von f vollständig über R auf C_0 entladen wird. Mit einer Ladung von $Q = 100000$

[1] Vgl. auch O. Zdralek, Arch. f. Elektrot. Bd. XVIII, S. 1, 1927.

Volt $\times$ 0,14 · 10^{-6} F = 0,014 Cb erhält man dann bei C_0 eine Spannung von $\frac{0{,}014 \text{ Cb}}{40 \cdot 10^{-6} \text{F}} = 350$ Volt. Der Kondensator C_0 bestand aus einer Batterie von zehn Papierkondensatoren für Starkstrom und war dieser Spannung ohne weiteres gewachsen. Im übrigen war die Anordnung so getroffen, daß eine Klemme des Galvanometers an Kabelmantel und Erde angeschlossen war. Das Galvanometer selbst stand auf dem Schaltpult und konnte dort genau abgelesen werden. Zur Sicherheit war noch eine auf etwa 1000 Volt eingestellte Schutzfunkenstrecke parallelgeschaltet.

Die Verzögerung bei Überschlägen in Luft.

In Bild 6 sind Kurven aufgetragen, welche an Messingkugeln von 50 mm ∅ und an einer Spitzenfunkenstrecke aufgenommen wurden. In beiden Fällen war der Abstand so gewählt, daß die stationäre Überschlagspannung bei 50 ~ Wechselstrom 30 kV_{max} betrug. Die Funkenstrecken F und f waren so aufgestellt, daß f

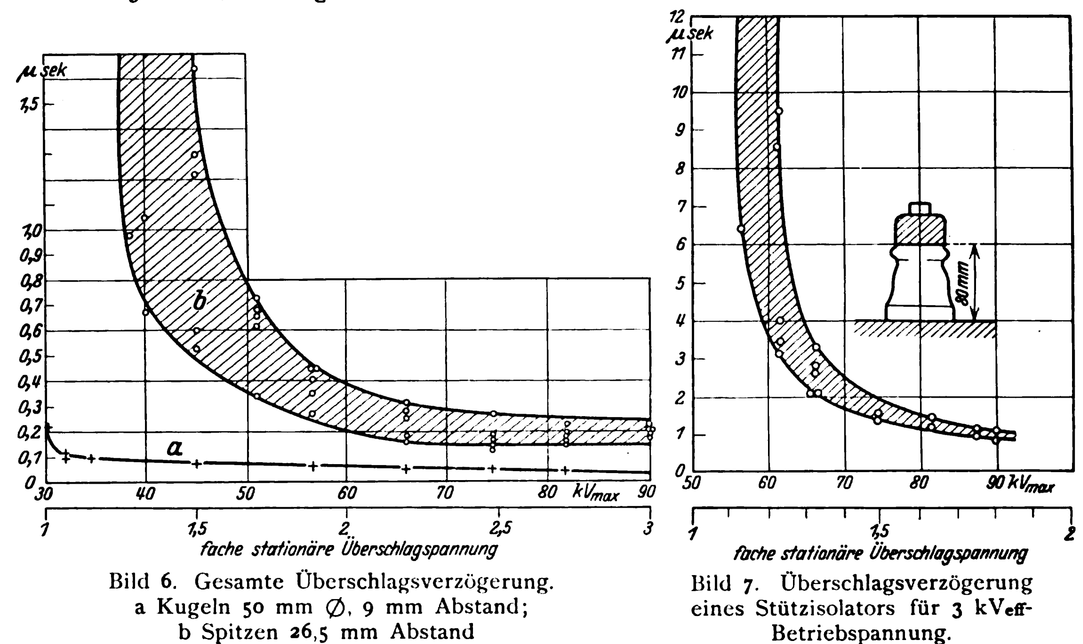


Bild 6. Gesamte Überschlagsverzögerung.
a Kugeln 50 mm ∅, 9 mm Abstand;
b Spitzen 26,5 mm Abstand

Bild 7. Überschlagsverzögerung eines Stützisolators für 3 kV_{eff}-Betriebspannung.

aus etwa 1 m Entfernung von F bestrahlt wurde. Wie oben auseinander gesetzt wurde, kann bei Kugeln eine sehr hohe Genauigkeit nicht erwartet werden. Die gemessenen Werte stellen deshalb, soweit sie die Kugeln betreffen, Maximalwerte der Gesamtverzögerung dar. Wenn man annimmt, daß nach den Burawoyschen Versuchen[1] die eigentliche Funkenverzögerung höchstens $3{,}5 \cdot 10^{-9}$ sec betragen dürfte, so kommen auf die Widerstandsverzögerung über 90% der Gesamtverzögerung. Da immerhin die Möglichkeit bestand, daß bei der großen Kapazität von C = 130000 cm die Restladung (vgl. Abschnitt III) einen zu großen Wert für t vortäuschen könnte, wurden Vergleichsmessungen mit halber Kapazität und schließlich auch mit der Schaltung nach Bild 2 an einer Freileitung von 60 m Länge und nur 800 cm Kapazität durchgeführt. Die damit erzielten Ergebnisse stimmen jedoch in allen Fällen sowohl bei den Kugeln, als auch bei den Spitzen mit den nach Schaltung Bild 3 gemessenen Werten genau überein. Die Untersuchungen von Pedersen[2], welche im Grund auch auf eine Bestimmung der Gesamtverzögerung

[1] Burawoy, Funkenverzögerung, Arch. f. Elektrot. Bd. XVI, S 186, 1926.

[2] P. O. Pedersen, Über den elektrischen Funken. Ann. d. Phys. 1923, 4. F., Bd. 71. S. 338, Bild 11.

hinauslaufen, ergaben bei 1,5facher stationärer Überschlagspannung 0,15 μsec gegenüber 0,08 μsec in Bild 6, bei 3facher Spannung 0,045 μsec gegenüber 0,03 μsec. Die an und für sich geringe Abweichung dürfte vor allem in der Verschiedenheit der Kugeldurchmesser (10 mm bei Pedersen) begründet sein.

Zu den Versuchen mit Spitzenfunkenstrecken waren Nähnadeln nicht zu gebrauchen, da deren Spitzen schon beim ersten Überschlag weggebrannt waren. Es wurden schließlich Kupferspitzen verwendet, welche die Form und die Schärfe eines gut gespitzten Bleistiftes hatten und vom Funken nur wenig angegriffen wurden. Da die beobachteten Werte bei gleicher Spannung sehr verschieden waren, wurde jedesmal bei fünf Überschlägen abgelesen. Aus diesen Punkten ergab sich schließlich statt einer Kurve das in Bild 6 schraffierte Band.

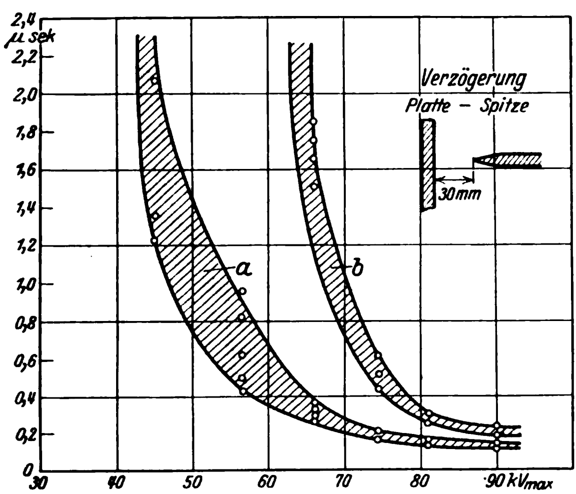


Bild 8. Überschlagsverzögerung bei ungleichen Elektroden. a Spitze positiv, stationäre Überschlagsspannung 31 kV_{max}; b Spitze negativ, stationäre Überschlagsspannung 61 kV_{max}.

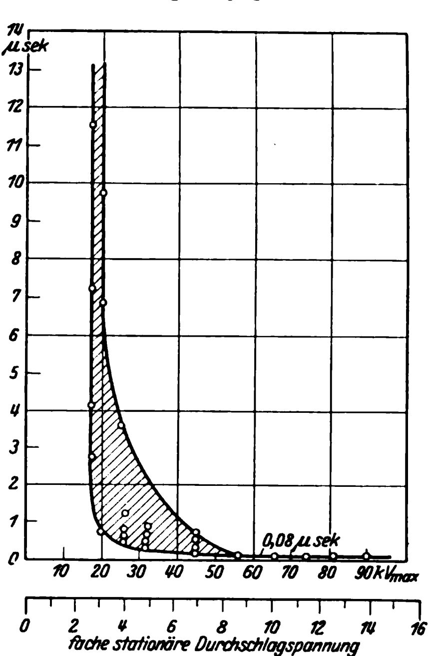


Bild 9. Durchschlagsverzögerung von Transformatorenöl zwischen flachen Elektroden von 0,5 mm Abstand.

Die von Peek[1] bei 5 cm Elektrodenabstand gemessenen Zeiten liegen, wenn sie auch auf das Vielfache der stationären Überschlagspannung bezogen werden, durchwegs innerhalb dieses schraffierten Bereiches.

Um noch die Wirksamkeit der Elektrodenbestrahlung durch den Funken bei F zu untersuchen, wurde zwischen F und f ein Preßspanschirm angebracht. Übereinstimmend mit den Burawoyschen Versuchen[2] ergab sich bei den Kugeln eine merkliche Zunahme des gesamten Entladeverzugs, während bei den Spitzen ein Einfluß der Bestrahlung kaum nachweisbar war.

Neben dem Überschlag in freier Luft ist praktisch vor allem der Überschlag längs eines festen Isolators von Bedeutung. Bild 7 zeigt die an einem Stützisolator für 3-kV-Betriebsspannung gemessene Verzögerung. Auf gleiche Vielfache der stationären Überschlagspannung bezogen, sind diese Zeiten noch wesentlich höher als bei den Spitzen. Messungen an einer 3-kV-Porzellandurchführung ergaben genau dasselbe.

Schließlich wurde noch eine unsymmetrische Anordnung, bestehend aus einer Kupferplatte von 300 mm ∅ und einer senkrecht dazu angeordneten Kupferspitze

[1] F. W. Peek, Journal of the Franklin Institute 1924, p. 26.
[2] Vgl. Fußnote 1 Seite 112.

untersucht. Diese Anordnung zeigt schon bei stationärer Gleichspannung einen ausgeprägten Polaritätseffekt. Für 30 mm Elektrodenabstand beträgt die Überschlagspannung bei positiver Spitze 31 kV_{max}[1], bei negativer Spitze dagegen 61 kV_{max}. Die im zweiten Fall erforderliche mittlere Durchbruchfeldstärke von $20 \frac{kV_{max}}{cm}$ nähert sich schon sehr dem für zwei ebene Elektroden geltenden Wert von $30 \frac{kV_{max}}{cm}$. Die Anordnung verhält sich nun, wie Bild 8 zeigt, hinsichtlich der Verzögerung ganz ähnlich. Bei 1,5 facher Überspannung und negativer Spitze beträgt z. B. die Verzögerung 0,2 μsec gegenüber 0,08 μsec bei Kugeln und derselben Überspannung. Dagegen hat man, ebenfalls bei 1,5 facher Überspannung mindestens 1,1 μsec bei positiver Spitze und 0,5 μsec beim Überschlag zwischen zwei Spitzen.

Die Verzögerung flüssiger und fester Isolatoren.

Es wurde Transformatorenöl zwischen normalen Kupferkalotten[2] von 0,5 mm Abstand und trockener Preßspan von 2 mm Stärke zwischen Messingkugeln von 50 mm ∅ untersucht. Beide Fälle (Bild 9 und 10) zeigen einen wesentlichen Unterschied gegenüber den Durchschlägen in Luft. Bis zu einer bestimmten Spannung, der 2,6 fachen stationären bei Öl und der 1,7 fachen bei Preßspan, erhält man überaus hohe Verzögerungen. Wahrscheinlich hat man es bis zu diesen Spannungen noch mit reinen Wärmedurchschlägen zu tun. Bei zunehmender Spannung fällt dann vor allem die untere Grenze der schraffierten Bereiche auf Werte herab, welche nur wenig oberhalb der bei Kugeln beobachteten Zeiten liegen. Auch die Streuung der gemessenen Punkte untereinander verschwindet wieder, wenn die Spannung noch weiter gesteigert wird. Die schraffierte Fläche erhält dadurch annähernd die Form eines rechtwinkligen Dreiecks.

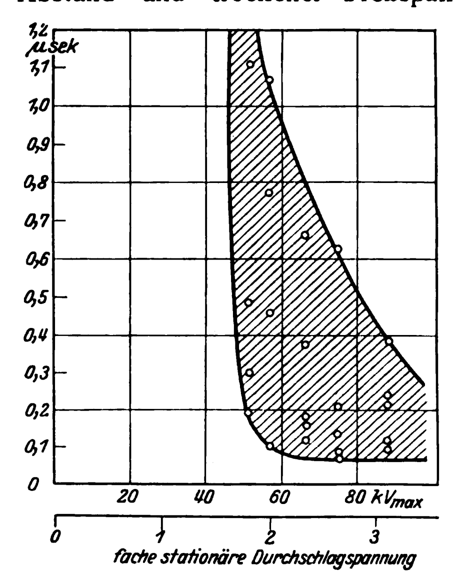


Bild 10. Durchschlagsverzögerung von 2 mm starkem, trockenem Preßspan.

Praktisch hat man zu beachten, daß die in Leitungsnetzen möglichen Überspannungen durch die Überschlagspannung und die geringere Verzögerung der Freileitungs- und Schalthausisolatoren, von Überspannungsableitern ganz abgesehen, auf weniger als die zweifache 50∼ Prüfspannung begrenzt sind. Bild 9 bestätigt dann die Erfahrung, daß man gerade bei Öl, welches den Hauptanteil an der Isolierung der Transformatoren und Schalter hat, mit einer außerordentlichen Sicherheit gegen kurzzeitige Überspannungen rechnen darf.

[1] Derselbe Wert wird auch bei 50∼ gemessen.
[2] Vorschriften für Transformatoren- und Schalteröle. ETZ 1923, S. 600 u. 1098.

Eine gittertheoretische Berechnung der elektrolytischen Leitfähigkeit des Steinsalzkristalls[1].

Von

Werner Braunbek.

1. Einleitung.

Die Bornsche[2] Gittertheorie der Kristalle hat in erster Linie die elastischen, in zweiter Linie die thermischen Eigenschaften kristallisierter fester Körper zahlenmäßig auf die Wirkung der Atomkräfte zurückgeführt. Es blieben dabei zunächst noch eine Reihe von Erscheinungen unberücksichtigt, die sich zweifellos auch auf derselben Grundlage erklären lassen müssen.

Inzwischen sind einige dieser Erscheinungen in Angriff genommen worden. So z. B. die mechanische Zerreißfestigkeit von Zwicky[3], die Vorgänge beim Schmelzen von mir[4] und die elektrische Durchbruchfestigkeit von Rogowski[5]. Die beiden letzteren Arbeiten machen Gebrauch von der Auffassung, daß ein Teil der Ionen im Kristallgitter sogenannte Platzwechsel ausführt. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, eine weitere Größe, nämlich die Ionenleitfähigkeit der Kristalle, auf Grund ähnlicher Vorstellungen theoretisch zu berechnen.

Ich beschränke mich dabei auf Kristalle vom Steinsalztyp, die eine besonders einfache, theoretische Behandlung gestatten, und dabei wieder speziell auf NaCl als den einzigen Stoff dieser Gruppe, für den eingehende Messungen der Ionenleitfähigkeit vorliegen, für den also eine Prüfung der Theorie an der Erfahrung möglich ist.

Neuere Messungen der elektrolytischen Leitfähigkeit von Steinsalz wurden von v. Rautenfeld[6] im Temperaturgebiet von 630—800° C und von v. Seelen[7] im Temperaturgebiet von 20—500° C ausgeführt. Die Leitfähigkeit steigt dabei von $2\cdot 10^{-17}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$ bei 20° bis auf $4\cdot 10^{-7}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{1}$ bei 500°, also in dem gemessenen Temperaturintervall auf das 20milliardenfache. Diese starke Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit läßt sich, wie übrigens auch bei vielen anderen Kristallen durch die empirische Beziehung

$$\varkappa = C_1' e^{-\frac{C_2}{T}} \tag{1}$$

oder

$$\ln \varkappa = C_1 - \frac{C_2}{T} \tag{2}$$

darstellen. Die Messungen von v. Seelen befolgen die lineare Beziehung zwischen $\ln \varkappa$ und $\frac{1}{T}$ leidlich gut, wie sich aus folgender Tabelle ergibt, in der die gemessenen Werte von $\ln \varkappa$ ($\varkappa$ in abs. elektrostatischen Einheiten) verglichen sind mit Werten, die aus Gleichung (2) unter Anpassung der Konstanten C_1 und C_2 an die Meßergebnisse errechnet sind:

---

[1] Vorgetragen auf der Gautagung d. D. Phys. Ges. in Freiburg i. Br., Juni 1927. Eine besonders in mathematischer Hinsicht etwas ausführlichere Darstellung erscheint in der Zeitschr. f. Physik.

[2] Siehe z. B. M. Born, Atomtheorie d. festen Zustandes.

[3] F. Zwicky, Phys. Zeitschr. **24**, 131, 1923.

[4] W. Braunbek, Zeitschr. f. Phys. **38**, 549, 1926.

[5] W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. **18**, 123, 1927.

[6] F. v. Rautenfeld, Ann. d. Phys. **72**, 617, 1923.

[7] D. v. Seelen, Zeitschr. f. Phys. **29**, 125, 1924.

Tabelle 1.

t^0	T^0	ln $\varkappa$ gemessen von v. Seelen	ln $\varkappa$ nach Gleichung (3)
20	293	— 10,8	— 10,6
100	373	— 2,7	— 2,8
200	473	+ 3,0	+ 3,3
300	573	+ 6,3	+ 7,2
400	673	+ 9,3	+ 10,0
500	773	+ 12,9	+ 12,1

Die Konstanten mußten dabei zu

$$C_1 = 25,9$$
$$C_2 = 10700$$

gewählt werden. Die v. Seelenschen Meßergebnisse sind also durch die Beziehung

$$\ln \varkappa = 25,9 - \frac{10700}{T} \tag{3}$$

darstellbar.

Die Messungen von v. Rautenfeld zeigen stärkere Abweichungen von der linearen Beziehung zwischen ln $\varkappa$ und $\frac{1}{T}$, was wohl mit der Annäherung an die Schmelztemperatur zusammenhängt. Da die Werte bei mäßigen Temperaturen zweifellos den einfacheren Verhältnissen entsprechen, sollen die durch Gleichung (3) ausgedrückten v. Seelenschen Meßergebnisse zum Vergleich mit der Theorie herangezogen werden.

Die bisherigen theoretischen Anschauungen über das Wesen der Ionenleitung in Kristallen lassen sich in zwei Gruppen teilen.

Die „Platzwechseltheorie", die auf v. Hevesy zurückgeht, stellt sich den Materie- und Elektrizitätstransport im Kristallgitter so vor, daß die Ionen des Gitters, die bei tiefen Temperaturen nur kleine Schwingungen um feste Ruhelagen ausführen können, mit steigender Temperatur allmählich die Möglichkeit bekommen, von diesen Ruhelagen auf benachbarte Ruhelagen überzuspringen, also etwa mit benachbarten Ionen den Platz zu tauschen. Diese Fähigkeit werden natürlich nur die ganz wenigen Ionen haben, deren Energie weit über den Durchschnitt hinausragt, deren Zahl aber — entsprechend der mit der Temperatur veränderlichen Energieverteilung unter den Ionen — rapid mit steigender Temperatur zunimmt. Die platzwechselnden Ionen verursachen zunächst eine allseitige „Selbstdiffusion" im Kristallgitter, wie sie ja auch experimentell beobachtet worden ist, und verursachen, wenn ein äußeres elektrisches Feld an den Kristall angelegt wird, einen elektrischen Strom, da nun mehr Ionen in Richtung des elektrischen Feldes springen werden, als entgegengesetzt. Eine etwas modifizierte Vorstellung der Ionenbewegung im Kristall hat Frenkel[1] entwickelt, der sich den Platzwechsel der Ionen nicht direkt, sondern über einen sogenannten — zunächst allerdings sehr unbestimmten — „Zwischengitterraum" vor sich gehen denkt und eine Theorie der Selbstdiffusion auf dieser Grundlage aufgebaut hat.

Im Gegensatz zur „Platzwechseltheorie" steht die „Kristallporentheorie" von Smekal[2]. Es hat sich nämlich bei einer Reihe von Größen (z. B. der Zerreißfestigkeit, der elektrischen Durchbruchfeldstärke u. a.) gezeigt, daß die Bornsche Gittertheorie dafür wesentlich (um mehrere Zehnerpotenzen) andere Werte liefert, als die Messungen ergeben, und daß man diese Abweichungen darauf zurückführen

[1] J. Frenkel, Zeitschr. f. Phys. **35**, 652, 1926. S. auch Zeitschr. f. Phys. **26**, 137, 1924.
[2] A. Smekal, Zeitschr. f. Phys. **36**, 288, 1926.

kann, daß ein wirklicher Kristall gar nicht den idealen Gitteraufbau besitzt, den die Bornsche Theorie voraussetzt, sondern aus sehr kleinen, ideal aufgebauten Kriställchen besteht, die unter sich durch sogenannte Kapillarrisse oder „Gitterporen" getrennt sind. Smekal unterscheidet demnach den „Realkristall", wie er in Wirklichkeit vorliegt, vom „Idealkristall", wie er der Bornschen Theorie entsprechen würde. Nach der Auffassung von Smekal soll nun ein ungestörtes Bornsches Gitter, also ein Idealkristall überhaupt keine Selbstdiffusion und Ionenleitung zeigen, sondern diese Erscheinungen sollen beim Realkristall nur auf die größere Beweglichkeit der Ionen in den Gitterporen, also auf eine Art innere Oberflächenleitung, zurückzuführen sein.

Die vorliegende Arbeit legt die reine Platzwechselanschauung zugrunde — der Einfluß der Kristallporen läßt sich ja theoretisch schlecht fassen — und wird durch ihre Ergebnisse zeigen, daß man auf dieser Grundlage unter Einführung vereinfachender Annahmen die Ionenleitfähigkeit des Steinsalzes berechnen kann und quantitativ in ihrer Temperaturabhängigkeit ziemlich richtig herausbekommt, ohne einen Einfluß der Smekalschen Gitterporen anzunehmen.

2. Die vereinfachenden Annahmen.

Die Wärmebewegung in Kristallgittern läßt sich für tiefe Temperaturen als harmonische Schwingung der Ionen mit kleinen Amplituden beschreiben. Bei höheren Temperaturen, also größeren Amplituden, wird der Charakter der Bewegung so kompliziert, daß man nur unter Einführung sehr radikaler Vereinfachungen die Verhältnisse rechnerisch verfolgen kann. Eine derartige Methode führt natürlich nicht zu Ergebnissen, die das exakte Verhalten des Kristalls angeben; aber man kann hoffen, auf diese Weise wenigstens mit einer gewissen Annäherung den wirklichen Verhältnissen gerecht zu werden.

Bei der theoretischen Behandlung des Schmelzvorgangs[1] habe ich die unregelmäßige Wärmebewegung der Gitterionen dahin idealisiert, daß ich sie einfach durch eine geordnete — eine Schwingung zweier in sich starr gedachter Teilgitter gegeneinander — ersetzte. Ein so grobes Bild kann natürlich keine Theorie der Ionenleitung ergeben, da ein Platzwechsel nach ihm ja unterhalb des Schmelzpunktes unmöglich ist.

Wir wollen also die Näherung in diesem Falle insofern einen Schritt weiter treiben, als wir die Energie unter den Ionen statistisch verteilt denken. Wir wollen aber zur Ermöglichung der Rechnung zunächst folgende vereinfachende Annahmen machen:

1. Wir denken uns nur die Na-Ionen bewegt, die Cl-Ionen dagegen an ihren Gitterpunkten festgehalten. Diese Annahme wird durch die experimentelle Tatsache nahegelegt, daß immer nur eine Ionenart, beim NaCl die Na-Ionen, sich an der elektrolytischen Leitung beteiligen[2].
2. Die Schwingungen der Ionen um ihre Ruhelagen sollen als linear angenommen werden, da allgemeine (elliptische) Schwingungen zu komplizierte Bedingungen für den Platzwechsel eines Ions liefern würden. Die Richtung der linearen Schwingungen soll im übrigen statistisch im Raum verteilt sein (alle Richtungen gleich wahrscheinlich).

Wir müssen uns nnn noch ein geometrisches Bild von der Art und Weise machen, auf welche ein Na-Ion seinen normalen Gitterplatz verlassen kann. Den Aufbau des NaCl-Gitters veranschaulicht Bild 1. Denken wir uns z. B. alle Ionen außer dem Na-Ion (1) festgehalten, und verschieben das letztere in irgendeiner geradlinigen Richtung, so ist dabei zunächst gegen die Bornschen Abstoßungskräfte

[1] W. Braunbek, l. c.
[2] Siehe z. B. D. v. Seelen, l. c.

der Nachbarionen Arbeit zu leisten, bis das Ion sozusagen sich zwischen den nächsten Nachbarn „durchgedrückt" hat, und um bei noch weiterer Entfernung selbst Arbeit zu leisten imstande ist. Es folgt dann ein „Durchdrücken" durch eine weitere Schicht usw.

Das Ion muß also von seiner ursprünglichen Lage ab, deren potentielle Energie wir als Null annehmen wollen, auf eine Schwelle φ potentieller Energie — wo es seinen Nachbarionen am nächsten liegt — gehoben werden. Erst wenn diese Schwelle überschritten ist, hat das Ion seine ursprüngliche Gleichgewichtslage dauernd verlassen. Solange seine gesamte Energie kleiner als φ bleibt, fällt es immer wieder in seine alte Lage zurück.

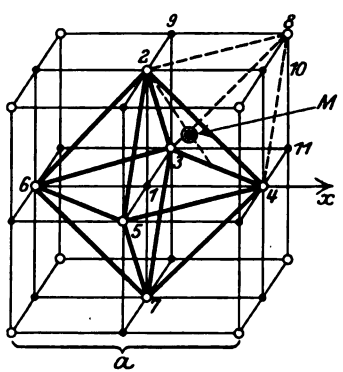


Bild 1. Ionengitter vom Na Cl-Typ.

Nun ist die Schwellenenergie natürlich abhängig von der Richtung, in der es sich aus seiner Ruhelage herausbewegt. Aus Bild 1 sehen wir, daß jedes Na-Ion (z. B. 1) im Mittelpunkt eines Oktaeders von Cl-Ionen (2—7) liegt. Um in irgendeiner Richtung aus diesem „Käfig" hinauszugelangen, muß es eine Energieschwelle φ überschreiten, die für die Richtungen $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ usw. bis $1 \rightarrow 7$ unendlich wäre, weil es sich hier direkt auf die Nachbarionen zu bewegt, für alle anderen Richtungen im Raum aber endliche Werte besitzt. Gewisse Richtungen werden sich nun durch ein Minimum der Schwellenenergie auszeichnen, und dies sind in unserem Fall aus Symmetriegründen die 8 Richtungen, die durch die Mittelpunkte der Oktaederflächen führen (also z. B. die Richtung $1 \rightarrow M$). Die Schwellenenergie in diesen „Minimumrichtungen" möge φ_0 heißen.

In diesen Minimumrichtungen werden also die Na-Ionen den Cl-Oktaeder vorzugsweise verlassen. In zweiter Linie kommen Richtungen in Frage, die den Minimumrichtungen eng benachbart sind, also nur wenig höhere Schwellenenergie besitzen.

Gelangt nun ein Na-Ion z. B. in der Richtung $1 \rightarrow M$ durch die Oktaederfläche 234, so befindet es sich im Innern eines Cl-Tetraeders 2348 und kann von hier aus durch die Flächen 238, 248 oder 348 in die Gleichgewichtslagen 9, 10 oder 11 springen, wenn einer dieser Punkte frei ist.

Wir wollen nun als dritte vereinfachende Annahme postulieren, daß immer, wenn ein Na-Ion von (1) in den Tetraeder 2348 gesprungen ist, dadurch die 3 Ionen 9, 10 und 11 selbst eine so erhöhte Sprungwahrscheinlichkeit erhalten, daß eines von ihnen springt und dem zuerst gesprungenen Ion seinen Platz frei macht usw... Durch diese Annahme haben wir den Vorteil, daß wir uns immer nur um die Sprungwarscheinlichkeit eines Ions (1) zu kümmern brauchen, und daß mit dem eingetretenen Sprung dieses Ions die „Verdrängung" eines andern, und damit die Fortpflanzung des Sprunges durch den ganzen Kristall kausal verknüpft ist.

3. Die Theorie der Ionenleitfähigkeit.

Nach dem vorher Gesagten können wir die Wahrscheinlichkeit des Sprunges eines Na-Ions angeben, wenn wir den Bruchteil der Na-Ionen kennen, der eine für den Sprung ausreichende Energie besitzt.

Nach der klassischen Statistik ist die Wahrscheinlichkeit $w_1 \, d\varepsilon$ dafür, daß ein harmonischer linearer Oszillator — als den wir ja unser Na-Ion annähern — im Temperaturgleichgewicht eine Energie zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ besitzt:

$$w_1 \, d\varepsilon = \frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \, d\varepsilon \tag{4}$$

(k Boltzmannsche Konstante).

Der Bruchteil aller Ionen, deren Energie größer als φ ist, ist demnach:

$$w_2 = \int_{\varphi}^{\infty} w_1 \, d\varepsilon = e^{-\frac{\varphi}{kT}}. \tag{5}$$

Da nun die Schwellenenergie φ von der Richtung abhängt, müssen wir noch über alle (gleichwahrscheinlichen) Richtungen des Raums mitteln, um hieraus den Bruchteil aller Ionen zu erhalten, der einen Sprung ausführt. Für diesen Bruchteil erhalten wir also, wenn ω das Raumwinkelelement bedeutet:

$$w_3 = \frac{1}{4\pi} \int w_2 \, d\omega = \frac{1}{4\pi} \int e^{-\frac{\varphi}{kT}} \, d\omega. \tag{6}$$

Dieses Integral können wir näherungsweise auswerten, wenn wir die Tatsache benützen, daß weitaus die meisten Sprünge sich eng an die 8 Minimumrichtungen anschließen. Charakterisieren wir eine Nachbarrichtung einer solchen Minimumrichtung durch die kleinen Winkelabweichungen α und β (in zwei zueinander senkrechten Ebenen), so können wir das φ der Nachbarrichtung auf das φ_0 der Minimumrichtung zurückführen durch die Reihenentwicklung:

$$\varphi = \varphi_0 \left[1 + c(\alpha^2 + \beta^2) + \ldots \right], \tag{7}$$

wo c eine Konstante ist, die den Anstieg der Schwellenenergie φ bei Abweichung von der Minimumrichtung angibt, und die später aus den Ionenkräften berechnet werden soll.

Wir können nun (7) in (6) einsetzen, und da die e-Potenz sehr rasch mit wachsendem α und β abnimmt, da wir uns also auf kleine α und β beschränken können, $d\omega$ durch $d\alpha \, d\beta$ ersetzen. Aus demselben Grund können wir auch das Integral, ohne einen großen Fehler zu begehen, von $-\infty$ bis $+\infty$ in α und β erstrecken, und erhalten für die Umgebung aller 8 Minimumrichtungen, also für die gesamte Sprungwahrscheinlichkeit:

$$\left. \begin{aligned} w_3 &= \frac{8}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varphi_0 + c\varphi_0(\alpha^2+\beta^2)}{kT}} \, d\alpha \, d\beta = \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\varphi_0}{kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c\varphi_0 \alpha^2}{kT}} \, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{c\varphi_0 \beta^2}{kT}} \, d\beta \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Die beiden letzten Integrale haben als Fehlerintegrale je den Wert $\sqrt{\frac{\pi k T}{c \varphi_0}}$ und wir erhalten:

$$w_3 = \frac{2kT}{c\varphi_0} e^{-\frac{\varphi_0}{kT}}. \tag{9}$$

Dies ist der Bruchteil aller Na-Ionen, die springen. Wir müssen nur noch untersuchen, in welcher Zeit. Offenbar kann ein Ion auch bei ausreichender Energie während einer Schwingung nur einen Sprung ausführen. w_3 stellt also den Bruchteil aller Ionen dar, der während der Schwingungsdauer τ springt. Bei wirklich springenden Ionen verliert offenbar der Begriff der Schwingungsdauer seine Bedeutung und ist sinngemäß durch die doppelte Sprungzeit (Zeit von Ruhelage zu Ruhelage) zu ersetzen, die etwas größer sein wird als die Schwingungsdauer τ bei kleinen Amplituden. Wir wollen aber hier, da es sich doch nur um eine Überschlagrechnung handelt, mit der Schwingungsdauer τ, die aus der ultraroten Reststrahlfrequenz des Na-Cl bekannt ist, rechnen.

Wir erhalten also als Bruchteil aller Na-Ionen, der während 1 Sekunde springt:

$$w = \frac{w_3}{\tau} = \frac{2kT}{c\varphi_0 \tau} e^{-\frac{\varphi_0}{kT}}. \tag{10}$$



Die Sprünge geschehen, wenn kein äußeres Feld vorhanden ist, gleichmäßig nach allen Richtungen, also insbesondere springt mit einer Komponente in der (+ x)-Richtung der Bruchteil $\frac{w}{2}$ und mit einer Komponente in der (— x)-Richtung auch der Bruchteil $\frac{w}{2}$.

Ein äußeres elektrisches Feld stört diese Symmetrie. Der potentiellen Energie, die das springende Na-Ion durch die Nachbarionen besitzt, überlagert sich jetzt die potentielle Energie $(-Eex)$ des Feldes, wenn E die elektrische Feldstärke und e — in den Formeln nicht zu verwechseln mit der Basis e der natürlichen Logarithmen — die Ladung eines Na-Ions, also das elektrische Elementarquantum bedeutet. Diese Überlagerung veranschaulicht Bild 2. Da die Wegkomponente eines Sprunges $1 \to M$ (Bild 1) in der x-Richtung für alle 8 Oktaederflächen gleich $\frac{a}{6}$ bzw. $-\frac{a}{6}$ ist (a Würfelkante des Na-Teilgitters), wird die Schwellenenergie in Richtung des Feldes um $eE\frac{a}{6}$ erniedrigt, in der entgegengesetzten Richtung um denselben Betrag erhöht.

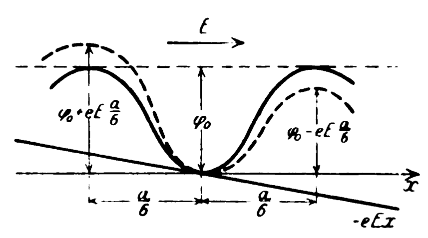


Bild 2. Potentielle Energie eines Na-Ions bei der Verschiebung.

Statt $e^{-\frac{\varphi_0}{kT}}$ haben wir also jetzt zu schreiben:

$$e^{-\frac{\varphi_0 \mp eE\frac{a}{6}}{kT}},$$

oder wenn wir uns auf so kleine Felder beschränken, daß $eE\frac{a}{6} \ll \varphi_0$ ist[1],

$$e^{-\frac{\varphi_0}{kT}} e^{\pm\frac{eEa}{6kT}} \approx e^{-\frac{\varphi_0}{kT}}\left(1 \pm \frac{eEa}{6kT}\right).$$

Die Bruchteile aller Na-Ionen, die jetzt pro sec in der (+ x)- bzw. (— x)-Richtung springen, sind damit:

$$\left.\begin{aligned} w_+ &= \frac{kT}{c\varphi_0\tau} e^{-\frac{\varphi_0}{kT}}\left(1 + \frac{aEe}{6kT}\right) \\ w_- &= \frac{kT}{c\varphi_0\tau} e^{-\frac{\varphi_0}{kT}}\left(1 - \frac{aEe}{6kT}\right) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Da jede (001)-Netzebene des NaCl-Gitters pro cm² $\frac{2}{a^2}$ Na-Ionen enthält, springen pro cm² und sec:

$$\frac{2w_+}{a^2} \text{ Na-Ionen}$$

in Richtung des Feldes und

$$\frac{2w_-}{a^2} \text{ Na-Ionen}$$

[1] Diese Beschränkung auf „kleine" Felder ist praktisch ohne Bedeutung, da das der Gleichung $eE_0\frac{a}{6} = \varphi_0$ entsprechende Feld E_0 von der Größenordnung 10^8 Volt/cm wäre, so daß alle praktisch erzielbaren Felder klein dagegen sind.

in entgegengesetzter Richtung durch einen gegebenen Querschnitt. Da jedes Ion die Ladung e mit sich führt, ist die pro sec und cm^2 in Richtung des Feldes fließende Elektrizitätsmenge oder die Stromdichte:

$$j = \frac{2e}{a^2}(w_+ - w_-) \tag{13}$$

und die Leitfähigkeit:

$$\varkappa = \frac{j}{E} = \frac{2e}{a^2 E}(w_+ - w_-). \tag{14}$$

Setzt man hierin für w_+ und w_- die Werte der Gleichung (11) ein, so wird:

$$\varkappa = \frac{2e^2}{3\tau a c \varphi_0} e^{-\frac{\varphi_0}{kT}} \tag{15}$$

oder

$$\ln \varkappa = \ln \frac{2e^2}{3\tau a c \varphi_0} - \frac{\varphi_0}{kT}. \tag{16}$$

4. Der Vergleich mit der Erfahrung.

Unser theoretisches Ergebnis (16) zeigt, daß die Leitfähigkeit $\varkappa$ des Steinsalzkristalls für normale Feldstärken unabhängig von der Feldstärke ist, d. h., daß das Ohmsche Gesetz gilt und daß die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit gerade in der Form herauskommt, die nach (2) auch die Messungen ergeben haben.

Es bleibt nur noch übrig, die Konstanten C_1 und C_2 quantitativ zu vergleichen. Diese Konstanten ergeben sich nach Gleichung (16) zu:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \ln \frac{2e^2}{3\tau a c \varphi_0} \\ C_2 &= \frac{\varphi_0}{k} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Von den zur Ausrechnung nötigen Größen sind bekannt:

$$e = 4{,}77 \cdot 10^{-10} \text{ el. st. Einh.}$$
$$a = 5{,}63 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$
$$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \text{ Erg/Grad}$$

Für τ wollen wir, wie schon erwähnt, die aus der Reststrahlfrequenz berechnete Schwingungsdauer

$$\tau = 2{,}1 \cdot 10^{-13} \text{ sec}$$

einsetzen.

Eine eingehende Untersuchung erfordern nur noch die Größen φ_0 und c.

Man könnte diese Größen direkt errechnen aus dem Ionenkraftgesetz, das bei den Alkalihalogeniden nach Born[1] die Form hat:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= -\frac{e^2}{r} + \frac{b}{r^8} \quad \text{für ungleichartige Ionen} \\ \psi &= +\frac{e^2}{r} - \frac{1}{2}\frac{b}{r^8} \quad \text{für gleichartige Ionen} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

wo ψ das gegenseitige Potential zweier Ionen im Abstand r bedeutet und b eine Konstante ist, die sich aus der Gleichgewichtsbedingung des ungestörten Gitters ergibt.

Schon bei meiner Theorie des Schmelzvorgangs[2] hat sich aber gezeigt, daß die stark vereinfachenden Annahmen, die man zur zahlenmäßigen Berechnung der Schwellenenergie φ_0 zu machen gezwungen ist, viel zu einschneidend sind, um einen brauchbaren Zahlenwert von φ_0 aus den Gitterkräften zu erhalten. Nur die richtige Größenordnung läßt sich auf diese Weise feststellen.

[1] M. Born, l. c.
[2] W. Braunbek, l. c.

Nun bietet aber gerade diese Theorie des Schmelzens eine Möglichkeit, unabhängig von irgendwelchen spezialisierten Vorstellungen die Schwellenenergie zu erhalten, wenn man nur die plausible Annahme macht, daß es sich hier um dieselbe Schwellenenergie handelt, die auch beim Schmelzvorgang eine Rolle spielt. Man kann dann die von mir erhaltene Beziehung zwischen Schmelztemperatur T_{sm} und Schwellenenergie:

$$T_{sm} = 0{,}31 \cdot \frac{A}{3R} \tag{19}$$

benützen, wo A die Schwellenenergie pro Mol und R die Gaskonstante ist.

Es ist also:

$$\frac{A}{R} = \frac{\varphi_0}{k}$$

und damit:

$$\varphi_0 = 9{,}7\, k\, T_{sm}. \tag{20}$$

Für die dimensionslose Größe c, die den Anstieg der Schwellenenergie in der Umgebung der Minimumrichtung charakterisiert, steht keine solche Methode zur Verfügung, und es bleibt daher nur die Ausrechnung aus den Ionenkräften übrig. Diese Berechnung, die nach den gewöhnlichen Methoden der Gittersummation durchgeführt wird, und auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, liefert den Wert

$$c = 8{,}3. \tag{21}$$

Diesem Wert haftet natürlich die Unsicherheit an, die eben durch die gittertheoretische Ausrechnung unter idealisierenden Annahmen bedingt ist. Es wird daher für die Konstante C_1 die den unsicheren c-Wert und außerdem auch den ungenauen Wert für τ enthält, keine sehr große Genauigkeit zu erwarten sein.

Einsetzen von (20) und (21) in (17) ergibt nun, wenn für den Schmelzpunkt T_{sm} des Steinsalzes 1073^0 gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \ln \frac{e^2}{14{,}6\,\tau\, a\, c\, k\, T_{sm}} = 27{,}7 \\ C_2 &= 9{,}7\, T_{sm} = 10400 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Gegenüberstellung unseres theoretischen Ergebnisses mit der empirischen Formel (3) liefert also:

$$\left.\begin{aligned} \ln \varkappa &= 25{,}9 - \frac{10700}{T} \text{ (experimentell)} \\ \ln \varkappa &= 27{,}7 - \frac{10400}{T} \text{ (theoretisch)} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Übereinstimmung ist so gut, als man sie bei der starken Idealisierung, die die Theorie darstellt, überhaupt erwarten kann. Besonders befriedigend ist die gute Übereinstimmung der temperaturabhängigen Glieder, in deren theoretischen Wert ja keine spezielle Vorstellung über den Sprungmechanismus eingeht, sondern nur die Annahme, daß ein- und dieselbe Schwellenergie sowohl die Sprünge beim Schmelzen, wie die bei der Ionenleitung beherrscht. Diese Annahme erhält durch das Ergebnis eine wesentliche Stütze.

Der Unterschied 1,8 in den temperaturunabhängigen Gliedern entspricht einer Diskrepanz der $\varkappa$-Werte um einen Faktor 6, die infolge der Unsicherheit der Werte von c und τ nicht verwunderlich ist, besonders wenn man berücksichtigt, daß die Messungen der Leitfähigkeit verschiedener Steinsalzkristalle unter sich oft Diskrepanzen um Faktoren 2 bis 3 aufweisen.

So scheint mir der zahlenmäßige Erfolg der mit den Bornschen Kraftansätzen durchgeführten Platzwechselanschauung mindestens ein starkes Argument gegen einen wesentlichen Einfluß der Smekalschen Gitterporen auf die Leitfähigkeit von Kristallen von Na Cl-Typ zu bilden.

Stuttgart, Juli 1927.

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Abgeschlossen am 25. Oktober 1927.



Archiv für Elektrotechnik

XIX. Band. 2. Heft. 1927.

Elektrische Stromleitung an feuchten Gebäudewänden.

Versuch einer Theorie.

Von

Franz Ollendorff, Charlottenburg.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung; Ziel der Arbeit.
2. Vereinfachung der Aufgabe.
3. Das Strömungsfeld in der Wand.
4. Das Strömungsfeld im Erdboden.
5. Zahlenbeispiel.
6. Zusammenfassung.

1. Einleitung; Ziel der Arbeit.

Wenn an einem innerhalb eines Gebäudes installierten Drahte die Isolation schadhaft wird, ergießt sich von der Fehlerstelle aus ein Strom über die Gebäudewand zur Erde. Besonders kräftig können sich derartige Kriechströme in Gebäuden bemerkbar machen, deren Wände stark durchfeuchtet sind; hier sind Baderäume und Stallungen zu nennen. In ursächlichem Zusammenhang mit den genannten Räumen bilden sich längs der Wände elektrische Spannungsfelder aus, welche bei zufälliger Berührung eines Lebewesens lebensgefährliche Körperströme erzeugen können; in der Tat sind derartige Unglücksfälle mehrfach beobachtet worden. Wir stellen uns die Aufgabe, das skizzierte Problem der Stromleitung quantitativ zu erfassen, um die Gefahren derartiger Installationsfehler zahlenmäßig abschätzen zu können.

2. Vereinfachung der Aufgabe.

Die physikalischen Voraussetzungen der Aufgabe gestatten es, das Problem weitgehend zu idealisieren. Zunächst setzen wir voraus, daß die Feuchtigkeitsschicht nach Bild 1 die Wand beiderseits der Fehlerstelle in der Breite b mit konstanter Stärke δ und homogener Leitfähigkeit $\varkappa_F$ bedecke, wobei wir unter b etwa den gesamten Umfang der stromleitenden Wand mit Ausschluß der Fenster- und Türbreiten verstehen. Der Übertritt aus dem Draht auf die Feuchtigkeitsschicht möge durch einen näherungsweise kreisförmigen Querschnitt von Radius ϱ_0 in der Höhe h über Erde erfolgen (Bild 1); wenn diese Annahme auch praktisch nicht immer zutrifft, so wird man doch stets aus Form und Größe der wirklichen Übertrittstelle einen elektrisch gleichwertigen wirksamen Halbmesser ableiten können. Der Verlauf der Strömung oberhalb der Fehlerstelle wird durch Einzelheiten der Gebäudekonstruktion geregelt (Decke, höhere Stockwerke usw.); wir befreien uns hiervon, indem wir an Stelle der wirklichen Wand eine nach oben unbegrenzte leitende Fläche substituieren. Endlich nehmen wir zur weiteren Vereinfachung der Aufgabe an, daß in dem Übergangsquerschnitt von Wand zum Erdreich konstantes Potential

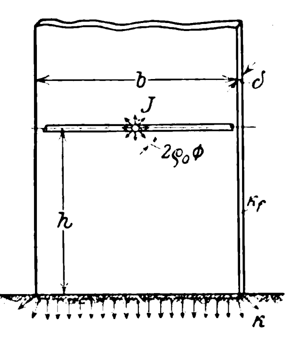


Bild 1. Schema des Stromeintrittes in die Wand.

herrsche. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn sich an dieser Stelle, wie fast stets, größere Flüssigkeitsmengen ansammeln, die das elektrische Feld zum Zusammenbruch führen.

3. Das Strömungsfeld in der Wand[1].

Zufolge der vorgenannten Vereinfachungen dürfen wir das Strömungsfeld in der Wand getrennt von dem Strömungsfeld in der Erde behandeln; insbesondere kann daher das Potential des Übergangsquerschnittes als Grundlage der Potentialzählung des Wandfeldes benutzt werden.

Längs der Wand ist die Strömung zweidimensional. Es ist daher zweckmäßig, Gaußsche Koordinaten

$$z = x + j y \qquad j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

mit dem Ursprung im Fehlerort nach Bild 1 einzuführen. Durch die seitliche Begrenzung der Wand können keine Stromlinien entweichen; die hier wirksame Grenzbedingung lautet also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = \mp \frac{1}{2} b. \tag{2}$$

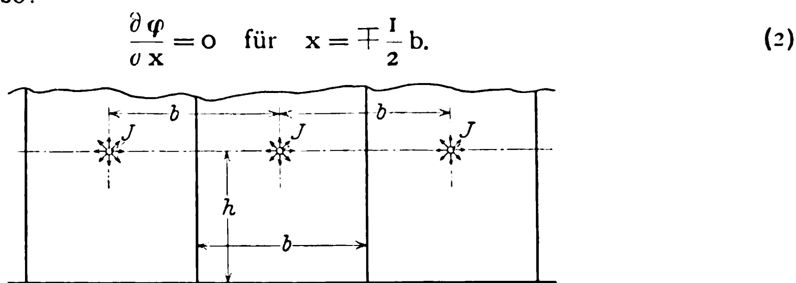


Bild 2. Ersatzschema zur Berücksichtigung der seitlichen Wandbegrenzung.

Da an der Grenze gegen Erde das Potential verschwinden soll, muß hier

$$\varphi = 0 \quad \text{für} \quad y = -h \tag{3}$$

gelten; oberhalb der Fehlerstelle geht das Feld gegen Null

$$\lim_{y \to \infty} \varphi = 0. \tag{4}$$

Sieht man von den Forderungen (2), (3), (4) ab, so leitet sich die Strömung aus einem in der ganzen z-Ebene definierten logarithmischen Potentiale ab, wobei wir uns den Fehlerstrom J auf einer senkrecht zur Wand durch den Fehlerort gehenden Geraden in der Dichte

$$i = \frac{J}{\delta} \tag{5}$$

stetig verteilt zu denken haben. Um jetzt zuerst die Bedingung (2) zu erfüllen, muß man die Wandbegrenzungen zu Stromlinien machen; dies gelingt durch Anordnung unendlich vieler Stromquellen der Intensität (5), welche nach Bild 2 sämtlich die Höhe h über Erde besitzen und voneinander um die Wandbreite b entfernt sind; man überzeugt sich hiervon an Hand ihrer Stromfäden entsprechend Bild 3. Das Potential dieser unendlich vielen Quellen lautet in komplexer Schreibweise[2]:

$$\varphi = -\frac{i}{2\pi\varkappa_F} \cdot \Re e \ln \sin \frac{z}{b} \cdot \pi = -\frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \Re e \ln \sin \frac{z}{b} \cdot \pi, \tag{6}$$

während die Stromfunktion

$$\psi = -\frac{i}{2\pi\varkappa_F} \cdot \Im m \ln \sin \frac{z}{b} \pi = -\frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \Im m \ln \sin \frac{z}{b} \pi \tag{6a}$$

den Verlauf der Feldlinien regelt.

[1] Eine ähnliche Aufgabe behandelt F. Noether, „Über eine Aufgabe der Kapazitätsberechnung", Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern, Bd. 2, S. 198. Dorther kann man den Einfluß einer oberen Wandbegrenzung entnehmen.

[2] $\Re e$ bedeutet den Realteil, $\Im m$ den Imaginärteil der komplexen Funktion.

Um weiterhin (3) zu befriedigen, ordnen wir senkrecht unter dem beschriebenen Strom-Quellensystem längs der Geraden $y = -2h$ nach Bild 4 ein zweites Strom-Quellensystem mit entgegengesetzt gleichen Quellintensitäten zu; ihr Feld berechnet sich analog (6), (6a) aus

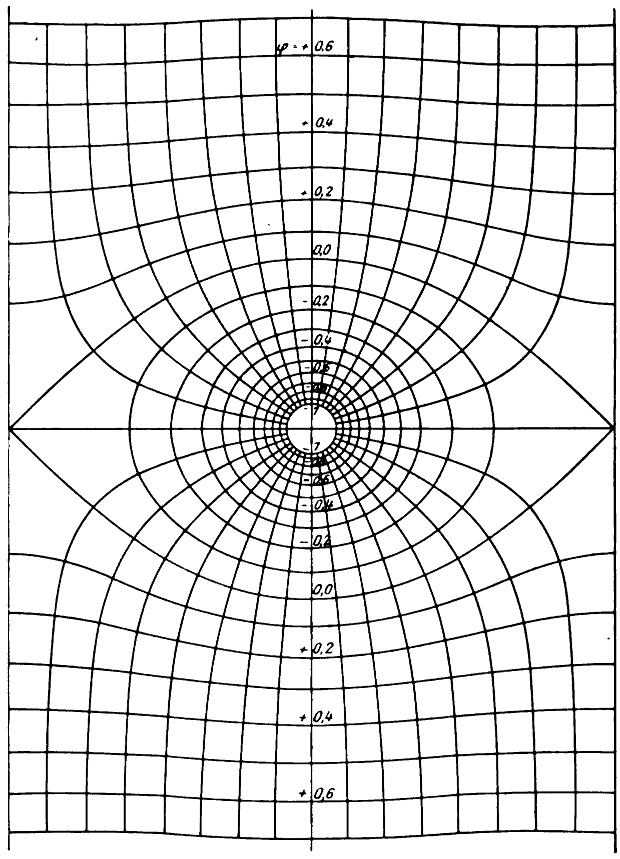


Bild 3. Äquipotential- und Stromlinien der Anordnung nach Bild 2.

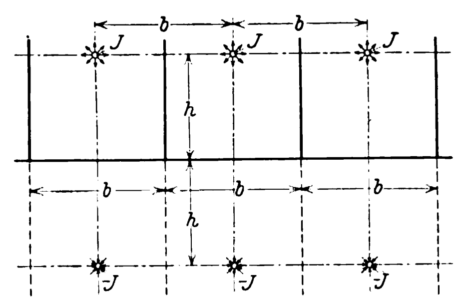


Bild 4. Vollständiges Ersatzschema der Wandströmung.

$$\varphi' = + \frac{i}{2\pi\varkappa_F} \cdot \mathfrak{Re} \ln \sin \frac{z + 2jh}{b} \cdot \pi = \frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \mathfrak{Re} \ln \sin \frac{z + 2jh}{b} \pi, \tag{7}$$

$$\psi' = \frac{i}{2\pi\varkappa_F} \cdot \mathfrak{Jm} \ln \sin \frac{z + 2jh}{b} \cdot \pi = \frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \mathfrak{Jm} \ln \sin \frac{z + 2jh}{b} \pi, \tag{7a}$$

wobei beachtet wurde, daß der Ursprung der gewählten Koordinaten im Fehlerorte liegt. Überlagert man das Feld (7), (7a) dem Feld (6), (6a), so entstehen als resultierendes Potential und resultierende Stromfunktion:



$$\varphi_r = \varphi + \varphi' = -\frac{J}{2\pi\varkappa_F}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\Re\left[\ln\sin\frac{z}{b}\cdot\pi - \ln\sin\frac{z+2jh}{b}\pi\right]. \tag{8}$$

$$\psi_r = \psi + \psi' = -\frac{J}{2\pi\varkappa_F}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\Im m\left[\ln\sin\frac{z}{b}\cdot\pi - \ln\sin\frac{z+2jh}{b}\cdot\pi\right]. \tag{8a}$$

Das Potential (8) genügt ersichtlich der Grenzbedingung (3) und da es außerdem (2), (4) befriedigt, stellt es innerhalb des Bereiches $-b/2 \leqq x \leqq b/2$ das gesuchte Strömungsfeld in der Wand dar, dessen Feldlinien (8a) liefert (Bild 5).

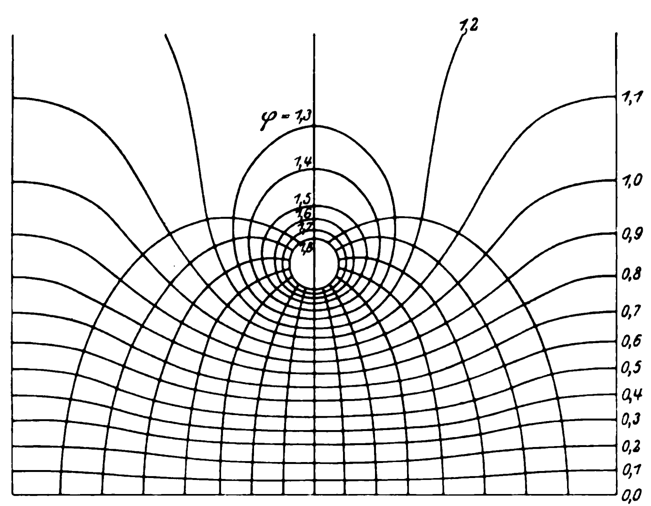


Bild 5. Äquipotential- und Stromlinien der Wandströmung für $h:b = 3:8$.

Wir wenden die erhaltenen Gleichungen zunächst auf die Fehlerstelle selbst an, indem wir $z = j\varrho_0$ einsetzen. Mit $\varrho_0 \ll h$ ergibt sich dann aus (8) das Potential des Fehlerortes gegen die Berührungsstelle zur Erde:

$$\varphi_0 = \frac{J}{2\pi\varkappa_F}\cdot\frac{1}{\delta}\left[\ln \mathfrak{Sin}\frac{2h}{b}\pi + \ln\frac{b}{\pi\varrho_0}\right]. \tag{9}$$

Der Quotient dieser Spannung durch den Strom gibt den **Ausbreitungswiderstand der Fehlerstelle** bis zur Erdoberfläche an:

$$R_w = \frac{1}{2\pi\varkappa_F}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\left[\ln \mathfrak{Sin}\frac{2h}{b}\pi + \ln\frac{b}{\pi\varrho_0}\right]. \tag{9a}$$

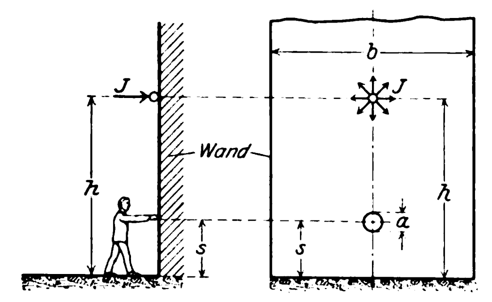


Bild 6. Berührung der stromführenden Wand.

Hier kann man den ersten Posten innerhalb der Klammer als Einfluß der Wand auffassen, während der zweite Posten von den Abmessungen der Fehlerstelle selbst abhängt und etwa als ihr Übergangswiderstand gekennzeichnet werden kann.

Wir gehen jetzt zur Beschreibung des Feldverlaufes längs der Wand über, welcher für zufällig die Wand berührende Lebewesen gefährlich werden kann; hier-

bei wollen wir das auf den ungünstigsten Fall beschränken, in welchem die Berührungsstelle nach Bild 6 in der Höhe s senkrecht unter dem Fehlerort über Erde liegt, so daß die volle Spannung zwischen Berührungspunkt und Erdboden auf den Körper einwirkt. Man erhält mit $z = -jy$ sogleich

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta}\left[\ln \mathfrak{Sin}\frac{2h-y}{b} \cdot \pi - \ln \mathfrak{Sin}\frac{y}{b}\pi\right] \tag{10}$$

und also die gesuchte Berührungsspannung gegen Erde:

$$E_s = \varphi_{y=h-s} = \frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \left[\ln \mathfrak{Sin}\frac{h+s}{b} \cdot \pi - \ln \mathfrak{Sin}\frac{h-s}{b}\pi\right]. \tag{10a}$$

Wenn h einigermaßen groß gegen s ist, kann man gemäß

$$E_s = \sim s \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{10b}$$

entwickeln und findet mit

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \left[\mathrm{Cotg}\frac{2h-y}{b}\pi + \mathrm{Cotg}\frac{y}{b}\pi\right] \tag{11}$$

und $y = 0$ die einfache Formulierung

$$E_s = \sim \frac{J}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{2\pi s}{b} \cdot \mathrm{Cotg} \cdot \frac{h}{b}\pi. \tag{11a}$$

Sie reicht in Anbetracht der nur rohen Annäherung unserer Voraussetzungen an die Wirklichkeit im allgemeinen völlig aus (vgl. das Zahlenbeispiel) und nur wenn s und h gleiche Größenordnung besitzen, muß man auf die genauere Gleichung (10a) zurückgreifen.

Die Berührungsspannung treibt nun nach Maßgabe des Körperwiderstandes einen Körperstrom in das Lebewesen hinein, welcher einen Nebenschluß zu dem oben ermittelten Wandstrom bildet. Wir nehmen hierbei an, um den gefährlichsten Fall kennen zu lernen, daß der Widerstand der Strombahn innerhalb des Körpers vernachlässigbar klein sei, so daß sich der gesamte Körperwiderstand auf den Ausbreitungswiderstand der Elektroden an den Berührungsstellen reduziert; hierbei ist der Ausbreitungswiderstand der Berührung gegen die Wand von dem Ausbreitungswiderstand der Berührung gegen Erde zu unterscheiden. Um diese Widerstände in einfacher Weise zu erfassen, wollen wir die Berührung gegen Wand durch einen Kreis vom Durchmesser d, die Berührung gegen Erde durch einen Kreis vom Halbmesser D ersetzen. Der erstgenannte Ausbreitungswiderstand berechnet sich aus Gleichung (9a), indem wir $h = s$, $\varphi_0 = \frac{1}{2} d$ substitutieren, zu

$$r_w = \frac{1}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \left[\ln \mathfrak{Sin}\frac{2s}{b} \cdot \pi + \ln \frac{b}{\pi d/2}\right] \tag{12}$$

und wenn $s \ll b$

$$r_w = \frac{1}{2\pi\varkappa_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{4s}{d}. \tag{12a}$$

Da dieser Wert umgekehrt proportional der Stärke der Feuchtigkeitsschicht anwächst, ist er im allgemeinen viel größer als der Ausbreitungswiderstand der Berührung gegen Erde, so daß (12a) merklich dem totalen Körperwiderstand gleichgesetzt werden kann. Daher folgt sogleich der Körperstrom

$$i = \frac{E_s}{r_w} \tag{13}$$

und wenn hier (11a) und (12a) eingeführt wird:

$$i = J \cdot \frac{\frac{2\pi s}{b} \cdot \mathrm{Cotg}\frac{h}{b} \cdot \pi}{\ln \frac{4s}{d}}. \tag{13a}$$

Das Verhältnis des Körperstromes zum Fehlerstrom ist hiernach, unabhängig von der Leitfähigkeit und Stärke der Feuchtigkeitsschicht, lediglich durch die Abmessungen der Wand, den Fehlerort, den Berührungsort und die Größe der Berührungsstelle gegeben. Insbesondere folgt für eine **breite Wand** ($b \gg h$) als Grenzwert

$$i = J \cdot \frac{\frac{2s}{h}}{\ln \frac{4s}{d}} \tag{13b}$$

und für eine **schmale Wand** ($b \ll h$):

$$i = J \cdot \frac{\frac{2\pi s}{b}}{\ln \frac{4s}{d}}. \tag{13c}$$

Man erkennt hieraus, daß schmale Wände den Körperstrom außerordentlich erhöhen können, während eine Verbreiterung der Wand von einer bestimmten Grenze ab ohne Einfluß auf den Körperstrom bleibt. Hierbei ist zu beachten, daß naturgemäß für das elektrische Strömungsfeld eine von der Decke bis zum Erdboden reichende Fuge eine Wandgrenze bildet, so daß beispielsweise aus Brettern gefertigte Wände oft als schmal im Sinne der Gleichung (13c) zu betrachten sind. Um hierbei Mißverständnissen vorzubeugen, wiederholen wir, daß die in (13b), (13c) benutzte Formel für den Körperwiderstand an die Voraussetzung $s \ll b$ gebunden ist; andernfalls hat man den Wert (12) in (13) einzuführen, wodurch sich die Körperströme entsprechend reduzieren. Ist insbesondere $s \gg b$, so folgt

$$r_w = \frac{1}{2\pi k_F} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \left[\frac{2\pi s}{b} + \ln \frac{2b}{\pi d}\right] \tag{12b}$$

und also als Grenzwert für eine extrem schmale Wand (z. B. einzelnes Brett):

$$i = J \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{2\pi s} \cdot \ln \frac{2b}{\pi d}}, \tag{13d}$$

wobei natürlich immer noch $d \ll b$ vorauszusetzen ist; hiernach kann der Körperstrom in solchen ungünstigen Fällen den gesamten Fehlerstrom nahe erreichen.

4. Das Strömungsfeld im Erdboden.

Gemäß unseren früheren Voraussetzungen (Nr. 2) ist die Berührungsfläche Wand—Erde eine Fläche konstanten Potentiales; wir dürfen hiernach das Strömungsfeld im Erdboden mit dem Feld einer langgestreckten Flachbandelektrode der Länge b und der Breite δ identifizieren. Hierbei ist es nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie erlaubt, ohne Änderung der elektrischen Bedingungen von der Flachbandelektrode auf eine gleichlange Kreisbandelektrode überzugehen, deren Halbmesser ϱ_e sich aus

$$\varrho_e = \frac{1}{4}\delta \tag{14}$$

berechnet; das Feld des so entstandenen Kreiszylinders kann durch das eines gestreckten Rotationsellipsoides ersetzt werden, dessen kleine Halbachse durch (14) gegeben ist, während die große Halbachse gleich $\frac{1}{2}$ b zu setzen ist.

Wir setzen voraus, daß das Erdreich homogen ist und die Leitfähigkeit $\varkappa$ besitzt. Das Feld eines solchen Ellipsoides kann dann bekanntlich[1] aus einer gleichmäßig längs der Verbindungslinie der Brennpunkte verteilten Strömung abgeleitet

[1] F. Ollendorff, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, S. 36, Berlin, Springer 1926.

werden; hierbei muß man zunächst den doppelten Elektrodenstrom als Quellstrom eines Ellipsoides im allseitig unendlich ausgedehnt gedachten Erdreich annehmen, da von dem solcherweise konstruierten Feld nur die Gesamtheit der in den unteren Halbraum einziehenden Stromfäden mit dem realen Felde identifiziert werden kann.

Führt man ein Zylinderkoordinatensystem ϱ, ζ, ϑ mit dem Ursprung im Ellipsoidenzentrum ein, dessen ζ-Achse in die große Halbachse des Ellipsoides weist, so gilt

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{2J}{4\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{b}\ln\frac{b/2-\zeta+\sqrt{(b/2-\zeta)^2+\varrho^2}}{-b/2-\zeta-\sqrt{(-b/2-\zeta)^2+\varrho^2}} = \\ &= \frac{J}{2\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{b}\cdot\ln\frac{b/2-\zeta+\sqrt{(b/2-\zeta)^2+\varrho^2}}{-b/2-\zeta-\sqrt{(-b/2-\zeta)^2+\varrho^2}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wobei wir uns auf den innerhalb des Gebäudes liegenden Bereich $0 \leqq \zeta \leqq b/2$ beschränken müssen, da an den Grenzen dieses Bereiches die Homogenität des Erdbodens entgegen unseren Annahmen durch Konstruktionsteile des Gebäudes in unberechenbarer Weise gestört wird. Insbesondere folgt für $\zeta = 0$, $\varrho = \varrho_e$ und $\varrho_e \ll b$ das Potential des Ellipsoides gegen die unendlich ferne Hüllkugel

$$\varphi_{0e} = \frac{J}{2\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{b}\ln\frac{b}{\frac{1}{2}\varrho_e^2/b/2} = \frac{J}{2\pi\varkappa}\,\frac{2}{b}\ln\frac{b}{\varrho_e} = \frac{J}{2\pi\varkappa}\cdot\frac{2}{b}\cdot\ln\frac{4b}{\delta}, \tag{15a}$$

so daß die Übergangsschicht Wand—Erde den Ausbreitungswiderstand besitzt:

$$R_e = \frac{1}{2\pi\varkappa}\cdot\frac{2}{b}\cdot\ln\frac{4b}{\delta}. \tag{15b}$$

Das Spannungsfeld längs der Erdoberfläche (innerhalb des Gebäudes) ist durch (15) unmittelbar gegeben. Man berechnet aus ihm leicht nach bekannten Regeln[1] Berührungsspannung und Körperstrom eines auf der Erde stehenden Lebewesens, unabhängig von dem Strömungsfeld in der Wand; wir wollen indes die Rechnung an dieser Stelle nicht weiter fortführen, weil die Ströme unter dem Einfluß des hohen Wand-Ausbreitungswiderstandes so schwach werden, daß sich längs der Erdoberfläche nur äußerst geringe Potentialdifferenzen ausbilden, die in keinem Falle eine lebensgefährliche Höhe erreichen. Um dies zu erkennen, sollen die entwickelten Zusammenhänge an einem Zahlenbeispiel erläutert werden.

5. Zahlenbeispiel.

Wir berechnen das Strömungsfeld in einem Raume, dessen Wand eine Länge von 8 m = 800 cm besitzt. Die Fehlerstelle möge in der Höhe h = 3 m = 300 cm über dem Erdboden liegen und eine Kreisfläche vom Halbmesser $\varrho_0 = 0{,}5$ cm bilden. Als Leitfähigkeit der feuchten Wandschicht nehmen wir $\varkappa_F = 5\cdot 10^{-3}$ Siemens/cm an, ein Wert, der etwa der Leitfähigkeit des Seewassers gleichkommt; die Dicke der Schicht möge 1 mm = 0,1 cm betragen. Die Berührungsstelle eines Lebewesens mit der Wand möge in 150 cm Höhe über Erde liegen und einen Durchmesser d = 10 cm aufweisen; es entspricht dies etwa den Verhältnissen, die sich ergeben, wenn ein Mensch mit einer Hand die Wand berührt.

Zunächst berechnen wir aus (9a) den Ausbreitungswiderstand der Fehlerstelle bis zur Erdoberfläche:

$$R_w = \frac{1}{2\pi\cdot 5\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{1}{0{,}1}\left[\ln \mathfrak{Sin}\,\frac{2\cdot 300}{800}\cdot\pi + \ln\frac{800}{\pi\cdot 0{,}5}\right] = 2510\,\Omega.$$

Aus (13a) ergibt sich das Verhältnis des Körperstromes zum gesamten Fehlerstrom:

[1] R. Rüdenberg, Elektrische Schaltvorgänge, S. 154, 2. Aufl., Berlin, Springer 1926.

$$\frac{i}{J} = \frac{\frac{2\pi \cdot 150}{800} \cdot \operatorname{Cotg} \frac{300}{800} \cdot \pi}{\ln \frac{4 \cdot 150}{10}} = \frac{1,18 \cdot 1,21}{4,81} = \sim 30\%,$$

also ein außerordentlich großer Betrag. Betrachtet man für Menschen einen Körperstrom von $\frac{1}{20}$ Amp. als lebensgefährlich, so folgt als gefährlicher Fehlerstrom

$$J = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{0,3} = 0,167 \text{ Amp.},$$

ein sehr niedriger Wert, den man in anderen Fällen kaum als gefährlich betrachten würde. Nun ist nach (15b) der Ausbreitungswiderstand der Übergangsschicht Wand—Erde, wenn wir mittleres Erdreich ($\varkappa = 10^{-4}$ Siemens/cm) voraussetzen:

$$R_e = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{2}{800} \ln \frac{4 \cdot 800}{0,1} = 3,8 \cdot 10,4 = 39,8\ \Omega.$$

Der gesamte Ausbreitungswiderstand der Fehlerstelle ist also:

$$R = R_w + R_e = 2510 + 39,8 = \sim 2550\ \Omega$$

nur 1,5% höher als der Ausbreitungswiderstand der Fehlerstelle bis zur Übergangsschicht Wand—Erde.

Nehmen wir an, daß die beschädigte Leitung eine Spannung von 220 Volt gegen Erde führt, so folgt als Fehlerstrom:

$$J = \frac{220}{2550} = 0,0865 \text{ Amp.}$$

rund die Hälfte des oben berechneten gefährlichen Fehlerstromes. Fast das ganze Spannungsgefälle liegt in der Strecke Fehlerort—Berührungsschicht Wand—Erde nach

$$E' = R_w \cdot J = 2510 \cdot 0,0865 = \sim 217 \text{ Volt}$$

und an der Schicht verbleibt gegen die unendlich ferne Hüllkugel eine Berührungsspannung:

$$E'' = R_e \cdot J = 39,8 \cdot 0,0865 = \sim 3,4 \text{ Volt},$$

die in der Tat als völlig ungefährlich zu bezeichnen ist. Wir erkennen hieraus gleichzeitig, daß die früher gemachte Voraussetzung, die Berührungsschicht Wand—Erde sei eine Aquipotentialfläche, für das Ergebnis durchaus belanglos ist. Endlich wollen wir die Berührungsspannung (11a) mit dem genaueren Wert (10a) vergleichen, indem wir den hier berechneten Fehlerstrom in die Rechnung einführen. Aus (11a) folgt:

$$E_s = \frac{0,0865}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{0,1} \cdot \frac{2\pi \cdot 150}{800} \cdot \operatorname{Cotg} \frac{300}{800} \cdot \pi = 39,2 \text{ Volt},$$

während (10a) ergibt:

$$E_s = \frac{0,0865}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{0,1} \left[\ln \mathfrak{Sin} \frac{300 + 150}{800} \pi - \ln \mathfrak{Sin} \frac{300 - 150}{800} \pi \right] = 41,5 \text{ Volt},$$

so daß, wie behauptet, beide Ausdrücke hinreichend genau miteinander übereinstimmen. Man erkennt somit, daß schon in Anlagen mit durchaus mäßigen Betriebsspannungen gegen Erde bei relativ kleinen Fehlerströmen beträchtliche Berührungsspannungen auftreten können, welche Körperströme für Mensch und Tier lebensgefährlicher Höhe im Gefolge haben. Hiermit ist zahlenmäßig erwiesen, daß schlecht ausgeführte oder beschädigte Installationen in Gebäuden den gefährlichsten elektrischen Anlageteilen zuzurechnen sind, und es resultiert die nachdrückliche Forderung, bei der Herstellung solcher Installationen in feuchten Räumen mit größter Sorgfalt vorzugehen.



6 Zusammenfassung.

Schadhafte Installation innerhalb eines Gebäudes verursacht eine Strömung über die meist feuchte Wand zur Erde; Hand in Hand mit diesen Wandströmen können Spannungen längs der Wand entstehen, die für zufällig mit der Wand in Berührung kommende Menschen oder Tiere lebensgefährlich werden können.

Die Strömung wird für einen hinreichend vereinfachten Fall berechnet, indem das Feld in eine (zweidimensionale) Wandströmung und eine (dreidimensionale) Erdströmung aufgespalten wird. Die Wandströmung läßt sich mittels zweier unendlicher Quellreihen darstellen; es werden einfache Ausdrücke für das resultierende Potential und die zugehörige Stromfunktion angegeben. Aus dem Potentialfeld wird zunächst der Ausbreitungswiderstand zwischen Fehlerstelle und Übergangsschicht Wand–Erde, sodann die Berührungsspannung für ein auf der Erde stehendes Lebewesen abgeleitet. Der Körperstrom, der nach der Berührung im Nebenschluß zum Wandstrom durch das Lebewesen fließt, ist unabhängig von der Leitfähigkeit und Stärke der stromführenden Schicht längs der Wand; er wird in Abhängigkeit von den Dimensionen der Wand, der Lage des Fehlerortes und der Größe und Lage der Berührungsstelle angegeben und für verschiedene Fälle diskutiert. Die Erdströmung läßt sich aus dem Felde eines langgestreckten Rotationsellipsoides ableiten; hieraus wird der Ausbreitungswiderstand der Übergangssicht Wand–Erde berechnet und das Spannungsfeld längs der Erdoberfläche innerhalb des Gebäudes angegeben.

Die Ergebnisse der Rechnung werden in einem Zahlenbeispiel ausgewertet. Es wird nachgewiesen, daß der Hauptteil der Spannung innerhalb der Wand abfällt, so daß die Einzelheiten der Erdströmung für das Ergebnis belanglos sind. Der Körperstrom nimmt schon bei sehr mäßigen Defektströmen eine lebensgefährliche Größe an; relativ niedrige Betriebsspannungen bringen bereits Ströme derartiger Größenordnung hervor. Bei der Erstellung von Installationen innerhalb von Gebäuden ist daher äußerste Sorgfalt am Platze.

Zum Schlusse erscheint es notwendig, darauf hinzuweisen, daß die zahlenmäßigen Unterlagen dieses Beispieles bis zu einem gewissen Grade willkürlich gewählt sind und in hohem Maße der experimentellen Nachprüfung bedürfen. Es wäre erwünscht und für die Beherrschung der hier angeschnittenen, recht wichtigen Fragen von hohem Werte, wenn derartige Messungen in Kürze ausgeführt werden könnten.



Über neue eisenlose elektrodynamische Präzisions-Leistungsmesser hoher Empfindlichkeit.

Von

Wilhelm Geyger, Frankfurt a. M.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Hartmann & Braun A.-G.)

Einleitung.

Für Wechselstrom-Leistungsmessungen bei großer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung (z. B. Verlustmessungen an Transformatoren und Kabeln) benötigt man hochempfindliche eisenlose elektrodynamische Präzisions-Leistungsmesser, die so beschaffen sind, daß bei der höchstzulässigen Strombelastung der Meßwerkspulen der Endausschlag ungefähr bei $\cos \varphi = 0{,}1$ erreicht wird, und daß der Eigenphasenfehler des Instrumentes verschwindend klein ist. Infolge der durch die hohe Empfindlichkeit bedingten verhältnismäßig schwachen mechanischen Gegenkraft (Bandaufhängung des beweglichen Systems) werden derartige Instrumente, wenn sie nicht astatisch gebaut sind, durch magnetische Fremdfelder stark beeinflußt. Deswegen ist es zweckmäßig, solche Instrumente astatisch auszuführen, um die Beeinflußbarkeit durch homogene Fremdfelder völlig auszuschalten und den Einfluß inhomogener Fremdfelder soweit als möglich herabzusetzen.

Bezüglich der bisher bekannt gewordenen Ausführungsformen eisenloser elektrodynamischer Leistungsmesser sei auf die einschlägige Literatur[1] hingewiesen. Man war früher allgemein der Ansicht, daß derartige Instrumente, um das Auftreten von Wirbelströmen und Wirbelstromphasenfehlern zu verhindern, unter strengster Vermeidung jeglicher Metallteile aufgebaut werden müßten, und bei den älteren Konstruktionen waren mit Ausnahme der Drahtwicklungen, der Verbindungsschrauben und Anschlüsse alle Metallteile ängstlich vermieden. Infolgedessen waren die mechanischen Eigenschaften und die Wärmebeständigkeit dieser Konstruktionen ungünstig und beeinträchtigten ihre praktische Brauchbarkeit. In neuerer Zeit werden solche Instrumente unter Verwendung von Metallteilen mit hohem spezifischem Widerstand aufgebaut, welche bei großer mechanischer Festigkeit und Wärmebeständigkeit das Auftreten von Wirbelströmen in praktisch ausreichendem Maße verhindern.

Im folgenden werden neue eisenlose elektrodynamische Präzisions-Leistungsmesser beschrieben[2], welche ein hochempfindliches, astatisch aufgebautes Meßwerk (Bandaufhängung des beweglichen Systems) besitzen und bei mechanisch günstigem Aufbau (Konstruktion des Meßwerkgestelles aus Widerstandsmetall) einen verschwindend kleinen Eigenphasenfehler haben. Die Instrumente sind daher für Eisenverlustmessungen und Kabeluntersuchungen besonders geeignet.

Aufbau des Meßwerkes.

Bild 1 zeigt den Aufbau des Meßwerkes. Die feststehende Hauptstromspule besteht aus zwei gleichartigen, nebeneinander angeordneten Teilen, zwischen denen sich die an einem Bronzeband aufgehängte Achse des beweglichen Systems befindet. Die beiden Teile der Hauptstromspule können zwecks Erzielung zweier im Verhältnis 1 : 2 stehender Strommeßbereiche mittels eines Laschenschalters in Reihe

[1] Vgl. z. B. Keinath, Die Technik der elektrischen Meßgeräte. Verlag Oldenbourg, Auflage 1921, S. 149—166. — Drysdale und Jolley, Electrical measuring instrumentes. Verlag Benn, London, I. Teil, S. 300—363.

[2] Die Instrumente wurden vom Verfasser bei der Firma Hartmann & Braun A. G., Frankfurt a. M., ausgebildet und werden von dieser Firma in der beschriebenen Ausführungsform (Type „EAw") in den Handel gebracht.

oder parallel geschaltet werden. Innerhalb und oberhalb der Hauptstromspule ist je eine dünndrähtige Drehspule, die von einem der Spannung proportionalen Strome durchflossen wird, auf der Achse befestigt. Die beiden Drehspulen (Spannungsspulen) sind gleichartig beschaffen und derart in Reihe geschaltet, daß die vom Hauptstrome ausgeübten Drehmomente sich addieren, während die von einem äußeren homogenen Fremdfelde hervorgerufenen Drehmomente sich aufheben. Durch geeignete Dimensionierung der rechteckig geformten Meßwerkspulen ist ein praktisch linearer Skalenverlauf erreicht worden (vgl. Bild 5)[1].

Die beiden Teile der Hauptstromspule werden mittels Backen aus Isolationsmaterial an den flachen Spulenträgern des aus Widerstandsmetall gegossenen Meßwerkgestelles angepreßt und unbeweglich festgehalten. Das Meßwerkgestell, welches

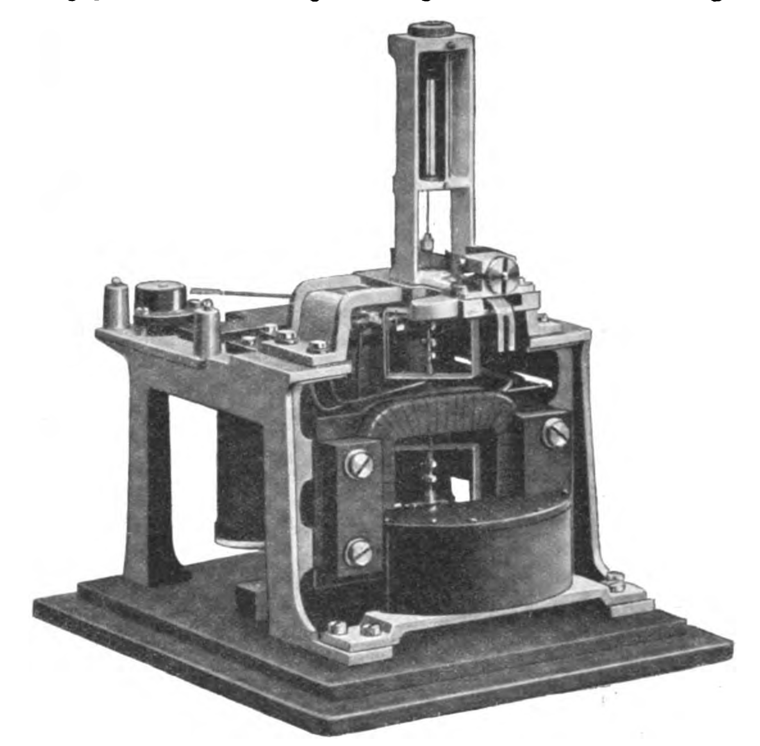


Bild 1. Aufbau des Meßwerkes.

sich durch große mechanische Festigkeit und Unveränderlichkeit auszeichnet, trägt auch alle übrigen Teile des Meßwerkes (Bandaufhängevorrichtung, Dämpferkastenträger mit Dämpferkasten, Skalenträger mit Skale und Libelle), sowie die inneren Stromzuführungsklemmen für die Meßwerkspulen und die Widerstände des Spannungspfades.

Die einzelnen Bestandteile des Meßwerkgestelles sind so geformt, daß das Auftreten von Wirbelströmen in praktisch ausreichendem Maße verhindert wird, und sind durch isolierende Zwischenstücke voneinander elektrisch getrennt, um Wirbelstrombahnen zu vermeiden.

Die Bandaufhängevorrichtung ist drehbar (zur Nullpunkteinstellung) auf einer aus Widerstandsmetall hergestellten Brücke befestigt, an der eine Arretiervorrichtung für das bewegliche System angebracht ist. Die wirksame Länge des Bronzeauf-

[1] Die Möglichkeit, daß man bei eisenlosen elektrodynamischen Leistungsmessern mit gewöhnlichen Spulen von bestimmten Verhältnissen zwischen Wicklungsbreite und Wicklungshöhe einen praktisch linearen Skalenverlauf erreichen kann, hat zuerst Görner bei den von Hartmann & Braun schon seit 1899 hergestellten Präzisions-Leistungsmessern gezeigt.

hängebandes und somit seine Richtkraft kann mittels einer verschiebbaren Bandklemmvorrichtung nach Bedarf verändert werden, um die Empfindlichkeit des Instrumentes, also die Instrumentkonstante auf den gewünschten Wert einstellen zu können. Als Skalenträger dienen vier kleine Säulen, die, ebenso wie die Libelle, am oberen Teile des Meßwerkgestelles angeordnet sind. Am oberen Ende der Achse ist der über der spiegelunterlegten Skale (Spiegelbogen) sich bewegende Messerzeiger befestigt, am unteren Ende befinden sich Dämpferflügel (Glimmerflügel) und Balanziereinrichtung (zwei Balanziergewichte).

Der dicht neben der Hauptstromspule angeordnete Dämpferkasten ist zwecks Vermeidung von Wirbelströmen aus Isolationsmaterial hergestellt und innen mit Metallfolie überzogen, um Störwirkungen (z. B. durch elektrostatische Aufladungen) auszuschalten. Der aus Widerstandsmetall bestehende Dämpferkastenträger ist einerseits mit dem Meßwerkgestell, andererseits mit dem Dämpferkasten fest verschraubt und verleiht diesem ausreichende mechanische Festigkeit und Wärmebeständigkeit. Die inneren Stromzuführungsklemmen für die Strom- und Spannungsspulen, sowie die Widerstände und Verbindungsklemmen des Spannungspfads sind an zwei Klemmleisten aus Isolationsmaterial geschraubt, welche am oberen Teile des Meßwerkgestelles befestigt sind. Die Enden der Drehspulen sind über dünne Goldbänder mit verschwindend kleiner Richtkraft mit den zugehörigen inneren Stromzuführungsklemmen verbunden, während die festen Spulen an ihre inneren Stromzuführungsklemmen unmittelbar und an die entsprechenden äußeren, am Gehäuse angeordneten Anschlußklemmen über einen Laschenschalter angeschlossen sind.

Gesamtaufbau des Instrumentes.

Bild 2 zeigt den Gesamtaufbau des Instrumentes. Das Meßwerkgestell ist mit der Gehäusegrundplatte verschraubt, welche mit den Seitenwänden des Gehäuses durch Verschraubung trennbar verbunden ist. Das Meßwerk kann daher durch Lösen mehrerer Schrauben von den einzelnen Teilen des Gehäuses leicht getrennt und freigelegt werden. Grundplatte und Seitenwände des Gehäuses sind aus poliertem Nußbaumholz gefertigt. Der aus Widerstandsmetall gegossene emaillierte Gehäusedeckel trägt einen Dom zur Aufnahme der Bandaufhängevorrichtung, sowie den zur Betätigung der Arretiervorrichtung dienenden Drehgriff. An der vorderen Seitenwand des Gehäuses sind zwei Stellschrauben zum Wagrechtstellen des Instrumentes und die Einstellschraube für die Nullpunktkorrektion vorgesehen; an der hinteren Seitenwand sind die Anschlußklemmen für Strom- und Spannungspfad nebst den zugehörigen Klemmenbezeichnungen, eine Erdungsschraube, der Stromspulen-Laschenschalter und ein Kurzschließer für den Strompfad angeordnet.

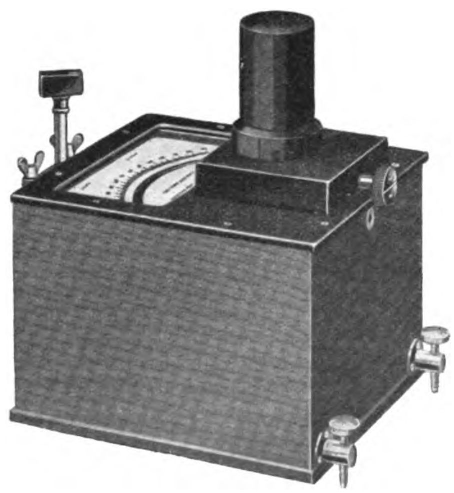


Bild 2. Gesamtaufbau des Instrumentes.

Abmessungen und Belastbarkeit der Meßwerkspulen.

Die äußeren Abmessungen der beiden feststehenden, nebeneinander angeordneten Teile der Hauptstromspule sind aus Bild 3 (Maße in mm) ersichtlich. Die Wicklung dieser Spulen wird in der Weise ausgeführt, daß zunächst eine gewisse Anzahl dünner, seideumsponnener Kupferdrähte verdrillt und dann auf ein entsprechend ausgebildetes Wickelfutter in einer gewissen Anzahl Windungen zusammen

aufgewickelt werden. Die Anzahl der verdrillten Einzeldrähte und die Windungszahl wird dem zu erzielenden Strommeßbereich entsprechend gewählt. In Tabelle I

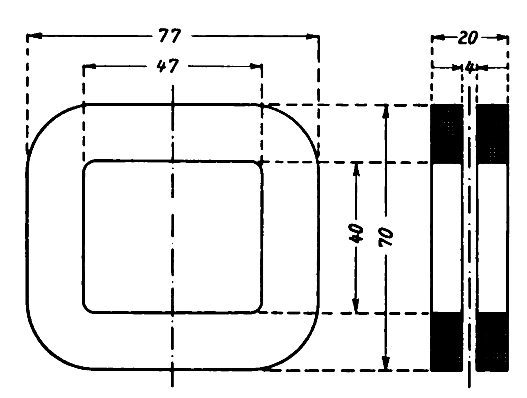


Bild 3. Abmessungen der feststehenden Hauptstromspule.

sind die Wicklungsdaten sowie die (ungefähren) Widerstands- und Induktivitätswerte der Spulenpaare für die einzelnen Strommeßbereiche (A bis F) zusammengestellt.

Tabelle 1.

Strom-Meß-bereich	Nenn-strom Ampere	Höchst-strom Ampere	Win-dungszahl der Einzel-spulen	Schaltung der Einzel-spulen	Gesamt-windungs-zahl der Haupt-strom-spule	Anzahl der ver-drillten Einzel-drähte	Art der ver-drillten Einzel-drähte	Wider-stand des Strom-pfads ca. Ohm	Induktivität des Strom-pfads ca. Henry
A	0,05	0,5	400	Reihenschaltung	800	1	0,40 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	20	4×10^{-2}
	0,1	1	400	Parallelschaltung	400	1	0,40 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	5	1×10^{-2}
B	0,1	1	200	Reihenschaltung	400	2	0,40 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	6	1×10^{-2}
	0,2	2	200	Parallelschaltung	200	2	0,40 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	1,5	$2,5 \times 10^{-3}$
C	0,2	2	100	Reihenschaltung	200	4	0,40 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	2	$2,5 \times 10^{-3}$
	0,4	4	100	Parallelschaltung	100	4	0,40 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	0,5	6×10^{-4}
D	0,25	2,5	80	Reihenschaltung	160	3	0,50 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	1,2	$1,6 \times 10^{-3}$
	5	5	80	Parallelschaltung	80	3	0,50 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	0,3	4×10^{-4}
E	0,5	5	40	Reihenschaltung	80	6	0,50 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	0,35	4×10^{-4}
	1	10	40	Parallelschaltung	40	6	0,50 mm Durchm, Kupfer, 2mal Seide	0,09	1×10^{-4}
F	1	10	20	Reihenschaltung	40	12	0,50 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	0,08	1×10^{-4}
	2	20	20	Parallelschaltung	20	12	0,50 mm Durchm. Kupfer, 2mal Seide	0,02	$2,5 \times 10^{-5}$

Durch diese Wicklungsart der festen Spulen wird eine weitgehende Unterteilung ihrer einzelnen Stromleiter erzielt und hierdurch das Auftreten von Wirbelströmen und Skineffekt in denselben verhindert. Nach Fertigstellung der Wicklung und Entfernung des Wickelfutters werden die Spulen mit Seidenband bandagiert, mit Isolierlack durchtränkt und im Wärmeschrank getrocknet. Die so hergestellten Spulen haben genügende mechanische Festigkeit; eine Deformation derselben ist ausgeschlossen, zumal ihre Vertikalseiten durch die zur Befestigung der festen Spulen dienenden Klemmbacken versteift und in ihrer Lage unveränderlich festgehalten werden.

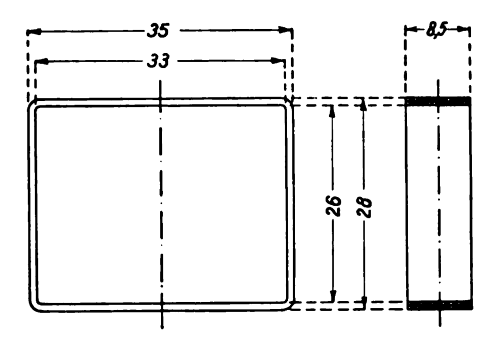


Bild 4. Abmessungen der beiden Drehspulen (Spannungsspulen).

Die beiden auf der Achse übereinander angeordneten Drehspulen haben die aus Bild 4 (Maße in mm) ersichtlichen Abmessungen. Diese Spulen werden aus dünnem seidenumsponnenem Aluminiumdraht (0,1 mm Drahtdurchmesser) gewickelt (Windungszahl jeder Spule: 200; Ohmscher Widerstand jeder Spule: etwa 82 Ohm; Induktivität jeder Spule: 0,0018 Henry), mit Isolierlack durchtränkt und dann getrocknet; sie weisen ebenfalls hinreichende mechanische Festigkeit auf. (Gewicht jeder Drehspule: 1,2 g.)

Die Belastbarkeit der Meßwerkspulen sei im folgenden durch die bei Dauerschaltung erzielbaren Amperewindungen gekennzeichnet. Das Meßwerk ist so beschaffen, daß bei 40 AW der festen Spulen, je 3 AW der Drehspulen (Drehspulstrom: 0,015 Ampere) und $\cos \varphi = 1$ der Endausschlag erreicht wird. Die festen Spulen dürfen dauernd mit einem 400 AW entsprechenden Strome, also mit dem 10fachen Wert des Nennstromes, belastet werden. Die Drehspulen dürfen dauernd mit einem Strome von 0,03 Ampere (je 6 AW der Drehspulen), entsprechend dem 2fachen Wert der Nennspannung, beschickt werden. Beispielsweise wird also mit 400 AW der Hauptstromspule und je 6 AW der Drehspulen (Drehspulstrom: 0,03 Ampere) bei $\cos \varphi = 0{,}05$ Endausschlag erreicht.

Charakteristische Eigenschaften des Instrumentes.

Die wirksame Länge des Bronzeaufhängebandes (Querschnitt des Bandes: $0{,}3 \cdot 0{,}02$ mm) wird vor der Eichung des Instrumentes durch Verstellen der verschiebbaren Bandklemmvorrichtung so eingestellt, daß der Zeigerausschlagswinkel

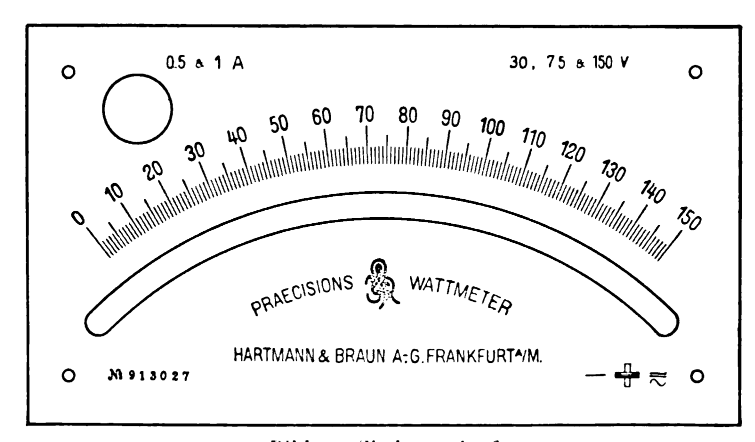


Bild 5. Skalenverlauf.



bei 40 AW der Hauptstromspule, je 3 AW der Drehspulen und $\cos\varphi = 1$ (Gleichstrom) etwa 80° beträgt (wirksame Länge des Bandes: etwa 5 cm). Dem Endausschlagwinkel von 80° entspricht ein Drehmoment von etwa 0,022 gcm. Der Skalenverlauf ist in Bild 5 wiedergegeben, welches als Beispiel eine 150teilige Skale (Nennströme: 0,5 und 1 Ampere, Nennspannungen: 30, 75 und 150 Volt) darstellt. Bemerkenswert ist, daß die Abweichungen des abgebildeten, durch Eichung ermittelten Skalenverlaufs von dem bei vollkommener Proportionalität äußerst gering sind: die größte Abweichung beträgt 0,2 % des Skalenendwertes.

Unter der elektrodynamischen Instrumentkonstante (K) wollen wir hier das Verhältnis des elektrodynamischen Drehmomentes für Endausschlag (D) zu dem diesem Drehmoment entsprechenden Produkt der Amperewindungen der festen und beweglichen Spulen ($AW_F \cdot AW_D$) verstehen:

$$K = \frac{D}{AW_F \cdot AW_D}. \qquad (1\,a)$$

Somit ist nach obigen Ausführungen:

$$K = \frac{0{,}022}{40 \cdot 6} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}. \qquad (1\,b)$$

Der Anteil des von der unteren bzw. oberen Drehspule erzeugten Drehmomentes am Gesamtdrehmoment ergibt sich aus folgendem Versuchsresultat:

1. Wird die untere Drehspule bei 40 AW der festen Spule, 3 AW der Drehspule und $\cos\varphi = 1$ allein eingeschaltet, so beträgt der Zeigerausschlagwinkel 70,5°.
2. Wird die obere Drehspule bei 40 AW der festen Spule, 3 AW der Drehspule und $\cos\varphi = 1$ allein eingeschaltet, so beträgt der Zeigerausschlagwinkel 9,5°.
3. Werden beide Drehspulen bei 40 AW der festen Spule, je 3 AW der Drehspulen und $\cos\varphi = 1$ zusammen eingeschaltet, so beträgt der Zeigerausschlagwinkel 80°.

Der Drehmomentanteil der unteren Drehspule beträgt 88 %, der der oberen Drehspule 12 %.

Das Gesamtgewicht des beweglichen Systems ist 9,5 g, die Einstelldauer (Beruhigungszeit) des Zeigers (Zeigerlänge: 10 cm) etwa 5 sec. Der Gehäusekasten ist 21 cm lang, 19 cm breit und 14 cm hoch; die Höhe des Domes ist 10 cm. Das Gesamtgewicht des Instrumentes beträgt etwa 5 kg.

Schaltung des Spannungspfades.

Die Schaltung des Spannungspfades ist in Bild 6 dargestellt. Die beiden astatisch geschalteten Drehspulen S_D sind mit dem phasenfehlerfrei gewickelten Vorwiderstand R_V in Reihe geschaltet, der teilweise durch einen Kondensator C überbrückt ist. Es bedeuten:

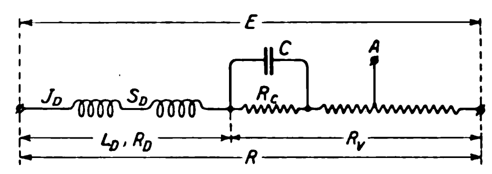


Bild 6. Schaltung des Spannungspfades.

L_D und R_D die gesamte Induktivität und den gesamten Ohmschen Widerstand der Drehspulen nebst Goldbandzuleitungen,
$R = R_D + R_V$ den gesamten Ohmschen Widerstand des Spannungspfades,
C die Kapazität des Überbrückungskondensators,
R_C den überbrückten Teil des Vorwiderstandes R_V,
E die am Spannungspfade wirksame Spannung,
J_D den in den Drehspulen fließenden Strom.

Der benutzte Wechselstrom sei sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω. Für den Drehspulstrom gilt, wie leicht abzuleiten ist:

$$J_D = \frac{E}{\sqrt{\left(R - R_C + \frac{R_C}{1 + (R_C \omega C)^2}\right)^2 + \omega^2 \left(L_D - \frac{R_C^2 \cdot C}{1 + (R_C \omega C)^2}\right)^2}}, \tag{2a}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (J_D \cdot E) = \omega \cdot \frac{L_D - \frac{R_C^2 \cdot C}{1 + (R_C \omega C)^2}}{R - R_C + \frac{R_C}{1 + (R_C \omega C)^2}} \tag{3a}$$

und bei der Kleinheit der in Betracht kommenden Phasenwinkel:

$$J_D = \frac{E}{R}, \tag{2b}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (J_D, E) = \omega \cdot \frac{L_D - R_C^2 \cdot C}{R}. \tag{3b}$$

Wird $R_C^2 \cdot C = L_D$ gewählt, so ist der Drehspulstrom J_D bei allen Spannungsmeßbereichen mit der am Spannungspfade wirksamen Spannung E phasengleich.

Der Kondensator C ermöglicht also, die durch die Induktivität der Drehspulen verursachte Phasenabweichung des Spannungspfades auf Null zu bringen. Dies wird dadurch erreicht, daß die induktive Phasenabweichung durch eine gleich große kapazitive Phasenabweichung kompensiert wird. Bei den beschriebenen Instrumenten ist:

$L_D = 0{,}0036$ Henry; $R_C = 1000$ Ohm; $C = 0{,}0036$ Mikrofarad.

Als Kapazität wird ein kleiner Glimmerkondensator verwendet, welcher am Meßwerkgestell seitlich befestigt ist.

Die Anzapfung A des Vorwiderstandes R_V dient zur Schaffung mehrerer Spannungsmeßbereiche. Um beim praktischen Gebrauche die Instrumente und die zur Erweiterung des Spannungsmeßbereichs dienenden getrennten Vorwiderstände beliebig vertauschen zu können, sind die einzelnen Widerstände des Spannungspfades und der in ihm fließende Strom (Drehspulstrom) auf runde Werte gebracht, und zwar beträgt für die Nennspannung 150 Volt der Gesamtwiderstand (R) des Spannungspfades 10000 Ohm, der Drehspulstrom (J_D) 0,015 Ampere. Der Spannungspfad darf aber mit 0,03 Ampere, entsprechend dem 2fachen Wert der Nennspannung, dauernd belastet werden. Hierdurch ergeben sich mehrere Spannungsmeßbereiche, die dem jeweiligen Verwendungszweck angepaßt werden können. Der im Instrument eingebaute Spannungspfad ist normalerweise für die Nennspannungen 30, 75 und 150 Volt eingerichtet, kann jedoch auch für andere Nennspannungen bis herab zu 15 Volt ausgeführt werden. Tabelle II zeigt als Beispiel verschiedene Meßbereiche und Anwendungsmöglichkeiten eines Instrumentes für die Nennströme 0,5 und 1 Ampere und für die Nennspannungen 30, 75 und 150 Volt.

Durch Reihenschaltung des im Instrument eingebauten Spannungspfades mit getrennten phasenfehlerfreien Vorwiderständen können höhere Spannungsmeßbereiche (bis etwa 6000 Volt) geschaffen werden. Hierfür wurden vom Verfasser in besonderer Weise gewickelte Vorwiderstände ausgebildet, die sich durch ausreichende kleine Phasenabweichung ($< 0{,}3$ min bei 50 Per/sec) und einfache Herstellungsweise auszeichnen. Über diese Widerstände soll in einer späteren Arbeit ausführlicher berichtet werden.

Messung des Wirbelstrom-Phasenfehlers.

Das von dem in der festen Spule fließenden Hauptstrom erzeugte magnetische Feld, in dem sich die beiden Drehspulen bewegen, soll mit diesem Strome phasengleich sein. Werden in den der Hauptstromspule benachbarten Teilen des Meß-

Tabelle 2.

Schaltung der Spulenhälften des Strompfades	Strom J_F im Strompfad Ampere	Amperewindungen des Strompfades AW_F	Schaltung des Spannungspfades (Klemmenbezeichnung)	Gesamtwiderstand R des Spannungspfades Ohm	Spannung E am Spannungspfad Volt	Strom J_D im Spannungspfad Ampere	Amperewindungen der Drehspulen AW_D	Leistungsfaktor $\cos\varphi$	Zeigerausschlag Grad
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,05 0,1	40	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	150 75 30	0,015	je 3	1	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,05 0,1	40	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	300 150 60	0,03	je 6	0,5	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,025 0,05	20	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	300 150 60	0,03	je 6	1	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,1 0,2	80	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	150 75 30	0,015	je 3	0,5	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,5 1	400	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	15 7,5 3	0,0015	je 0,3	1	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,5 1	400	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	30 15 6	0,003	je 0,6	0,5	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,5 1	400	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	150 75 30	0,015	je 3	0,1	80°
Reihenschaltung Parallelschaltung	0,5 1	400	„0—150 V" „0— 75 V" „0— 30 V"	10000 5000 2000	300 150 60	0,03	je 6	0,05	80°

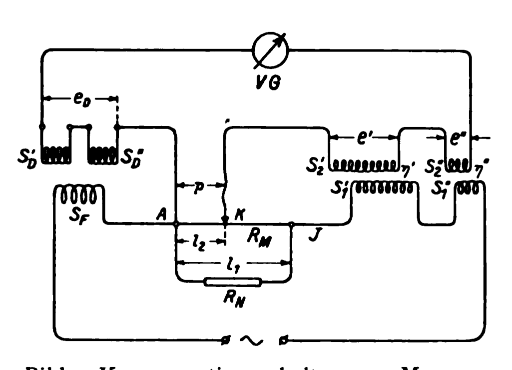


Bild 7. Kompensationsschaltung zur Messung des Wirbelstrom-Phasenfehlers.

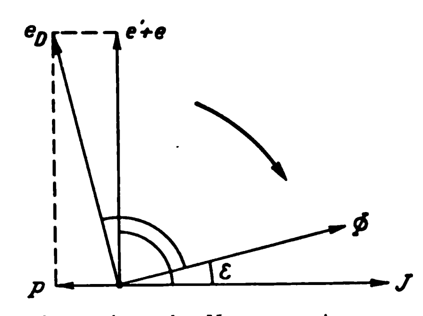


Bild 8. Phasenlage der Kompensationsspannungen zum primären Strome bei der Meßanordnung nach Bild 7.

werkes (z. B. Meßwerkgestell, Dämpferkasten, Befestigungsschrauben) oder in den Stromleitern der Hauptstromspule Wirbelströme induziert, so erzeugen diese Wirbelströme zusätzliche Felder, welche sich mit dem Hauptstromfeld zu dem resultierenden, auf die Drehspulen wirkenden Feld zusammensetzen, das mit dem Hauptstrom nicht

gleichphasig ist. Das wirksame (resultierende) Feld der Hauptstromspule ist in diesem Falle gegen den Hauptstrom um einen gewissen Phasenwinkel nach rückwärts verschoben, der bei Verwendung des Instrumentes als Leistungsmesser den durch die Wirbelströme verursachten Phasenfehler (Wirbelstrom-Phasenfehler) darstellt.

Bei der Ausbildung der beschriebenen Instrumente war es notwendig, den Wirbelstrom-Phasenfehler unter verschiedenen Versuchsbedingungen direkt zu messen. Hierzu wurde die im folgenden beschriebene Kompensationsmethode benutzt. Bild 7 zeigt die Meßanordnung.

Die primären Spulen S_1', S_1'' zweier eisenloser, phasenfehlerfrei aufgebauter Variatoren für gegenseitige Induktion sind mit der Hauptstromspule S_F des zu untersuchenden Instrumentes und mit einem Schleifdraht R_M nebst Nebenwiderstand R_N hintereinander geschaltet und an eine Wechselstromquelle angeschlossen. Die sekundären Spulen S_2', S_2'' der beiden Variatoren sind über das als Nullinstrument dienende Vibrationsgalvanometer V.G. mit den astatisch in Reihe geschalteten Drehspulen S_D', S_D'' verbunden. Die in den Variatorspulen S_2', S_2'' vom Primärstrome J induzierten EMK e′, e″ sind gegen J um 90° in der Phase verschoben. Die in den Drehspulen S_D', S_D'' vom wirksamen (resultierenden) Felde Φ induzierte EMK e_D ist gegen Φ um 90° verschoben. Bezeichnet ε den Phasenwinkel zwischen Φ und J, so ist die EMK e_D um $90 + \varepsilon$ gegen den Primärstrom J verschoben. Am Schleifdraht R_M kann zwischen dem Anfangspunkt A und dem Schleifkontakt K die mit J phasengleiche, im Kompensationskreis wirksame Zusatzspannung p abgegriffen werden.

Werden die Spulen so geschaltet, daß die einerseits in den Variatorspulen S_2', S_2'', anderseits in den Drehspulen S_D', S_D'' induzierten EMKe gegeneinander wirken, so läßt sich bei geeigneten Abmessungen dieser Spulen und der Widerstände R_M, R_N der Strom im Kompensationskreis durch wechselweises Verstellen der Variatorspulen und des Schleifkontaktes vollkommen auf Null bringen. Bild 8 zeigt das Diagramm bei abgeglichener Meßanordnung.

Es bezeichnen η' und η'' die bei Stromlosigkeit des Vibrationsgalvanometers wirksamen gegenseitigen Induktivitäten zwischen den Spulen S_1' und S_2' bzw. S_1'' und S_2''. Ferner bezeichne l_1 die Gesamtlänge des Schleifdrahtes, l_2 die bei Kompensation zwischen A und K abgegriffene Drahtlänge. Der benutzte Wechselstrom sei sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω. Bei Stromlosigkeit des Kompensationskreises gilt:

$$e' + e'' = J \cdot \omega \cdot (\eta' + \eta''), \tag{4}$$

$$p = J \cdot \frac{R_M \cdot R_N}{R_M + R_N} \cdot \frac{l_2}{l_1} = J \cdot \varrho \tag{5}$$

und

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \sphericalangle (\Phi, J) = \frac{p}{e' + e''} = \frac{\varrho}{\omega(\eta' + \eta'')}. \tag{6}$$

Da die Werte R_M, R_N und l_1 bei der Messung konstant sind, so kann ϱ an einer unter dem Meßdraht angebrachten Skale unmittelbar abgelesen werden.

Die beiden Variatoren (S_1', S_2' dient zur Grobeinstellung und S_1'', S_2'' zur Feineinstellung) müssen phasenfehlerfrei aufgebaut (Wicklung aus parallel geschalteten isolierten dünnen Drähten) und geeicht sein, um die bei Kompensation jeweilig eingestellten gegenseitigen Induktivitäten η', η'' ablesen zu können. Der zur Feineinstellung dienende Variator S_1'', S_2'' erleichtert die Einstellung der Kompensationsspannungen auf Amplitudengleichheit. Diese Einstellung ist bei Anwendung eines einzigen Variators infolge der erforderlichen hohen Empfindlichkeit der Meßanordnung mit Schwierigkeiten verbunden.

Die Empfindlichkeit der Meßanordnung muß so hoch gewählt werden, daß eine Phasenabweichung der beiden Kompensationsspannungen $(e' + e'')$ und e_D von etwa 0,1 min noch deutlich zu erkennen ist. Bei der vom Verfasser benutzten Anordnung war:

$$J = 5 \text{ Ampere}; \quad \omega = 314; \quad \eta' \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ Henry}; \quad \eta'' \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ Henry};$$

$$R_N = 1 \cdot 10^{-3} \text{ bzw. } 1 \cdot 10^{-4} \text{ Ohm}; \quad R_M = 0{,}2 \text{ Ohm}; \quad l_1 = 200 \text{ mm}.$$

Die Kompensationsspannungen $(e' + e'')$ und e_D betragen also etwa 1,6 Volt.

Um an den Drehspulen entsprechend hohe Spannungen zu erhalten, wurden die normalen Drehspulen bei diesen Messungen durch solche mit höherer Windungszahl (je 400 Windungen, 0,1 mm ∅ Kupfer statt je 200 Windungen, 0,1 mm ∅ Aluminium) ersetzt (Ohmscher Widerstand jeder Spule etwa 88 Ohm). Die Drehspulen wurden so eingestellt, daß ihre Windungsebene mit der der festen Spulen einen Winkel von ungefähr 45^0 bildete. Das Vibrationsgalvanometer[1] hatte einen Ohmschen Widerstand von 74 Ohm und zeigte bei einem Strome (Frequenz 50) von $8 \cdot 10^{-8}$ Ampere (bei 1 m Skalenabstand) 1 mm Bildverbreiterung. Der für die Empfindlichkeit der Meßanordnung maßgebende gesamte Wechselstromwiderstand des Kompensationskreises betrug etwa 380 Ohm.

Sind die Kompensationsspannungen $(e' + e'')$ und e_D der Größe nach einander gleich, aber z. B. um 0,1 min gegeneinander phasenverschoben, so wirkt im Kompensationskreis die Spannung $(e' + e'') \cdot \operatorname{tg} 0{,}1'$, also bei $J = 5$ Ampere, $\omega = 314$, $\eta' + \eta'' = 1 \cdot 10^{-3}$ Henry eine Spannung von $1{,}57 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5} = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$ Volt und ein Strom von $\frac{4{,}6 \cdot 10^{-5}}{380} = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ampere, der am Galvanometer eine noch deutlich erkennbare Bildverbreiterung von 1,5 mm hervorruft.

Nach dieser Methode wurde der dem Wirbelstrom-Phasenfehler entsprechende Phasenwinkel $\varepsilon = \sphericalangle (\Phi, J)$ unter verschiedenen Versuchsbedingungen gemessen. Durch systematische Versuche wurde die günstigste Anordnung des Meßwerkgestelles ausfindig gemacht. Es zeigte sich, daß der Wirbelstrom-Phasenfehler durch Anwendung der erwähnten Maßnahmen (Herstellung des Meßwerkgestelles aus Widerstandsmetall, Vermeidung von Metallteilen in der Nähe der Hauptstromspule, Trennung der einzelnen Bestandteile des Meßwerkgestelles durch isolierende Zwischenstücke) auf einen verschwindend kleinen Wert ($\varepsilon < 0{,}1$ min bei 50 Per/sec) herabgedrückt ist.

Messung der Phasenabweichung des Spannungspfades.

Zur Messung der Phasenabweichung des Spannungspfades wurde die vom Verfasser in einer früheren Arbeit[2] behandelte Wechselstrombrücke benutzt. Der Spannungspfad (Bild 6) eines Instrumentes für die Nennspannungen 30, 75 und 150 Volt wurde in einen Zweig der Brücke geschaltet und die Phasenabweichung $\alpha = \sphericalangle (E, J_D)$ bei der Frequenz 50 gemessen für den Fall, daß der Überbrückungskondensator C nicht vorhanden ist. Dann wurde der Überbrückungskondensator (C = 0,0036 Mikrofarad) angelegt und die Messung wiederholt. In Tabelle III sind die Meßergebnisse zusammengestellt.

Der Unterschied zwischen den berechneten und gemessenen Werten beträgt etwa 0,1 min. Er rührt davon her, daß die Phasenabweichung des Vorwiderstandes R_V, die bei der Berechnung von α gleich Null gesetzt ist, etwa 0,1 min (kapazitiv) beträgt. Durch entsprechende Änderung der Kapazität C kann man α auf Null bringen.

[1] Es wurde ein Vibrationsgalvanometer mit elektromagnetischer Abstimmung nach Schering und Schmidt (Zeitschr. f. Instrumentenkde. **38**, 1918, S. 1 und ETZ 1918, S. 410) verwendet.

[2] Geyger, Arch. f. Elektrot. **17**, 1926, S. 201.



Tabelle III.

Schaltung des Spannungspfades (Klemmenbezeichnung)	Gesamtwiderstand R des Spannungspfades Ohm	Phasenabweichung $\alpha = \sphericalangle(E, J_D)$ in min. ohne Kondensator		Phasenabweichung $\alpha = \sphericalangle(E, J_D)$ in min. mit Kondensator	
		berechnet	gemessen	berechnet	gemessen
„0— 30 V"	2000	$1{,}9_4$ (induktiv)	$1{,}8_4$ (induktiv)	0	$0{,}1_0$ (kapazitiv)
„0— 75 V"	5000	$0{,}7_8$ (induktiv)	$0{,}6_7$ (induktiv)	0	$0{,}1_1$ (kapazitiv)
„0—150 V"	10 000	$0{,}3_9$ (induktiv)	$0{,}3_0$ (induktiv)	0	$0{,}0_9$ (kapazitiv)

Gesamtphasenfehler des Instrumentes.

Da sowohl der Wirbelstrom-Phasenfehler, als auch die Phasenabweichung des Spannungspfades den Wert 0,1 min nicht überschreitet, so darf der Gesamtphasenfehler des Instrumentes (bei Frequenz 50) zu etwa 0,1 min angenommen werden. Dies entspricht beispielsweise, wenn der in der Hauptstromspule fließende 10 fache Nennstrom gegen die am Spannungspfad wirksame Nennspannung um 90^0 phasenverschoben ist, bei einer praktisch linearen 150 teiligen Skale (Endausschlag bei $\cos\varphi = 0{,}1$) einem Zeigerausschlag von etwa $^1/_{20}$ Skalenteil.

Einfluß der gegenseitigen Induktivität zwischen der Hauptstromspule und den Drehspulen.

Wenn, wie es im allgemeinen der Fall ist, die Windungsebene der Drehspulen zur Windungsebene der Hauptstromspule nicht senkrecht steht, so wird vom Felde der Hauptstromspule in den Drehspulen eine EMK und somit ein die Drehspulen durchfließender Strom erzeugt, welcher mit dem Hauptstromfeld ein zusätzliches Drehmoment hervorruft. Dieses Drehmoment, das die Drehspulen senkrecht zur Hauptstromspule zu stellen sucht, verursacht einen Anzeigefehler, der „Wechselinduktionsfehler" genannt wird. Im folgenden bedeuten:

D das dem Wechselinduktionsfehler entsprechende Drehmoment,
J den Strom in der Hauptstromspule,
ω die Kreisfrequenz,
η die gegenseitige Induktivität der Hauptstromspule auf die Drehspulen,
$e = J \cdot \omega \cdot \eta$ die in den Drehspulen induzierte gesamte EMK,
i den induzierten, im Drehspulkreis fließenden Strom,
L die gesamte Induktivität des Drehspulkreises,
γ den Phasenwinkel zwischen e und i.

Bekanntlich ist

$$D = \text{const} \cdot J \cdot i \cdot \cos \sphericalangle(J, i) = \text{const} \cdot J \cdot i \cdot \cos(90 + \gamma). \qquad (7a)$$

Bei der Kleinheit von γ kann man unter Weglassung des Vorzeichens schreiben

$$\cos(90 + \gamma) = \sin\gamma = \text{tg}\,\gamma \qquad (8a)$$

und

$$D = \text{const} \cdot J \cdot i \cdot \text{tg}\,\gamma. \qquad (7b)$$

Da nun der gesamte Ohmsche Widerstand und der gesamte Wechselstromwiderstand des Drehspulkreises praktisch gleich dem Ohmschen Widerstand des Spannungspfades (R) zu setzen sind, so gilt (vgl. Bild 6):

$$i = \frac{J \cdot \omega \cdot \eta}{R}, \qquad (9)$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} \sphericalangle (e, i) = \omega \cdot \frac{L - R_C^2 \cdot C}{R} \tag{8b}$$

und

$$D = \text{const} \cdot \frac{J^2 \cdot \omega^2 \cdot \eta}{R^2} \cdot (L - R_C^2 \cdot C) \tag{7c}$$

Nun ist nach obigen Ausführungen

$$R_C^2 \cdot C = L_D. \tag{10}$$

Folglich wird

$$D = \text{const} \cdot \frac{J^2 \cdot \omega^2 \cdot \eta}{R^2} \cdot (L - L_D). \tag{7d}$$

Der Kondensator C (Bild 6) ermöglicht also auch, den Wechselinduktionsfehler auf ein Minimum herabzudrücken, indem die der Drehspuleninduktivität L_D entsprechende Komponente des Wechselinduktionsfehlers auf Null gebracht wird. Für den Fall, daß die gesamte Induktivität des Drehspulkreises praktisch gleich der Induktivität der Drehspulen ist ($L = L_D$), ist der Strom i mit der EMK e phasengleich, somit also gegen Feld Φ und Strom J der Hauptstromspule um 90^0 verschoben. Infolgedessen kann ein zusätzliches Drehmoment nicht auftreten ($D = 0$), d. h. der Wechselinduktionsfehler ist dann gleich Null.

Diesbezügliche Untersuchungen haben ergeben, daß die in den praktisch vorkommenden Fällen für die verschiedenen Spannungsmeßbereiche auftretenden Wechselinduktionsfehler bei technischen Frequenzen verschwindend klein sind. Erst bei höheren Frequenzen (etwa 500 bis 1000 Per/sec) können unter Umständen Anzeigefehler von etwa 0,1 bis 0,5% des Skalenendwertes auftreten.

Einfluß der Temperatur.

Die Einwirkungen von Temperaturänderungen auf die Anzeige des Instrumentes sind — abgesehen von den normalerweise nicht auftretenden Einflüssen besonderer Art (z. B. Verlagerung von Instrumentteilen infolge übermäßiger Temperatursteigerungen) — folgende:

1. Entsprechend der mit steigender Temperatur erfolgenden Abnahme des Elastizitätsmoduls der als Material für das Aufhängeband verwendeten Bronzelegierung nimmt die Richtkraft des Aufhängebandes ab. Das Instrument zeigt infolgedessen, wenn das elektrodynamische Drehmoment konstant ist, bei erhöhter Temperatur zu viel.

2. Entsprechend der mit steigender Temperatur auftretenden Widerstandszunahme der Drehspulen, welche aus Aluminiumdraht gewickelt sind, nimmt der Drehspulstrom und somit das elektrodynamische Drehmoment ab. Das Instrument zeigt infolgedessen, wenn das Gegendrehmoment konstant ist, bei erhöhter Temperatur zu wenig.

3. Das zum Aufbau der Vorwiderstände verwendete Widerstandsmaterial (Manganindraht) hat einen verschwindend kleinen positiven, eventuell auch negativen Temperaturkoeffizienten, der bei Änderungen der Raumtemperatur (um etwa 10 bis 20^0 C) keine beachtenswerte Änderung des Drehspulstromes hervorruft. Erst bei höheren Drahtübertemperaturen (etwa 60 bis 70^0 C), wie sie unter Umständen infolge der Eigenerwärmung des Vorwiderstandes bei höherem Leistungsverbrauch in demselben auftreten können, machen sich geringe Widerstandsänderungen (von etwa $^1/_2$ bis 1 Promille) bemerkbar.

Die Temperatur des Aufhängebandes und der Drehspulen ist durch die jeweilige Temperatur des Meßwerkraumes bestimmt. Diese ist von der Raumtemperatur und von der Eigenerwärmung der Spulen und des Vorwiderstandes abhängig. Aufhängeband und Drehspulen haben also praktisch gleiche Temperatur. Vermindern sich Gegendrehmoment und elektrodynamisches Drehmoment (Richtkraft



des Aufhängebandes und Drehspulstrom) prozentual um den gleichen Betrag, so heben sich die durch die Änderung der Richtkraft und des Drehspulstromes verursachten Anzeigefehler gegenseitig auf, und es wird die Anzeige von der Temperatur unabhängig. Zwecks Ausschaltung der genannten Temperatureinflüsse wird man also nach Möglichkeit den Temperaturkoeffizienten des Spannungspfades so wählen, daß sich bei einer gewissen Temperaturänderung Richtkraft und Drehspulstrom prozentual um den gleichen Betrag vermindern bzw. vergrößern. Diese Methode des Ausgleichs der Temperatureinflüsse ist altbekannt und wird allgemein bei elektrischen Meßgeräten, insbesondere auch bei elektrodynamischen Leistungsmessern angewandt[1].

Der Betrag, um den sich das Drehmoment des Aufhängebandes bei einer gewissen Temperatursteigerung vermindert, ist von der Zusammensetzung des Bandmaterials abhängig und muß experimentell bestimmt werden. Durch Versuche (Ablesung des Zeigerausschlagwinkels bei konstanten Spulenströmen J, J_D und verschiedenen Temperaturen) wurde festgestellt, daß die Richtkraft des verwendeten Aufhängebandes sich bei 1° C Temperaturerhöhung um etwa 0,01 % vermindert. Die einer gewissen Temperaturänderung entsprechende Änderung des Drehspulstromes ergibt sich aus dem Gesamttemperaturkoeffizienten des Spannungspfades.

Bezeichnet R_D den Gesamtwiderstand der aus Aluminiumdraht gewickelten Drehspulen nebst Goldbandzuleitungen, welcher sich mit steigender Temperatur für je 1° C um 0,4 % vergrößert, R_V den damit in Reihe geschalteten temperaturunabhängigen Manganinwiderstand (Bild 6), so ergibt sich für je 1° Temperatursteigerung eine Vergrößerung des Spannungspfadwiderstandes $R = R_D + R_V$ um $0{,}4 \cdot \frac{R_D}{R_D + R_V}$ % und eine dementsprechende Verminderung des Drehspulstromes. Da die Größe von R_V und somit bei gleicher Temperaturänderung die Stärke der Drehspulstromänderung vom jeweilig gewählten Spannungsmeßbereich abhängig ist, so ist ein vollkommener Ausgleich der Temperatureinflüsse nur für einen bestimmten Vorwiderstand R_V vorhanden. Bei anderen Werten von R_V tritt ein gewisser Anzeigefehler α_T auf, der jedoch, wie Tabelle IV zeigt, sehr kleine Werte annimmt: α_T beträgt im ungünstigsten Falle ($R_V = 1820$ Ohm) für 10° C Temperaturerhöhung $-\,^1/_4$ %.

Tabelle IV.

Schaltung des Spannungspfades (Klemmenbezeichnung)	R_D Ohm	R_V Ohm	R Ohm	Verminderung des Drehspulstromes bei 10° C Temperaturerhöhung	Verminderung der Bandrichtkraft bei 10° C Temperaturerhöhung	Anzeigefehler α_T bei 10° C Temperaturerhöhung (Temperatureinfluß)
„0— 30 V"	180	1 820	2 000	0,36%	0,1%	— 0,26%
„0— 75 V"	180	4 820	5 000	0,14%	0,1%	— 0,04%
„0—150 V"	180	9 820	10 000	0,07%	0,1%	+ 0,03%
„0—300 V"	180	19 820	20 000	0,04%	0,1%	+ 0,06%
„0—600 V"	180	39 820	40 000	0,02%	0,1%	+ 0,08%

Was die Eigenerwärmung des in dem Gehäuse eingebauten Vorwiderstandes anbelangt, so zeigen die Angaben der Tabelle V, daß durch dieselbe keine wesentliche Steigerung der Meßwerkraumtemperatur auftritt. Die Drahtübertemperatur des Vorwiderstandes R_V (gemessener Höchstwert für Dauerbelastung: 20° C) verursacht keine feststellbare Widerstandsänderung von R_V.

[1] Vgl. z. B. Gruhn, Elektrotechnische Meßinstrumente. Verlag Springer, Berlin, 1920 S. 40/41. — Keinath, a. a. O., S. 56. — Kühnel, Elektrotechnik und Maschinenbau **45**, 1927, S. 245.

Tabelle V.

Schaltung des Spannungspfades (Klemmenbezeichnnng)	Leistungsverbrauch im Spannungspfad bei J_D = 0,015 Amp. Watt	Drahtübertemperatur des Vorwiderstandes bei J_D = 0,015 Amp. Grad C	Leistungsverbrauch im Spannungspfad bei J_D = 0,03 Amp. Watt	Drahtübertemperatur des Vorwiderstandes bei J_D = 0,03 Amp. Grad C
„0— 30 V"	0,45	etwa 5°	1,8	etwa 20°
„0— 75 V"	1,13	etwa 5°	4,5	etwa 20°
„0—150 V"	2,25	etwa 5°	9	etwa 20°

Schlußbemerkung.

Die Bestimmungen der vom VDE aufgestellten „Regeln für Meßgeräte"[1] (bezüglich Gehäuse, Skale und Skalenaufschriften, Isolationsverhältnisse, Kriechstrecken usw.) sind bei den beschriebenen Instrumenten ausnahmslos erfüllt. Aus den obigen Angaben der einzelnen Fehlergrößen geht hervor, daß die Instrumente den Bedingungen für „Feinmeßgeräte 1. Klasse" (Klasse E) entsprechen.

[1] Vgl. ETZ 1922, S. 290, 858 und 518.

Anfangsspannungen für Mehrfachelektroden in Luft.

Von

Willy Sahland, Wittenberg.

Einleitung.

Während in der Literatur die Anfangsspannungen zwischen Einzelelektroden der verschiedensten Formen hinreichend und häufig behandelt worden sind, fehlt es bisher an Messungen bei Mehrfachelektroden.

In der Technik sind verschiedene Ausführungsformen zur Anwendung gekommen, wie beispielsweise die Schutzfunkenstrecken an drahtlosen Empfangsapparaten und der Glimmschutz nach G. J. Meyer zum Abflachen der steilen Stirn von Wanderwellen in Hochspannungsnetzen.

Die vorliegende Arbeit wird sich mit der Untersuchung derartiger Elektrodenformen befassen[1].

Versuchsanordnung.

a) Gleichstrom.

Die für die Messungen bei Gleichstrom benutzte Versuchsanordnung ist in Skizze 1 schematisch dargestellt: Von den Polen einer Influenzmaschine J. M. führen die Leitungen Z_1 und Z_2 über die Funkenstrecke F zum Hochspannungsvoltmeter HV. Als Spannungsquelle diente eine Starkstrom-Influenzmaschine mit einer festen und zwei rotierenden Hartgummischeiben. Die Spannungssteigerung geschah meist durch Hand.

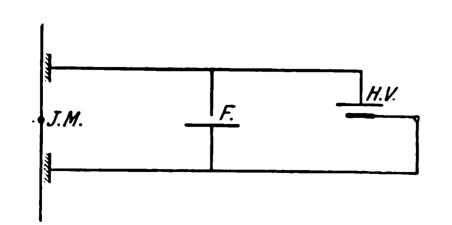
Die etwa 6 m lange Leitung hatte annähernd gleiche Zweige und bestand aus 6 mm starken, blanken Messingdrähten. Die Drähte lagen teils auf Hochspannungsisolatoren, teils hingen sie in Seidenfäden mit Zwischenstücken aus Glas. Vom Tisch und sonstigen leitenden Gegenständen waren sie wenigstens 200 mm entfernt.

[1] Die Tabellen 1 bis 3, 5 bis 8, 10, 11, 14a bis 15b, 17 bis 18a, 20, 22 bis 35 sind hier nur in den entsprechenden Kurven graphisch dargestellt. Im Original „Dissertation, Jena 1927" sind die Tabellen zu finden.

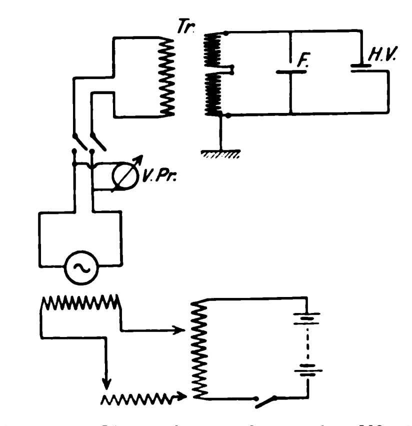
b) Wechselstrom.

Die Skizze 2 zeigt die Versuchsanordnung für Wechselstrom bei 50 Perioden. Der von einem Gleichstrommotor (6,5 kW, 440 Volt) angetriebene Generator wurde mit 240 Volt erregt und speiste einen Transformator, an dessen Sekundärklemmen die oben beschriebene Anordnung angeschlossen war.

Für Messungen mit 500 Perioden wurde eine 500-Perioden-Maschine benutzt und der Transformator durch einen hierfür geeigneten ersetzt. Um möglichst konstante Spannungen zu erhalten, wurde als Spannungsquelle für die Erregung der Maschine nicht das Netz, sondern eine Akkumulatorenbatterie von 240 V benutzt.



Skizze 1. Versuchsanordnung für Gleichspannung.



Skizze 2. Versuchsanordnung für Wechselspannung.

Funkenstrecken.

Die Funkenstrecken F wurden in zwei Ausführungen verwendet: Die erste Funkenstrecke, Bild 1, war vorhanden und hatte schon bei früheren Messungen Verwendung gefunden. Die Isolation gegen Erde bestand aus 100 mm langen und

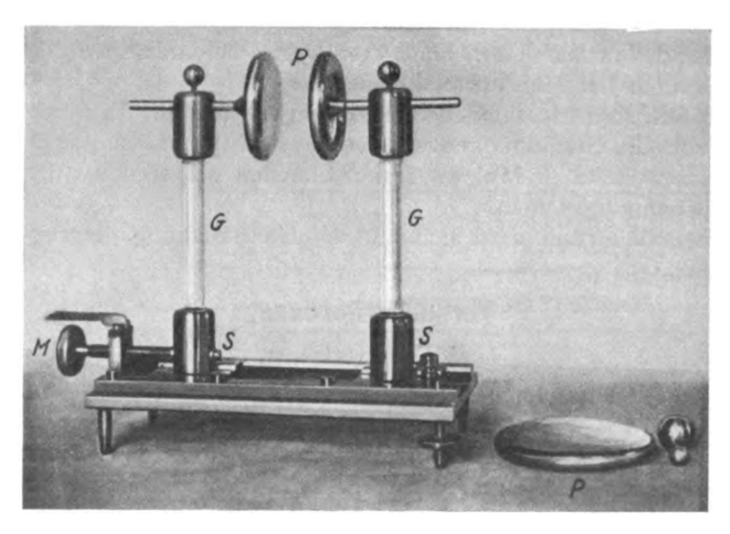


Bild 1. Funkenstrecke 1.

15 mm starken Glasstäben auf beweglichen Schlitten montiert. Eine Millimeterschraube ermöglichte eine sehr genaue Einstellung des Elektrodenabstandes.

Die Funkenstrecke 2, Bild 2, wurde für die Hauptuntersuchungen neu angefertigt. Die Isolation gegen Erde bestand aus 120 mm langen und 22 mm starken Hartgummisäulen. Hier wurde nur ein Elektrodenträger auf einem beweglichen Schlitten montiert, wobei ebenfalls eine Mikrometerschraube zur Feineinstellung des

Elektrodenabstandes diente. Der gegenüberstehende Träger für die Elektroden bei symmetrischer Anordnung war fest und besaß eine Vorrichtung, den Elektrodenhalter in der Vertikalen und Horizontalen genau auszurichten. Der Träger der Zinkscheibe wurde mittels eines Schlittens in den Leitschienen des oben erwähnten beweglichen Schlittens befestigt.

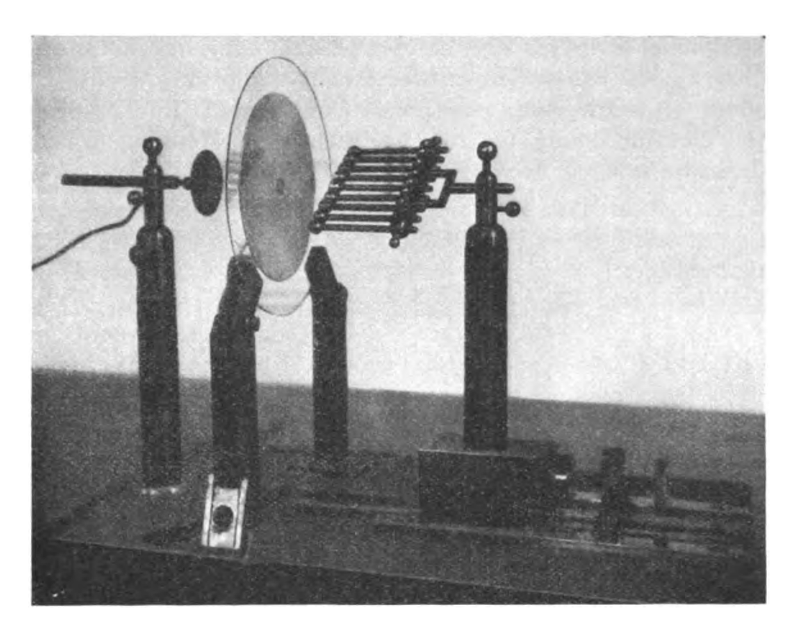


Bild 2. Funkenstrecke 2, geerdete Zinkscheibe mit Glasplatte—Elektrodenkamm.

Elektrodenhalter.

Für Einfachelektroden befanden sich auf den Hartgummisäulen Elektrodenhalter in der bekannten Form. Für die Hauptversuche wurden Teilhalter angefertigt, die es ermöglichen, bis zu 17 Elektroden gabelförmig in je 10 mm Abstand — bezogen auf Mitte—Mitte — anzuordnen, siehe Bild 2. Es standen Teilhalter für je 3, 5, 7, 13 und 17 Elektroden zur Verfügung. Endlich wurde ein Elektrodenhalter angefertigt für 35 Drähte von 4 mm ∅, so daß sich die Drähte unmittelbar berührten.

Elektrodenform und Elektrodenmaterial.

Für die Kontrollversuche wurden Messingscheiben benutzt von 62, 87 und 90 mm ∅.

Die Hauptuntersuchungen bezogen sich auf Messingkugeln von 8 und 10 mm ∅, Messing- und Kohlenstäbchen von 4 mm ∅ sowie auf Kupferdrähte von 0,9 mm ∅. Die Enden der Drahtelektroden waren gut abgerundet.

Weiterhin wurden Messingzylinder von 4 und 10 mm ∅ und Kohlenzylinder von 10 mm ∅ durchgemessen; dann wurden 13 cm lange Messingzylinder von 10 mm ∅ in Teile von je 10 mm zerlegt und ähnlich den Mehrfachelektroden in den vorhandenen Haltern angeordnet. Endlich wurden Teilzylinder von 6 mm Länge aus Messing angefertigt, die ebenfalls mittels der Halter gabelförmig befestigt wurden.

Für die Messungen gegen geerdete Zinkscheibe wurden Stopf- und Nähnadeln aus Stahl benutzt.



Spannungsmessungen.

a) Gleichstrom.

Zur Spannungsmessung bei Gleichstrom diente ein elektrostatisches Voltmeter. Es wurde zunächst ein Voltmeter versucht, bei dem sich ein bifilar aufgehängter, isolierter Messinghebel zwischen zwei Messingplatten um seine Achse drehte. Infolge des elektrischen Feldes wurde jedoch der Hebel nicht nur in eine Drehbewegung versetzt, sondern er wurde von einer Platte angezogen. Infolge dieser doppelten Bewegung war die Anordnung für die beabsichtigten Messungen nicht brauchbar und mußte deshalb verlassen werden.

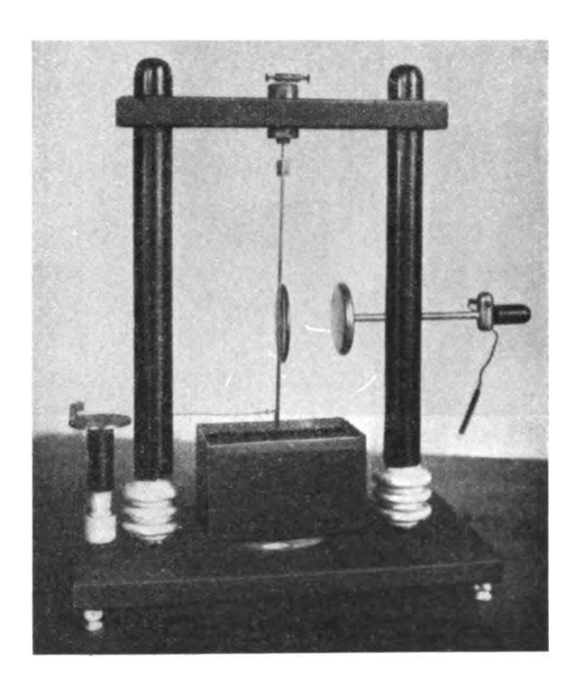


Bild 3. Hochspannungsvoltmeter.

Diese Beobachtung veranlaßte aber den Umbau des Voltmeters derart, daß nur die Anziehung nutzbar gemacht wurde.

Das Hochspannungsvoltmeter bekam nun eine verstellbare, feste Platte, der eine bewegliche Platte gegenüberhing. Die Aufhängung bestand aus einem starren Messingdraht, drehbar um eine horizontale Achse parallel der festen Platte. An ihrem unteren Ende besaß die bewegliche Platte eine Öldämpfung (Bild 3).

Legte man eine Spannung an, so bewegte sich die hängende Platte auf die feste zu entsprechend der vorhandenen Potentialdifferenz und der Entfernung beider Platten.

Um diese an sich kleine Bewegung deutlich zu machen, wurde sie durch einen Seidenfaden auf eine kleine vertikale Achse übertragen. Diese Achse spielte in einer Feder und trug einen kleinen Spiegel, der einen Lichtstrahl auf eine Skala reflektierte. Der Übertragungsfaden wurde derart befestigt, daß der Entspannungspunkt noch unterhalb des Nullpunktes des Voltmeters lag. Die verschiedenen Stellungen der festen Platte gaben die einzelnen Spannungsbereiche, die je nach der Größe der bei den Messungen vorkommenden Spannungen eingestellt werden konnten.



b) Wechselstrom.

Für Wechselstrom wurden die Spannungen auf der Primärseite des Transformators gemessen und mittels des Übersetzungsverhältnisses berechnet.

Als Voltmeter wurde benutzt:

1. Ein Weston-Instrument mit 150 Skalenteilen für 1—150 und 1—300 Volt.
2. Ein Hitzdrahtinstrument von Hartmann und Braun mit 150 Skalenteilen für 1—20, 1—100 und 1—200 Volt.

Weitere Meßinstrumente.

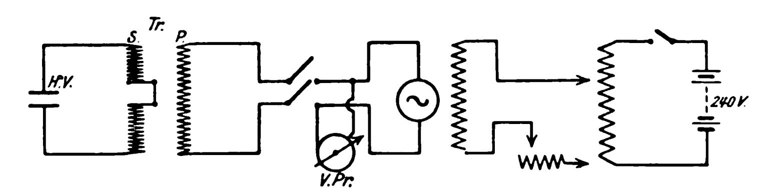
Zur Versuchsanordnung gehörte noch eine Quecksilberdampflampe, Uviollampe der Jenaer Glaswerke „Schott & Gen.", um den bekannten Verzögerungseffekt[1] aufzuheben. Die Lampe war von der Funkenstrecke etwa 1 m entfert und belichtete Anode und Kathode. Ein Variieren der Entfernung zwischen etwa 0,50 m und 2 m zeigte keinen Unterschied in den Meßergebnissen.

Eine weitere Annäherung erwärmte die Funkenstrecke (vgl. Klemm[2]) und wurde deshalb bei den eigentlichen Messungen vermieden.

Die Temperatur wurde mittels Thermometer bestimmt. Der Luftdruck wurde an einem Präzisions-Quecksilberbarometer mit Nonius abgelesen. Die relative Luftfeuchtigkeit wurde mittels Haarhygrometer gemessen.

Eichung des Voltmeters.

Geeicht wurde das Hochspannungsvoltmeter mit Hilfe des erwähnten Transformators (220/2 × 37500 Volt und 5 KVA Leistung). Die Mitte des Sekundärkreises war an 2 herausgeführten Klemmen kurzgeschlossen. Der Generator war ein Einankerumformer, dessen Gleichstromseite unbenutzt blieb. Der Antrieb erfolgte durch einen Gleichstrommotor von 6,5 kW bei 440 Volt. Erregt wurde der Generator



Skizze 3. Schaltung zur Eichung des Hochspannungsvoltmeters.

mit 240 Volt, wobei die Spannungssteigerung durch Variieren des Erregerstromes erfolgte. Der Transformator war nachgeprüft und zeigte keinerlei Abweichungen von seinem Übersetzungsverhältnisse. Die zum Ablesen der Primärspannung und zum Nachprüfen des Übersetzungsverhältnisses gebrauchten Instrumente waren mit dem Kompensationsapparat nachgeeicht.

Die Zuleitungen zum Voltmeter wurden an die Hochspannungsklemmen des Transformators gelegt. Das Schaltungsschema zeigt Skizze 3.

Da die Kontrollversuche bei symmetrischer Anordnung, die Hauptversuche bei Erdung einer Seite durchgeführt wurden, wurde beim Transformator die Mitte und 1 Pol geerdet. Vor und nach jeder Meßreihe wurde das Voltmeter für den betreffenden Bereich nochmals nachgeeicht.

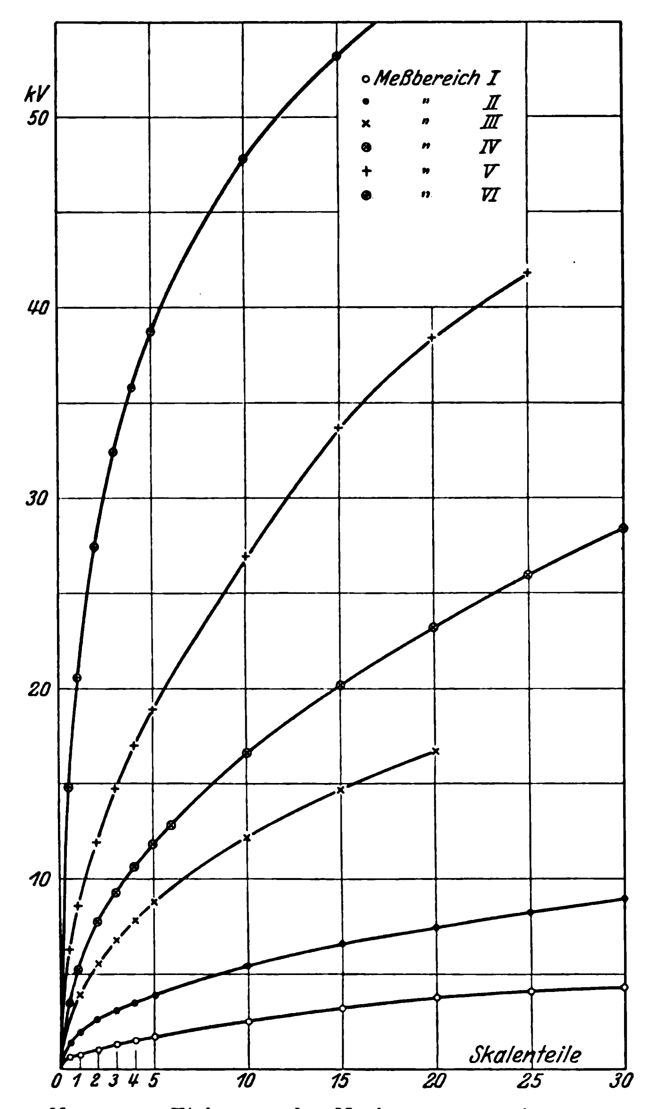
[1] A. Toepler, Ann. d. Phys. 134, 194, 1868. — E. Warburg, Wied. Ann. 62, 385, 1897. — E. Warburg und J. R. Gorton, Ann. d. Phys. 18, 128, 1905. — S. D. Morgan, Ph. Mag. 41, 462, 1921.

[2] A. Klemm, Arch. f. Elektrot. Bd. XII, S. 588, 1923.

Die Messungen erstrecken sich bis zu 50000 Volt. Den Spannungsänderungen folgte das Voltmeter augenblicklich. Die Nullpunktslage blieb konstant. Die Werte für einige Plattenabstände gibt Tabelle 1 (Kurven 1).

Die den Bereichen entsprechenden Plattenabstände waren für

1. Meßbereich 0,3 bis 5 kV: 5 mm,
2. Meßbereich 0,9 bis 10,2 kV: 10 mm,
3. Meßbereich 2 bis 17 kV: 20 mm,
4. Meßbereich 5 bis 34 kV: 30 mm,
5. Meßbereich 6 bis 40 kV: 60 mm,
6. Meßbereich 10 bis 50 kV: 100 mm.

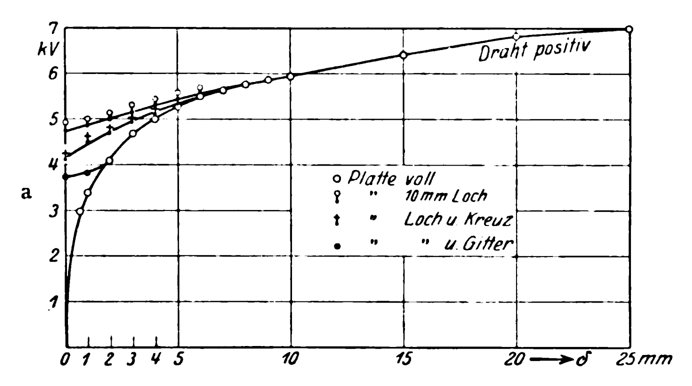


Kurven 1. Eichwerte des Hochspannungsvoltmeters.

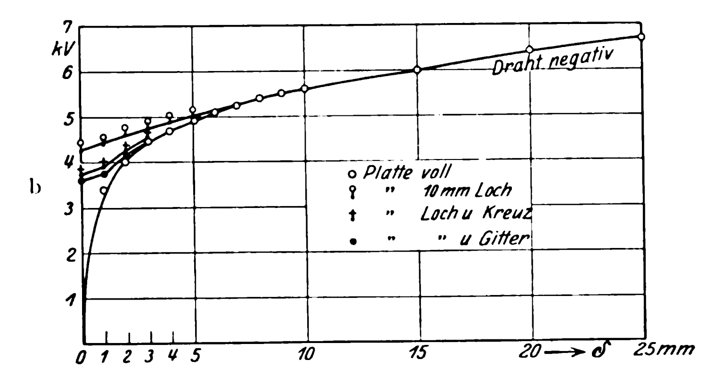
Für bestimmte Spannungen wurde ein möglichst niedriger Meßbereich gewählt, damit die Ausschläge möglichst groß und die Ablesungsgenauigkeit erhöht wurden.

Um die Anfangsspannungen besonders für sehr feine Spitzen gegen Platte objektiv messen zu können, wurde eine Einrichtung getroffen, die das Koronavolt-

meter von J. B. Whitehead und J. Isshiki[1] veranlaßte: Die Zinkplatte bekam ein 10 mm zentrisches Loch, dahinter stand eine kleine isolierte Messingplatte, die mit einem empfindlichen Exnerschen Elektrometer verbunden war. Sobald zwischen Spitze und Zinkplatte die Entladung beginnt, gelangen einzelne Träger durch das Loch auf die isolierte Platte und bringen das Elektrometer zum Ausschlag. Die Methode war so empfindlich, daß kurz vor der Glimmentladung, spätestens aber zugleich mit dieser der Ausschlag erfolgte. Durch ein Drahtkreuz bzw. ein Drahtgitter an der hinteren Plattenseite erwies sich die Anordnung auch für kleinere Schlagweiten als sehr brauchbar.



Anfangsspannungen für Draht (r = 0,3 mm) — geerdete Zinkscheibe.



Anfangsspannungen für Draht (r = 0,3 mm) gegen geerdete Zinkscheibe.

Kurven 2. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.

Tabelle 2 zeigt die Anfangsspannungen für 0,03 cm Draht gegen Zinkscheibe und zwar 1. Zinkscheibe mit 10-mm-Loch, 2. mit Loch und Drahtkreuz und 3. mit Loch und Drahtgitter.

Im 1. Falle machte sich der Einfluß des Loches in der Zinkscheibe bis 6 mm Schlagweite bemerkbar. Auch das Drahtkreuz zeigte noch bis zu 4 mm Schlagweite Abweichungen von der Anfangsspannung.

Erst das Drahtgitter ergab von 2 mm Schlagweite an übereinstimmende Werte mit den Messungen an einer Platte ohne Loch (Kurve 2).

Diese Anordnung wurde dazu benutzt, die nach bekannten Verfahren gefundenen Werte nachzuprüfen.

[1] J. B. Whitehead u. J. Isshiki, The Corona Voltmeter. J. o. t. Am. Inst. o. E. Eng. 39, 441, 1920.

Vorversuche:

Bestimmungen der Durchbruchsfeldstärke einer Funkenstrecke bestehend aus 2 Plattenelektroden in Luft.

Nachdem das Hochspannungsvoltmeter mit Wechselstrom geeicht war, kam es darauf an, seine Brauchbarkeit für Gleichspannung nachzuweisen. Dazu wurden die durch zahlreiche Messungen bekannten Überschlagswerte von Plattenelektroden[1] nachgeprüft.

Es wurden je 2 solcher Elektroden aus Messing von 62,87 und 90 mm in der beschriebenen Anordnung durchgemessen. Hierbei wurde auf genaue Einstellung der Schlagweite δ sowie Parallelismus der Platten geachtet, so daß der Funke stets in der Mitte überschlug. Die Veränderung der Schlagweite geschah mittels Mikrometerschraube und wurde durch Lehren nachgeprüft. Die Elektroden wurden auf Hochglanz gehalten und dauernd bestrahlt; die Spannungssteigerung erfolgte bis zum Überschlag langsam und gleichmäßig.

Zur Berechnung der Überschlagswerte wurde die Temperatur t, der Luftdruck b und die relative Luftfeuchtigkeit gemessen und das Korrektionsglied

$$\alpha = \frac{760\ (273 + t)}{b\ 293}$$

berücksichtigt, wodurch für Tabellen und Kurven die gleiche Beziehung auf 760 mm Hg und 20° C gewonnen wurde.

Tabelle 3 gibt die Überschlagswerte für Schlagweiten von 1 bis 10 mm. Höhere Überschlagswerte wurden nicht gemessen, da bei den eigentlichen Versuchen höhere Spannungswerte nicht in Frage kommen. Empirisch ergab sich die Formel $U = 29{,}18 \cdot \delta + 2{,}24$ (Townsend $U = 30 \cdot \delta + 1{,}35$). Die Mittelwertskurve für die Durchbruchsfeldstärke der Luft zwischen 2 ebenen Elektroden bezieht sich nach W. O. Schumann[1] auf kV/cm.

So wurden die Werte für 90 mm ∅ auf kV/cm umgerechnet nach der Formel

$$E = \frac{U}{\delta},$$

wo U die Anfangsspannung in kV,
δ die Schlagweite in cm und
E die Durchbruchsfeldstärke der Luft in kV/cm bedeutet.

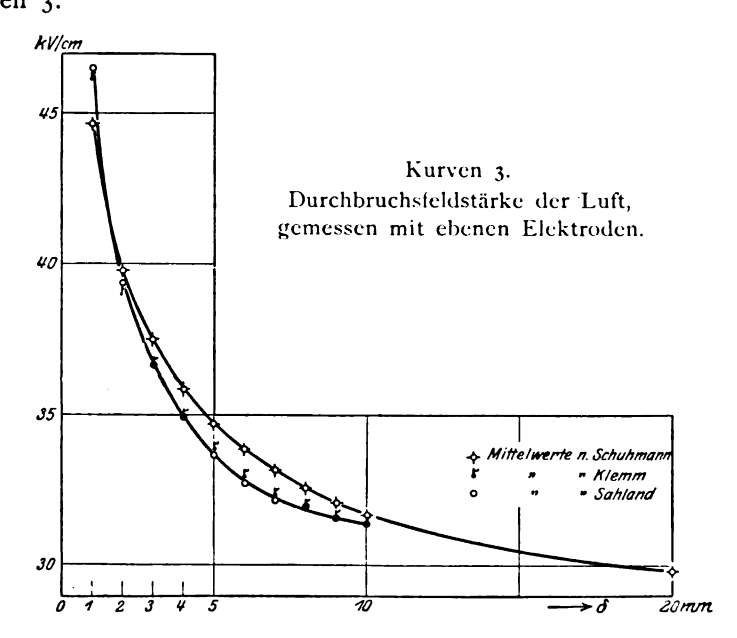
Tabelle 4.
Durchbruchsfeldstärke der Luft in kV/cm für 2 Platten. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Luftfeuchtigkeit etwa 40%.

δ mm	Mittelw. Schumann	Mittelw. Klemm	Werte für 90 mm ∅	b. Abweichung in % von Schumann	Klemm
1	44,7	46,3	46,5	+ 4	+ 0,43
2	39,8	39,25	39,4	— 1	+ 0,4
3	37,5	36,6	36,7	— 2,2	+ 0,3
4	35,9	34,92	34,91	— 3	— 0,03
5	34,7	33,85	33,7	— 3	— 0,4
6	33,9	33,00	32,85	— 3	— 0,4
7	33,2	32,45	32,3	— 3	— 0,4
8	32,6	32,00	32,0	— 2	0,0
9	32,1	31,7	31,65	— 1,4	- 0,16
10	31,7	31,4	31,4	— 1	0,0

[1] W. O. Schumann, Arch. f. Elektrot. Bd. XI, 1, 1922. — W. Thomson, Ph. Mag. 20, 316, 1860,

Die Tabelle 4 gibt die berechneten Werte im Vergleich zu den von W. O. Schumann aufgestellten und von A. Klemm[1] experimentell bestimmten Werten. Zugleich enthält Tabelle 4 die Abweichung in %.

Es ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung mit den Klemmschen Werten. Siehe Kurven 3.



Kurven 3.
Durchbruchsfeldstärke der Luft, gemessen mit ebenen Elektroden.

Messungen an verschiedenen Elektrodenformen.

Die Vorversuche hatten Werte ergeben, die mit den theoretischen Berechnungen und früheren Messungen bis auf Bruchteile von Prozenten übereinstimmten. Infolgedessen konnte jetzt mit der beschriebenen Versuchsanordnung an die Hauptversuche herangegangen werden. Als Funkenstrecke wurde die in Bild 2 dargestellte benutzt, wobei die oben angeführten Nebenumstände beobachtet wurden. Es handelt sich dabei um Messungen bei Gleich- und Wechselspannungen (50 ∼). Die Abweichungen waren im allgemeinen derart gering, daß sie nicht besonders erwähnt zu werden brauchen. Nur bei Anwesenheit eines Dielektrikums zwischen den Elektroden traten, wie weiter unten nachgewiesen werden wird, unter Umständen große Abweichungen bei beiden Spannungsarten ein. Nach Russel[2] ist die Feldstärke E zwischen zwei gleichen Kugeln, von denen eine geerdet ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{U}{\delta} f,$$

wo U die Anfangsspannung in kV,
δ die Schlagweite in cm und
f einen Faktor bedeutet, der von dem Verhältnisse Schlagweite zu Kugelradius abhängt.

Der Faktor f wurde den Tabellen von W. O. Schumann[3] entnommen. Zugleich wurde für kleine Abstände die Formel von Kirchhoff-Schuster benutzt:

$$\mathfrak{f} = 1 + \frac{1}{3}\frac{\delta}{r} + \frac{1}{45}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2 + \frac{73}{53760}\left(\frac{\delta}{r}\right)^3.$$

[1] W. O. Schumann, 1923, S. 25—27.
[2] A. Russel, Ph. Mag., 6, 237, 1906.
[3] W. O. Schumann, 1923, S. 29, 30.

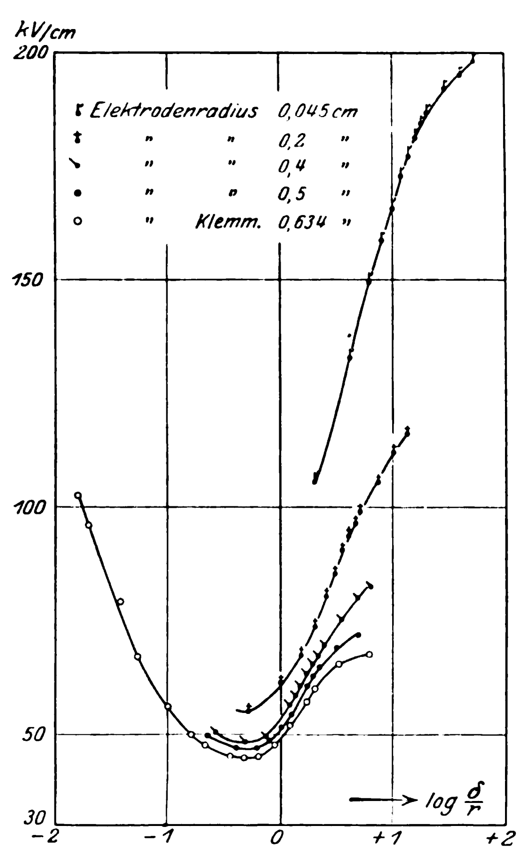
Für große Schlagweiten $\frac{\delta}{r} > 1$ wurde die von **Schumann** angegebene Formel herangezogen:

$$\mathfrak{f} = \frac{\delta}{r} + \frac{1}{\frac{\delta}{r} + 1} + \frac{1}{\left(\frac{\delta}{r} + 1\right)\left(\frac{\delta}{r} + 2\right)^3}.$$

Der letzte Faktor wurde in unserem Falle so klein, daß er nicht in Betracht gezogen zu werden brauchte. Für den Fall Kugel—Ebene gelten die gleichen Formeln, nur wird statt $\frac{\delta}{r}$ in diesem Falle $\frac{2\delta}{r}$ gesetzt, wo δ die Schlagweite Kugel—Platte bedeutet.

Bestimmung der Durchbruchsfeldstärke einer Funkenstrecke aus 2 gleichen Elektroden, von denen eine geerdet ist.

Zunächst wurden mit der in Bild 2 dargestellten Funkenstrecke die Anfangsspannungen zwischen zwei gleichen Elektroden bei unsymmetrischer Spannungsverteilung gemessen, d. h. bei Erdung eines Poles. Die beobachteten Anfangsspannungen für Messingkugeln von 8 und 10 mm ∅, sowie für Messingdrähte von 4 mm ∅ und Kupferdrähte von 0,9 mm ∅ sind in Tabelle 5 zusammengestellt und beziehen sich auf eine Temperatur von 20° C und 760 mm Hg bei etwa 40% relativer Luftfeuchtigkeit.



Kurven 4. Durchbruchsfeldstärke einer Funkenstrecke aus 2 gleichen Elektroden, von denen eine geerdet ist, abhängig vom Verhältnis Schlagweite zu Radius $\left(\log \frac{\delta}{r}\right)$.

Während es üblich ist, für symmetrische Spannungsverteilung die Durchbruchsfeldstärke graphisch in Abhängigkeit von $\frac{\delta}{r}$ darzustellen, wurde sie bei unsymmetrischer Verteilung wegen der besseren Übersicht in Abhängigkeit von $\log \frac{\delta}{r}$ aufgetragen.

Die Kurven 4 zeigen die Durchbruchsfeldstärke in kV/cm. Zum Vergleich wurden die von A. **Klemm** gefundenen Werte für $r = 0{,}634$ cm mit eingezeichnet. Tabelle 6 enthält die dargestellten Werte. Aus den Kurven für die Elektrodenradien von 0,5, 0,4 und 0,2 cm ersieht man, daß die Durchbruchsfeldstärke mit wachsender Schlagweite zunächst abnimmt, darauf ein Minimum durchläuft, um dann wieder anzusteigen. Bei dem Radius 0,045 cm befindet man sich für die gemessenen Schlagweiten schon hinter dem Minimum auf dem ansteigenden Ast. Die von W. O. **Schumann** angegebenen Werte von EMin. liegen etwas höher als die von mir festgestellten (vgl. die Angabe von A. **Klemm** über E min.). Die Werte können



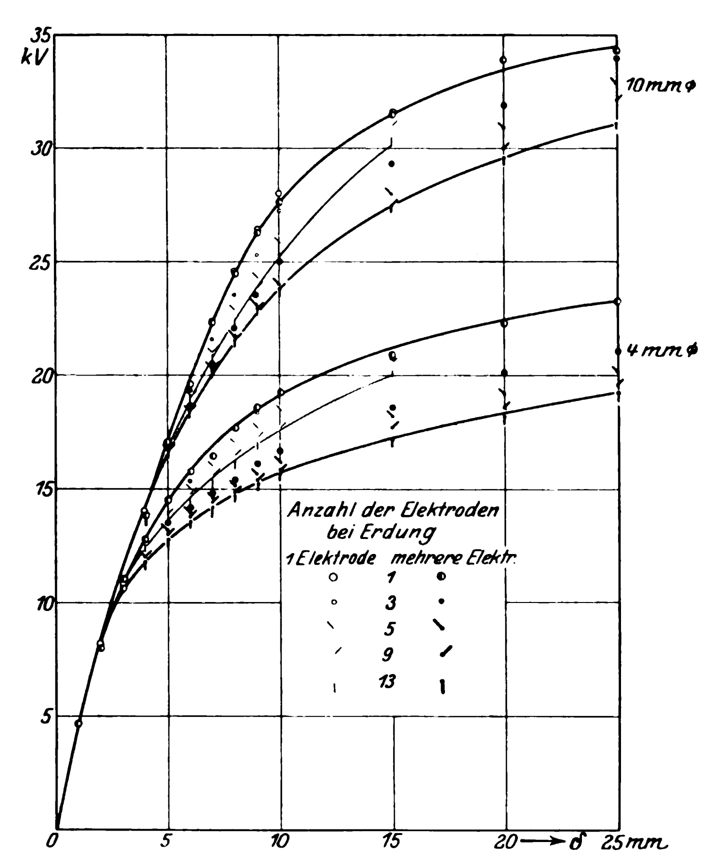
als hinreichend genau bezeichnet werden und bringen eine Fortsetzung der Klemmschen Werte für kleinere Elektrodenradien.

Hauptuntersuchungen.

A. Anfangsspannungen bei symmetrischer Elektrodenanordnung.

1. Anfangsspannungen zwischen einer und mehreren Elektroden.

Die folgenden Messungen wurden derart ausgeführt, daß nochmals die Anordnung 1 Elektrode—1 Elektrode durchgemessen und dann die Elektrodenzahl einseitig vermehrt wurde. Es handelte sich um Kugeln von 10 mm ∅ und Drähte von 4 mm ∅.



Kurven 5. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen zwischen einer und mehreren Elektroden, eine Seite geerdet.

1. Zunächst wurden mittels gabelförmiger Elektrodenhalter der geerdeten Einzelelektrode jedesmal 2 Elektroden hinzugefügt, so daß also der einen nicht geerdeten Elektrode für die verschiedenen Meßreihen 3, 5, 9 und 13 geerdete Elektroden gegenüberstehen. Die Elektrodenmitten sind 10 mm voneinander entfernt, d. h. Kugeln von 10 mm ∅ berühren sich und die übrigen Elektroden zeigen einen Luftzwischenraum abhängig von ihrem Durchmesser.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 7 zusammengestellt. Für 1 Kugel gegen 1 Kugel erhält man die bekannten Werte; sobald man aber die Kugelzahl der geerdeten Seite vergrößert, fällt die Anfangsspannung mit Zunahme der Anzahl, und

zwar tritt diese Erscheinung erst bei größeren Schlagweiten ($\delta > 0{,}5$ cm) deutlich auf.

Aus der Tabelle ergibt sich weiter, daß ein unterschiedliches Verhalten zwischen Kugeln von 10 mm ∅ und Drahtelektroden von 4 mm ∅ in bezug auf die Abnahme der Anfangsspannung besteht, und zwar nach der Richtung, daß bei den letzteren diese Erscheinung schon früher auftrat, d. h. bei kleineren Schlagweiten ($\delta = 0{,}3$ cm gegen $\delta = 0{,}5$ cm).

2. Darauf wurde das Erdungsbereich vertauscht, so daß also die alleinstehende Elektrode mit der Erde verbunden war. Auch hier wurden die Messungen derart vorgenommen, daß je 2 Elektroden hinzugefügt wurden. Bis zu einer bestimmten Schlagweite nahm auch hier mit Zunahme der Zahl die Anfangsspannung ab, doch nicht in dem gleichen Maße wie im 1. Falle (Tabelle 8). Außerdem trat hier die Eigentümlichkeit auf, daß bei Schlagweiten über 15 mm die Werte große Schwankungen aufwiesen. Während der erste Überschlag bei bedeutend höherer Spannung erfolgte als bei 1 Elektrode—1 Elektrode, setzte der 2. Überschlag schon bei niedriger Spannung ein.

Ein unterschiedliches Verhalten der Höhe der Anfangsspannung besteht darin, daß bei Erdung der zunehmenden Elektroden die Spannung niedriger ist als bei Erdung der Einzelelektrode, und zwar macht sich dieser Unterschied bei Kugelelektroden bei 6 mm Schlagweite bemerkbar, während er bei Drahtelektroden schon bei 4 mm auftrat (Kurven 5).

II. Anfangsspannungen für je 3 Elektroden auf jeder Seite bei Änderung ihres gegenseitigen Abstandes.

Für die weiteren Untersuchungen wurden jetzt auf jeder Seite je 3 Elektroden benutzt, deren Abstand in den Haltern variiert werden konnte. Zunächst haben die Elektrodenmitten 10 mm Abstand, so daß Kugeln von 10 mm ∅ einander berühren, die 4 mm Drähte einen Abstand, d. h. Luftzwischenraum, von 6 mm bekommen. Die Messungen wurden durchgeführt bei Abständen von 10, 30 und 60 mm, ihre Ergebnisse sind in Tabelle 9 zusammengestellt. Man sieht, daß mit größer werdendem Luftzwischenraum die Anfangsspannung sinkt, doch werden die Werte 1 Elektrode — 1 Elektrode nicht erreicht; übrigens macht sich eine Spannungsherabsetzung erst bei größeren Schlagweiten bemerkbar.

Tabelle 9.

Anfangsspannungen zwischen 3 Elektroden bei verschiedenen Abständen untereinander, eine Seite geerdet. 20° C. 760 mm Hg. 40%.

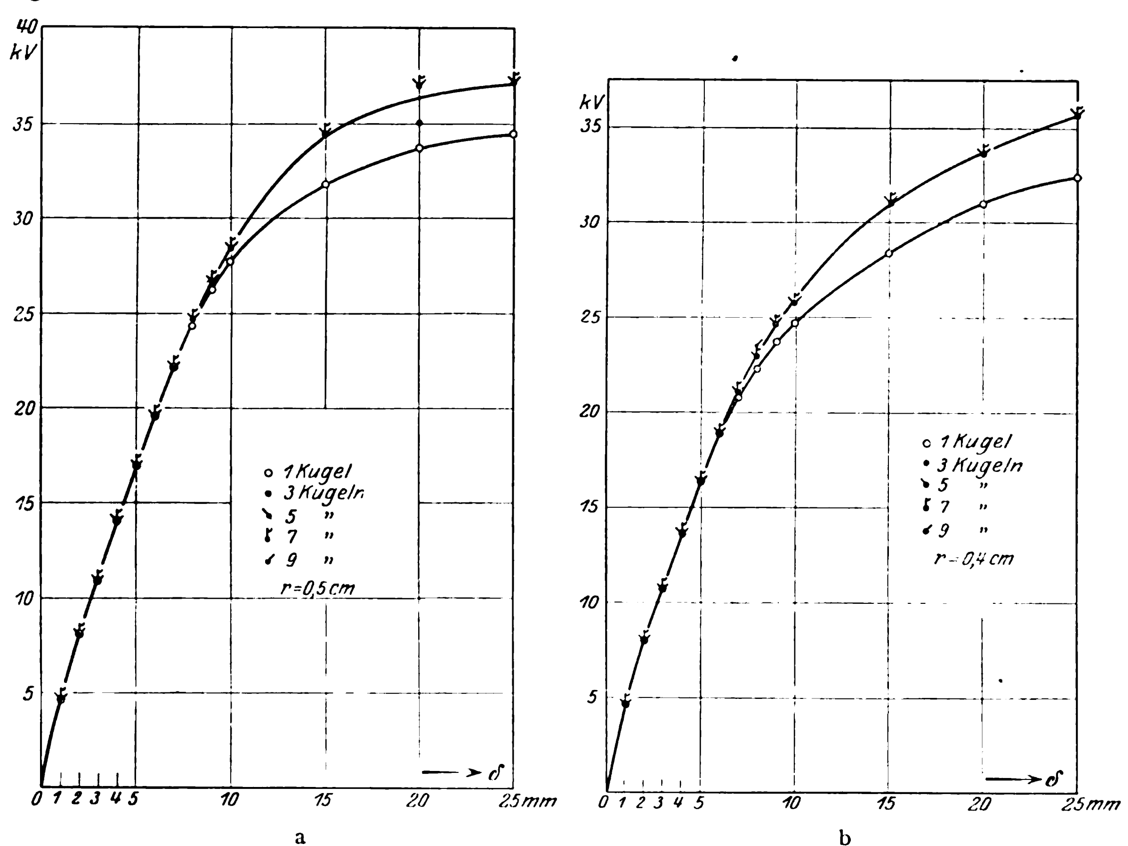
δ	Kugeln 10 mm ∅			Drähte 4 mm ∅		
	Abstände der Elektrodenmitten in cm					
cm	1	3	6	1	3	6
0,1	4,7	4,7	4,7	4,65	4,65	4,65
0,2	8,1	8	8	8,1	8	8
0,3	11	11	11	10,6	10,6	10,6
0,4	14	14	14	13	13	13
0,5	17	17	17	14,6	14,6	14,3
0,6	19,6	19,6	19,6	16,3	16,3	16,3
0,7	22,3	22,3	22,3	17,5	17,5	17,4
0,8	24,7	24,7	24,6	18,4	18,4	18
0,9	26,5	26,5	26,3	19,2	19,1	18,5
1	28,5	28	27,7	19,8	19,8	19,3
1,5	34,4	34,2	32	22,5	22,3	21

Vergleicht man die Anfangsspannungen von mehreren Elektroden mit denen 1 Elektrode — 1 Elektrode, so ergibt sich, daß durch die Vermehrung ihrer Zahl eine Vergrößerung der Spannungswerte stattfindet, die aber deutlich erst bei größeren Schlagweiten in die Erscheinung tritt.

III. Anfangsspannungen für Elektroden, deren Zahl bei konstant gehaltenem gegenseitigen Abstand gleichmäßig geändert wird bei Erdung einer Seite.

Nachdem in den oben beschriebenen Untersuchungen festgestellt worden war, daß die Anfangsspannung mit einseitiger Zunahme der Elektrodenzahl sank und mit größerem Luftzwischenraum ebenfalls herabging, wurde zu folgender Anordnung übergegangen: Den Einzelelektroden wurden je 2 gleiche Elektroden hinzugefügt, so daß sich Meßreihen ergaben von 3 : 3, 5 : 5, 7 : 7 und 9 : 9 Elektroden, wobei die Elektrodenmitten auf jeder Seite 10 mm voneinander entfernt waren. Es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß die Elektroden genau ausgerichtet waren und ihren Gegenelektroden genau gegenüber standen.

Benutzt wurden Kugeln von 10 mm und 8 mm ∅ sowie Drähte von 4 und 0,9 mm ∅, wobei eine Seite geerdet war. Dabei war es, wie durch Messungen festgestellt werden konnte, gleichgültig, welche der beiden Seiten geerdet war im Gegensatz zu den oben gefundenen Ergebnissen. Dort war die Anordnung eine andere insofern, als einmal die Einzelelektrode dann die zunehmenden Elektroden geerdet wurden.



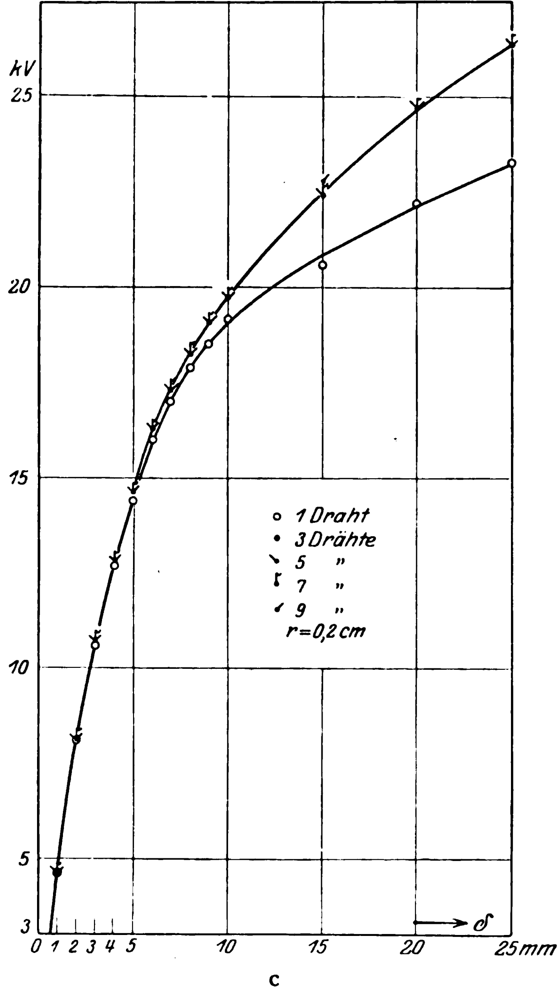
Kurven 6a u. 6b. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannugen für Kugelelektroden, eine Seite geerdet. Kammartig-Parallel.

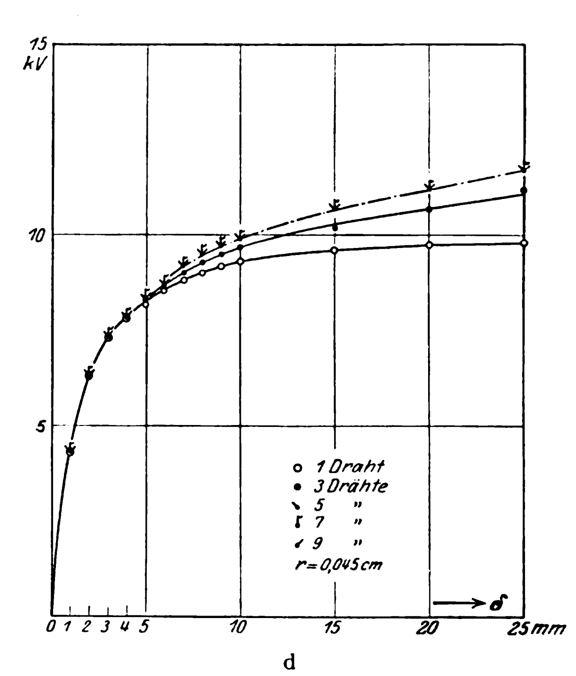
a) Elektrodenanordnung: kammartig-parallel.

Zunächst standen sich die gabelförmig angeordneten Elektroden parallel gegenüber. Um einen etwaigen Einfluß der Elektrodenhalter festzustellen, wurden Anfangsspannungen mit 1 Elektrode—1 Elektrode durchgemessen, indem Halter für 3, 5 und 9 Elektroden benutzt wurden. Irgendeine Abweichung wurde selbst bei den Haltern für 9 Elektroden nicht gefunden. Trotzdem wurden die Untersuchungen so durchgeführt, daß höchstens die beiden äußeren Löcher der Halter frei blieben. Die Resultate für 1—9 Elektroden sind in der folgenden Tabelle 10 zusammengestellt.

Für 1 Elektrode gegen eine zweite geerdete traten die vorher gefundenen Werte wieder auf und zugleich die Eigentümlichkeit, daß die Anfangsspannung für 1–3 mm Schlagweite bis zu bestimmten Elektrodenradien fast gleich bleibt. Erst bei dem Draht von 0,9 mm ∅ wurden niedere Spannungen beobachtet.

Sobald man jetzt je 2 neue Elektroden hinzufügte, so daß sich also je 3 Elek-





Kurven 6c u. 6d. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Drahtelektroden, eine Seite geerdet. Kammartig-Parallel.

troden gegenüber standen, blieben die Verhältnisse bis zu 4 mm Schlagweite ungeändert, d. h. die Anfangsspannung war konstant. Bei Schlagweiten über 4 mm trat eine Änderung ein. Man beobachtete eine geringe Zunahme der Anfangsspannungen, die mit wachsender Schlagweite größer wurden. Diese Steigerung zeigte sich bei allen Elektroden. Fügte man weitere Elektroden auf beiden Seiten hinzu bis zu je 9, so trat bei konstant gehaltener Schlagweite keine weitere Zunahme der Anfangsspannung auf. Erst bei größeren Schlagweiten ($\delta = 1{,}5$ cm)

zeigte sich eine weitere Erhöhung der Spannung, die aber erst bei einer großen Elektrodenzahl und bei kleinen Elektrodenradien deutlich in die Erscheinung trat (Kurven 6).

b) Elektrodenanordnung: kammartig-senkrecht.

Während oben die Elektrodenkämme parallel angeordnet waren, wurden sie jetzt um 90° verdreht. Es wurden wiederum je 2 Elektroden hinzugefügt. Die Einstellung geschah zunächst parallel, dann wurden die Kämme um 90° gegeneinander gedreht, so daß sich die Mittelelektroden genau gegenüber standen. Auch

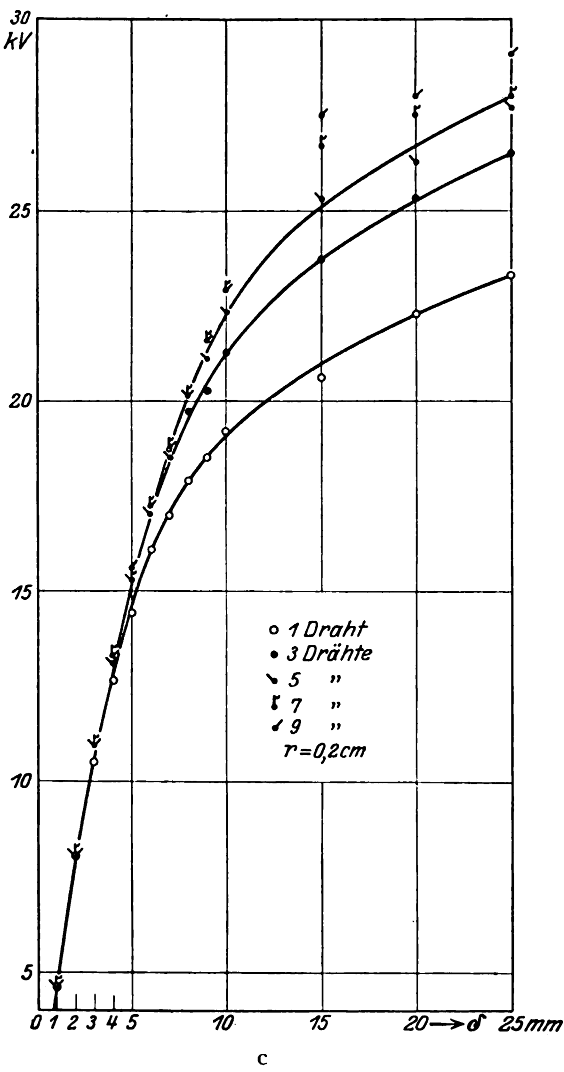
a b

Kurven 7a u. 7b. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Kugelelektroden, eine Seite geerdet. Kammartig-Senkrecht.

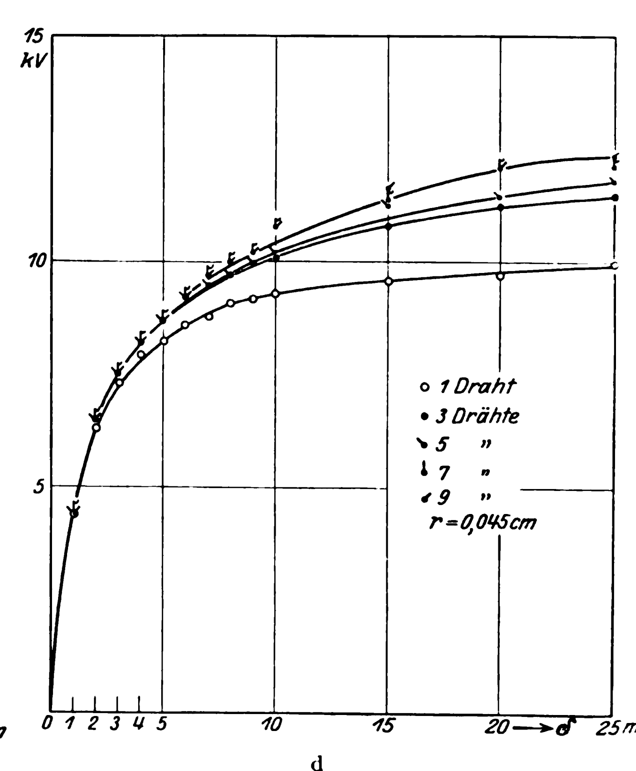
hier wurde kein Einfluß der verschieden langen Elektrodenhalter festgestellt. Durchgemessen wurden Kugel von 10 und 8 mm ∅ und Drahtelektroden von 4 und 0,9 mm ∅. Die Ergebnisse zeigt Tabelle 11 und Kurve 7 die graphische Darstellung. Die Messungen ergaben für 1 Elektrode—1 Elektrode wieder die bekannten Werte. Auch die Erhöhung der Anfangsspannung beim Übergang auf je 3 Elektroden ist vorhanden, nur ist die Zunahme hier eine größere. Während jedoch bei parallelen Kämmen mit weiterer Zunahme der Elektrodenzahl und nur bei kleinsten Elektroden und bei größeren Schlagweiten ein weiteres Anwachsen der Anfangsspannung festgestellt wurde, war das Verhalten bei senkrechter Stellung ein

anderes. Bei den Kugelelektroden von 10 mm Ø bemerkte man eine Zunahme der Anfangsspannung mit der Elektrodenzahl über je 3 schon bei 15 mm Schlagweite, bei 4 mm Kugelradius schon bei etwa 9 mm, wobei sich die Kugelzahl deutlich bemerkbar macht.

Am deutlichsten macht sich aber die Zunahme der Anfangsspannung mit der Elektrodenzahl bei kleineren Radien und bei Drähten bemerkbar. Man sieht z. B. bei 4 mm Draht, daß schon von kleinen Schlagweiten ab jede Vermehrung der Elektrodenzahl eine Spannungserhöhung nach sich zieht. Daß bei den Drähten mit kleinstem Durchmesser diese Erhöhung scheinbar erst später auftrat, lag mehr an den niedrigen, fast gleichen Spannungen; denn bei größeren Schlagweiten trat auch hier die Erhöhung deutlich zutage.



c



d

Kurven 7c u. 7d. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40 %. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Drahtelektroden, eine Seite geerdet. Kammartig-Senkrecht.

IV. Anfangsspannungen für je 9 Elektroden, eine Seite geerdet, bei Bevorzugung einzelner Elektroden.

Im Gegensatz zu der oben beschriebenen Anordnung wurden jetzt einzelne Elektroden bevorzugt. Die Messungen wurden durchgeführt für Drähte von 4 und 0,9 mm Ø bei paralleler und senkrechter Stellung der Elektrodenkämme.

1. Zunächst wurden je 9 Elektroden in kammartiger und paralleler Anordnung wie zuvor ausgerichtet, dann wurden die Kämme auf 1 mm Schlagweite eingestellt



und schließlich wurde die Mittelelektrode des ersten Kammes mit der Gegenelektrode des zweiten Kammes in Berührung gebracht. So bezogen sich die Schlagweiten auf diese bevorzugten Mittelelektroden. Die Ergebnisse teilt Tabelle 12a mit. Man erkennt, daß durch die Bevorzugung der Mittelelektroden zwar die Anfangsspannungen herabgedrückt werden, doch wurde der Wert 1 Elektrode—1 Elektrode nie erreicht, da der Einfluß der übrigen Elektroden besonders bei großen Schlagweiten deutlich hervortritt. Daß besonders die Randelektroden eine Rolle spielen, erkennt man daraus, daß bei den mit x bezeichneten Schlagweiten die Entladungen an diesen Randelektroden beginnen, obwohl die Mittelelektroden bevorzugt waren, d. h. gegenüber den übrigen Elektroden 0,5 mm hervorstanden.

Nahmen jetzt auch die Randelektroden die oben beschriebene, bevorzugte Stellung ein, so blieben bis etwa 8 mm die Verhältnisse fast gleich, erst größere Schlagweiten zeigten eine Herabsetzung der Anfangsspannung, siehe Tabelle 12b.

Tabelle 12.

Anfangsspannungen für je 9 Drähte bei Bevorzugung einzelner Elektroden.
Kammartig, parallel.
a) Mittelelektrode 1 mm vorgezogen.
b) Elektrode 1 cm von Mitte und Randelektrode 1 mm vorgezogen.
20° C. 760 mm Hg. 40%.
Uviollichtbestrahlung.

Schlagweite δ in cm	4 mm Draht		0,9 mm Draht	
	a	b	a	b
0,1	4,6	4,6	4,4	4,4
0,2	8	8	6,33	6,33
0,3	10,6	10,6	7,3	7,3
0,4	12,9	12,9	7,9	7,8
0,5	14,5	14,5	8,2	8,2
0,6	16,2[1]	16,1	8,6	8,6
0,7	17,2	17,2	8,9	8,9
0,8	18,2	18,2	9,2	9,1
0,9	19,1	18,9	9,5[1]	9,3
1	19,6	19,5	9,8	9,6
1,5	22,3	22	10,2	10
2	24	23,7	10,8	10,6
2,5	25,7	25,5	11,4	11,1

2. Für die kammartig-senkrechte Anordnung wurden je 9 Elektroden von 4 und 0,9 mm derart durchgemessen, daß die Kämme zunächst parallel ausgerichtet und auf 1 mm Schlagweite eingestellt wurden. Dann wurden 2 Mittelelektroden zur Berührung gebracht und die Kämme in senkrechte Stellung gedreht, so daß sich die Schlagweiten auf die mittleren Elektroden bezogen. Aus Tabelle 13a ersieht man, daß für kleine Schlagweiten die Werte 1 Elektrode—1 Elektrode gemessen werden, während mit wachsender Schlagweite sich die Anfangsspannung immer mehr den Werten 9—9 bei symmetrischer Anordnung nähert, der Einfluß der übrigen Elektroden wird also mit zunehmender Schlagweite bemerkbar.

Für 0,9 mm Drähte wurde weiter bei paralleler Stellung der Kämme nur die Mittelelektrode auf 1 mm Schlagweite eingestellt, und nun wurde die senkrechte Einstellung vorgenommen. Aus Tabelle 13b erkennt man, daß eine Änderung gegen a nicht gefunden wurde. Bei senkrechter Stellung der Kämme ist also nur für kleinste Schlagweiten eine Herabsetzung der Anfangsspannung festzustellen, bei

[1] Überschlag am Rand, obwohl Mitte 1 mm vor.

größeren Schlagweiten näherte man sich mehr und mehr den Werten 9—9 bei symmetrischer Anordnung.

Tabelle 13.
Anfangsspannungen für je 9 Drähte unter Bevorzugung einzelner Elektroden, kammartig, senkrecht.
a) Elektrode 1 cm von Mitte 1 mm vor.
b) Bei Parallelstellung berühren sich Elektroden, Mitte 1 mm Schlagweite.
760 mm Hg. 40%. 20° C. Uviollichtbestrahlung.

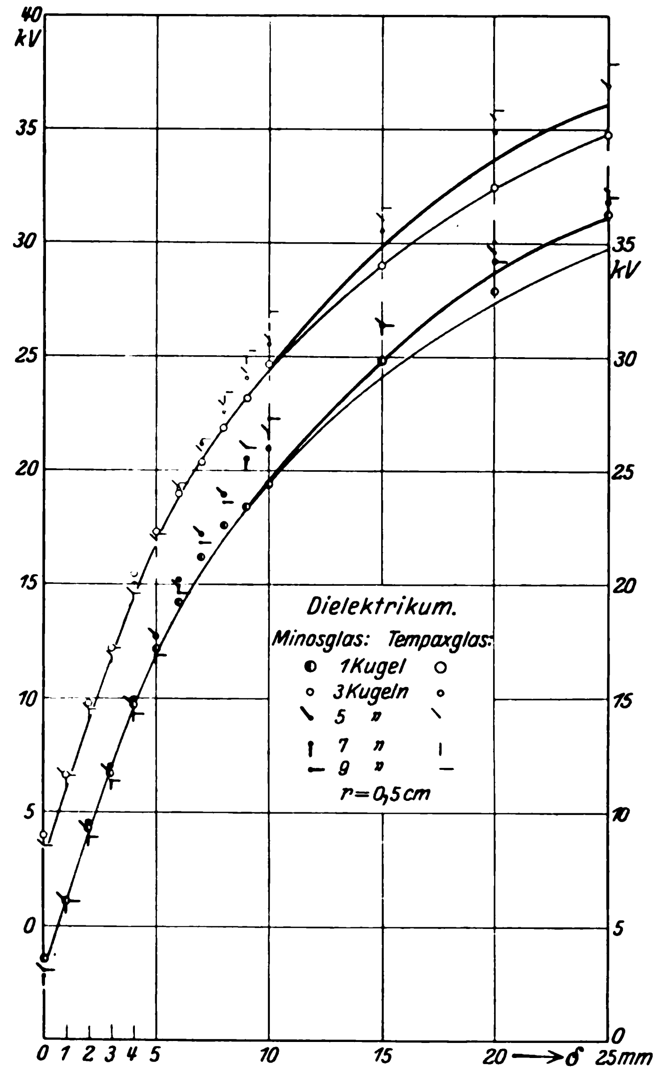
Schlagweite δ in cm	4 mm ∅	0,9 mm ∅	
	a	a	b
0,1	4,6	4,4	4,4
0,2	8	6,3	6,3
0,3	10,5	7,3	7,3
0,4	12,9	8,1	8,1
0,5	14,9	8,6	8,7
0,6	16,6	9,1	9
0,7	18,2	9,6	9,7
0,8	19,6	9,9	9,9
0,9	20,9	10,2	10,2
1	22	10,7	10,7
1,5	26,4	11,1	11,1
2	27,3	11,4	11,4
2,5	27,7	11,6	11,6

V. Anfangsspannungen für 1 bis 9 Elektroden gegen 1 bis 9 Elektroden geerdet in kammartiger Anordnung parallel und senkrecht mit einem Dielektrikum am geerdeten Elektrodenkamm.

Die weiteren Untersuchungen zeigten die gleiche Anordnung der kammartigen Elektroden, nur wurde an den geerdeten Kamm eine Glasscheibe von 1 mm Stärke und 150 mm Durchmesser gelegt. So bezogen sich die Schlagweiten durchweg auf nicht geerdeten Kamm—Glasscheibe, während Schlagweite Kamm—Kamm 1 mm größer war.

1. Zunächst wurden die Anfangsspannungen gemessen bei Parallelstellung der Elektrodenkämme a) für Tempaxglas, b) für Minosglas als Dielektrikum. Angefangen wurde wieder mit je 1 Elektrode, dann wurden auf jeder Seite je 2 hinzugefügt, bis sich je 9 Elektroden gegenüberstanden. Die in der Tabelle 14a für Tempaxglas und in Tabelle 15a für Minosglas zusammengestellten Werte sind nur als Mittelwerte einer größeren Zahl von Entladungen anzusehen, wobei die besonders hoch herausfallenden Werte nicht mit in Betracht gezogen wurden. Besonders auffallende Streuungen traten in die Erscheinung, solange beide Elektrodenkämme die Glasplatte berührten. Hier nahm die Anfangsspannung ab mit Zunahme der Elektrodenzahl. Dieses Verhalten wurde auch bei kleineren Schlagweiten beobachtet, erst Schlagweiten von etwa 5 mm zeigten gleiche Anfangsspannungen für verschiedene Elektrodenzahlen, um dann mit weiterer Zunahme der Schlagweite die vorher beobachtete Spannungszunahme beim Übergang von 1 auf 3 Elektroden aufzuweisen. Erst größere Schlagweiten zeigten eine erkennbare Zunahme der Anfangsspannung mit der größer werdenden Elektrodenzahl. Doch handelt es sich immer nur um Mittelwerte. Trotzdem ist für Tempax- und Minosglas ein unterschiedliches Verhalten insofern zu beobachten, daß die Werte für Minosglas bei 1 bzw. 3 Elektroden meist höher lagen als für Tempaxglas (Kurven 8).

Vergleicht man jetzt die vorher ohne Dielektrikum gemessenen Werte mit denen mit der eingefügten Glasscheibe, so findet man, daß die Anfangsspannungen im letzten Falle durchweg tiefer liegen. Erst Schlagweiten von etwa 20 bis 25 mm zeigen eine gewisse Übereinstimmung beider Spannungen.

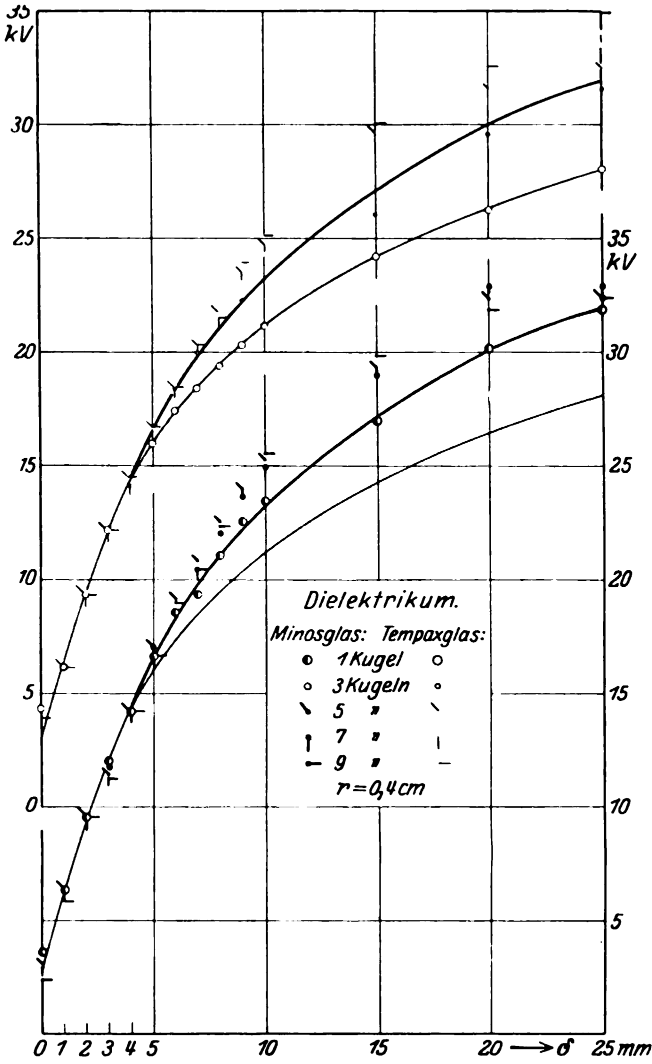


Kurven 8a. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Feuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Kugelelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Parallel.

Ein unterschiedliches Verhalten zwischen Gleich- und Wechselspannung machte sich bei diesen Messungen bemerkbar: je nach der Dauer einer Entladung wurde bei Gleichspannung die Glasplatte mehr oder weniger aufgeladen, so daß sich bei einer zweiten Messung ganz neue Verhältnisse ergeben mußten, die weiterhin noch von der Polarität der Anode bei aufeinander folgenden Messungen abhängig waren. Um diese Unregelmäßigkeiten ganz zu vermeiden, wurde die Glasplatte nach jeder Messung mit Gleichspannung völlig entladen, bevor der nächste Wert aufgenommen wurde. Unter diesen Umständen kam man zu Ergebnissen, die im Bereich der in den Tabellen aufgestellten Mittelwerte lagen.



2. Ging man jetzt zu der senkrechten Anordnung der Elektrodenkämme über, so zeigte sich auch hier beim Berühren des Dielektrikums eine Abnahme der Anfangsspannung mit Zunahme der Elektrodenzahl. Die Mittelwerte für je 1 Elektrode lagen im Bereich der für parallele Kämme. Während sich bei paralleler Anordnung die Spannungssteigerung erst bei größeren Schlagweiten mit zunehmender Elektroden-

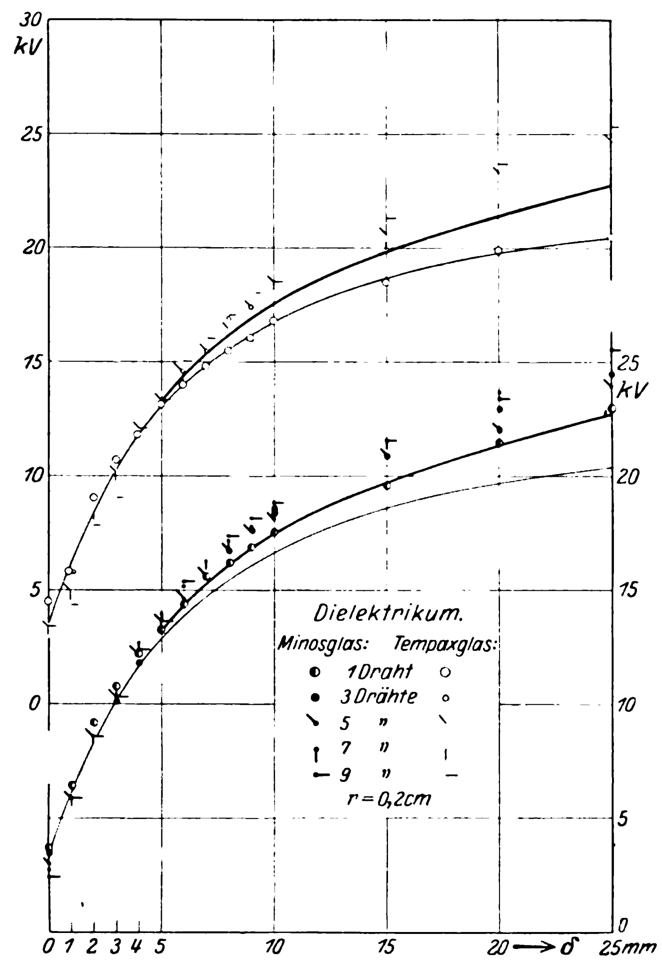


Kurven 8b. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Kugelelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Parallel.

zahl bemerkbar machte, beobachtete man diese Zunahme schon bei kleinen Schlagweiten mit dem Übergang von 1 auf 3 Elektroden besonders bei kleinen Elektroden. Ab 10 mm Schlagweite ist mit weiterer Zunahme der Elektrodenzahl eine Erhöhung der Anfangsspannung erkennbar. Der Unterschied zwischen Gleich- und Wechselspannung wurde auch hier durch Entladen der Glasplatte vermieden.

Ein Vergleich dieser Anordnung mit jener früheren ohne Dielektrikum brachte wieder eine Herabsetzung der Anfangsspannung durch das Dielektrikum. Die Werte sind für Tempaxglas in der Tabelle 14b, für Minosglas in 15b zusammengestellt und in den Kurven 9 graphisch aufgezeichnet.

Ging man über die Anfangsspannungen hinaus, so erfolgte zunächst eine sichtbare Entladung zur Glasplatte, siehe Bild 4, aber erst bedeutend höhere Spannungen wie ohne Dielektrikum lassen den Funken um die Glasplatte herum zur Gegenelektrode gelangen, siehe Bild 5. Das Dielektrikum bewirkte also eine Beschleunigung des Entladebeginnes, während erst bedeutend höhere Spannungen eine Funkenentladung um die Glasplatte herum auslösen konnten.



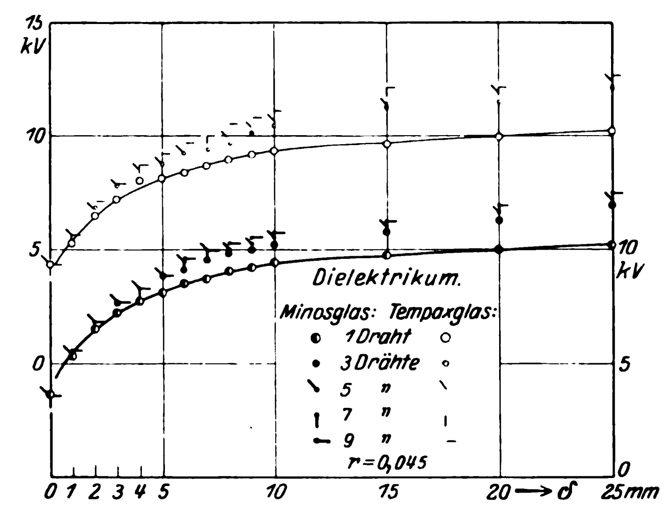
Kurven 8c. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Drahtelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Parallel.

VI. Anfangsspannungen zwischen parallelen Kämmen mit Dielektrikum in verschiedenen Abständen zum festen Kamm.

In den Versuchen berührte die Glasscheibe den festen geerdeten Kamm. Jetzt wurde das Dielektrikum in verschiedenen Entfernungen vom festen Kamm angebracht. Für je 9 Kugelelektroden von 8 mm ∅ befand sich die Glasplatte 14 mm vom festen Kamm entfernt, während sich die Schlagweiten durchweg auf beweglichen Kamm gegen die Glasplatte bezogen. Für Drähte von 0,9 mm ∅ ist der feste Kamm einmal 11 dann 4 mm entfernt. Vergleicht man die in den Tabellen 16 zusammengestellten Werte mit den entsprechenden der Tabelle 15, so erkennt man, daß eine gewisse Abhängigkeit von der Lage des Dielektrikums vorhanden ist. Aus



den Werten für 0,45 mm Radius läßt sich folgern, daß die niedrigsten Werte erreicht werden, wenn eben die Glasscheibe den geerdeten Kamm berührt.



Kurven 8d. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Drahtelektroden mit Dielektrikum am geerdeten Kamm. Kammartig-Parallel.

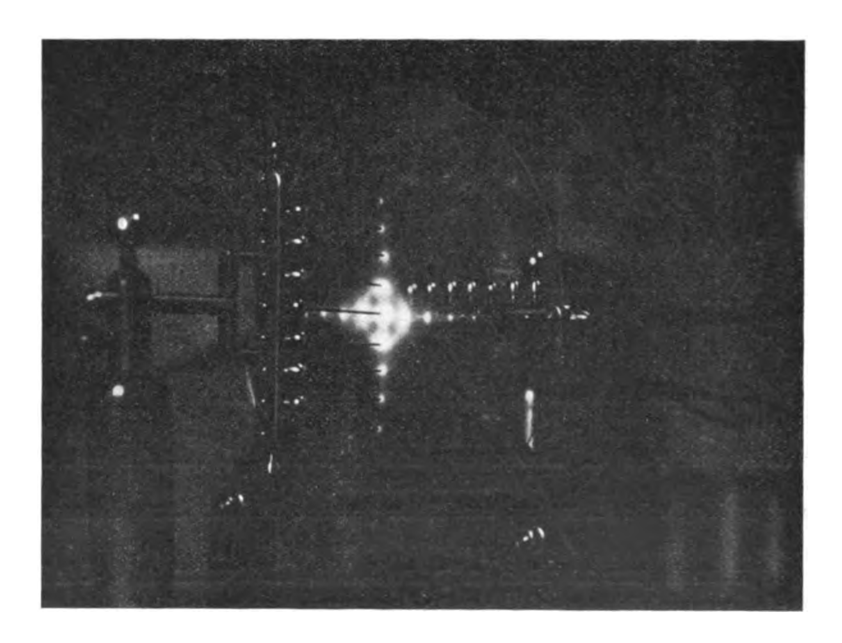


Bild 4. Sprühentladung bei senkrechten Elektrodenkämmen mit Glasplatte als Dielektrikum.

VII. Anfangsspannungen für 2 Spitzen von 0,9 mm ∅, eine Seite geerdet, bei 500 Perioden Wechselstrom.

Bisher waren die Untersuchungen für Wechselspannung mit Wechselstrom von 50 Perioden durchgeführt. Um nun das Verhalten von 500 Perioden festzustellen, wurden weiterhin Untersuchungen an Drähten von 0,9 mm ∅ angestellt. In der

Arbeit von Goebeler[1] ist gezeigt worden, daß für Entladungen zwischen feinen Spitzen die Periodenzahl und die Länge der Spitzen einen Einfluß haben.

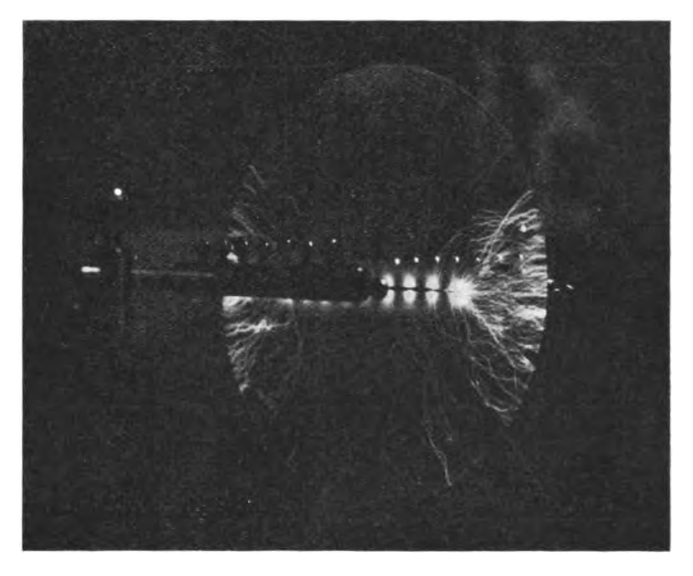


Bild 5. Funkenentladung um die Glasplatte herum bei parallelen Elektrodenkämmen.

Die Messungen wurden derart angestellt, daß einer Versuchsreihe mit 50 ~ sofort eine solche mit 500 ~ folgte, wobei ein Unterschied nicht festgestellt werden konnte, vgl. Tabelle 17.

Tabelle 16.

Anfangsspannungen für mehrere Elektroden mit Dielektrikum (Minoglas) in verschiedenen Abständen zum festen Kamm. Dielektrikum 1 mm. 20° C. 760 mm Hg. 40%, bestrahlt.

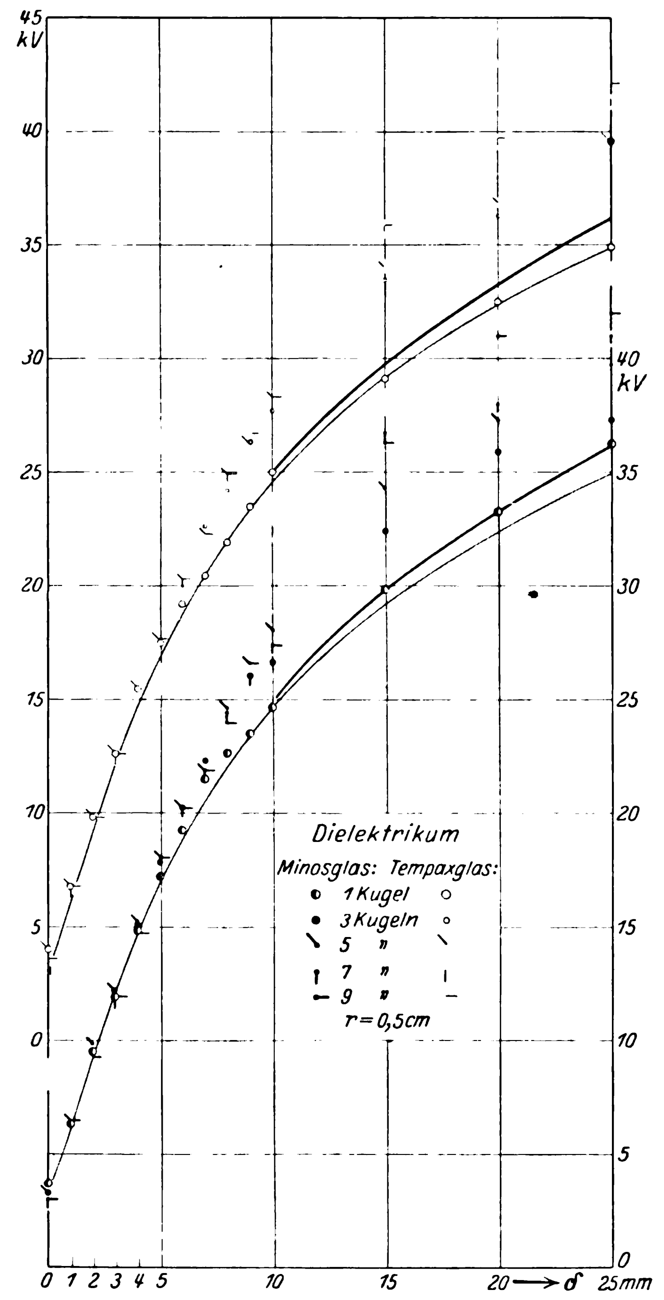
Schlagweite δ in cm	Anzahl der Elektroden und E-Radius in cm		
	9 — 9 · r = 0,4	3 — 3 · r = 0,045	3 — 3 · r = 0,045
	Abstand des festen Kammes von Glasplatte in mm		
	14 mm	11 mm	4 mm
0,0	16,3	12,3	9,82
0,1	19,2	8,85	7,86
0,2	22,1	10,3	8,85
0,3	26,4	10,74	9,35
0,4	29,4	11,3	9,82
0,5	30,9	11,6	10,3
0,6	32,4	11,8	10,74
0,7	32,8	11,9	11,06
0,8	33,3	12	11,3
0,9	33,9	12,1	11,6
1	34,2	12,2	11,8
1,5	36,2	12,54	12,3

In den Haltern konnten die Elektroden um etwa 15 mm verschoben werden, doch machte sich auch hier kein unterschiedliches Verhalten bemerkbar.

[1] E. Goebeler, Arch. f. Elektrot. Bd. XIV. S. 501, 1925.

B. Anfangsspannungen einer geerdeten Zinkscheibe gegenüber verschiedenen Elektroden.

Nach den Messungen an gleichen Elektroden wurden die Anfangsspannungen einer geerdeten Zinkscheibe (113 mm ∅) gegenüber Einfach- und Mehrfachelektroden



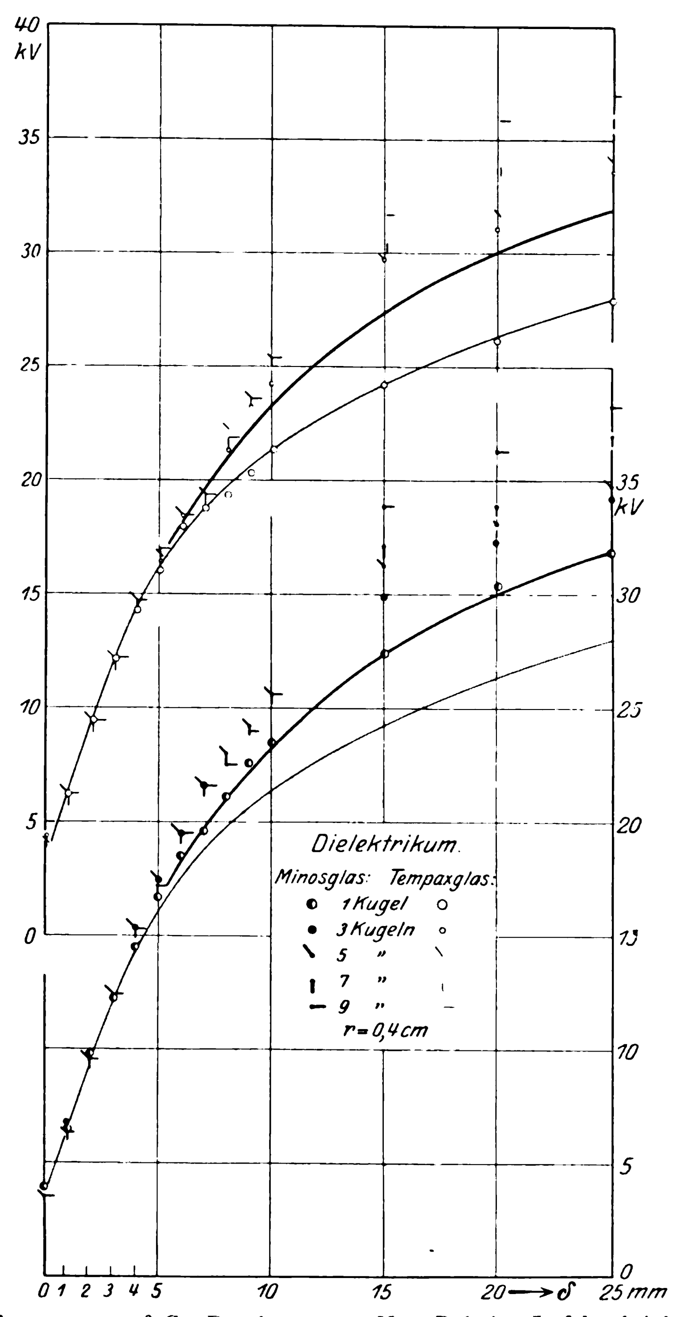
Kurven 9a. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Feuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Kugelelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Senkrecht.

bestimmt. In der Funkenstrecke 2 wurden die geerdeten Elektroden durch die geerdete Zinkplatte ersetzt; im übrigen blieb die beschriebene Versuchsanordnung ungeändert.



I. Einfach-Elektroden gegen geerdete Platte.

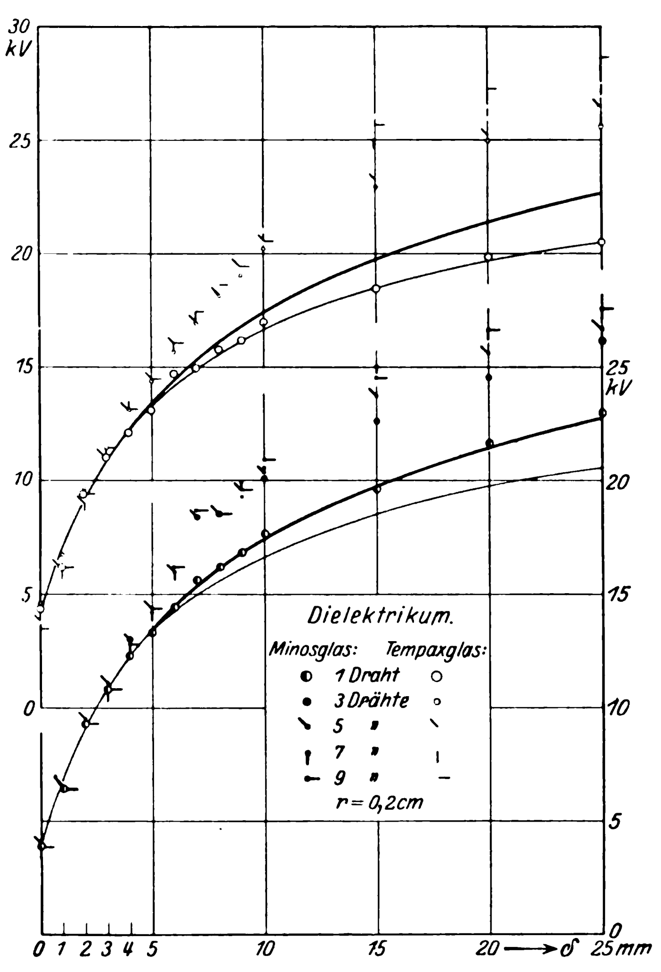
Zunächst erstrecken sich die Untersuchungen auf Messingkugeln von 20,5, 10 und 8 mm ∅, sowie auf Messingdrähte von 4 mm ∅ und Kupferdrähte von



Kurven 9b. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Kugelelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Senkrecht.

0,9 mm ∅ sowie Stopf- und Nähnadeln mit verschiedenen Spitzen. Tabelle 18 bringt die gefundenen Anfangsspannungen, die in den Kurven 10 graphisch dargestellt sind. Man erkennt die Abhängigkeit der Spannung vom Elektrodenradius





Kurven 9c. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Drahtelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Senkrecht.

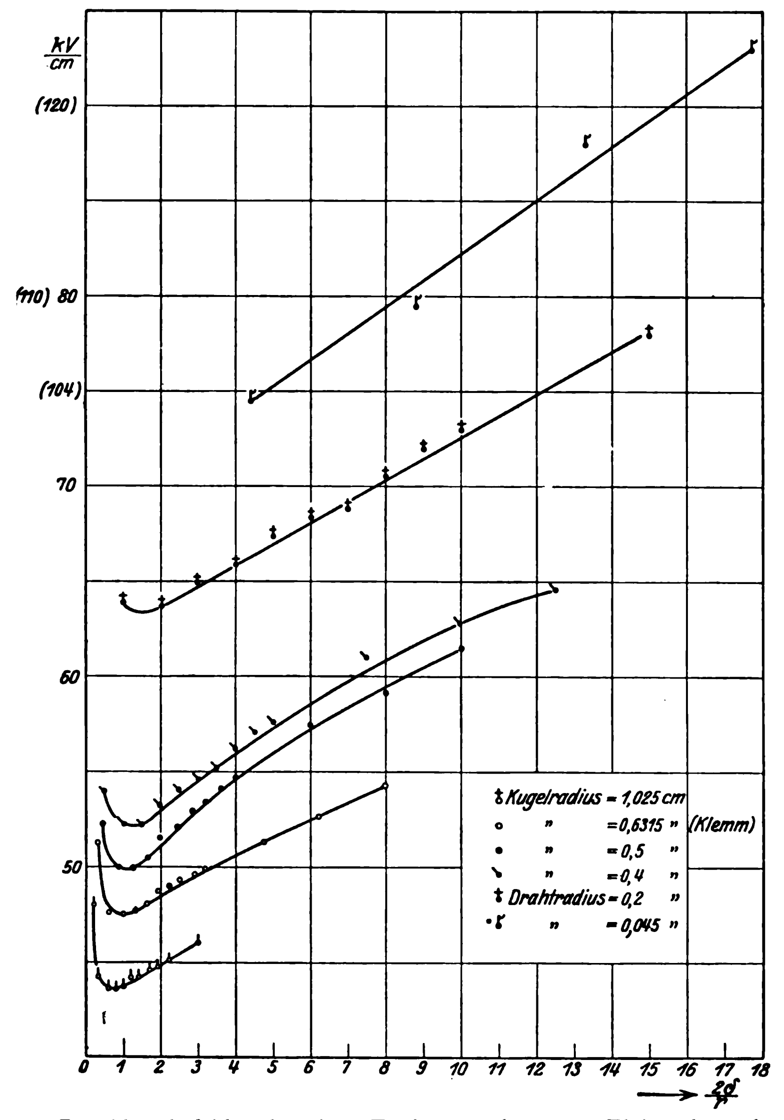
Kurven 9d. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für Drahtelektroden, eine Seite geerdet, Dielektrikum. Kammartig-Senkrecht.

und für Spitzen den Einfluß der Feinheit der Spitzen. Bei Stopf- und Nähnadeln zeigte sich die Abhängigkeit der Polarität für Gleichstrom nach der Richtung, daß die positiven Anfangsspannungen höher lagen als die negativen. Bei Wechsel-

Kurven 10. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Feuchtigkeit etwa 50% Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen für 1 Elektrode—geerdete Zinkscheibe.



spannung stimmten die Werte mit den positiven bei Gleichspannung überein. Für Nadeln erstreckten sich die Untersuchungen bis auf 75 mm Schlagweite, wodurch eine zusammenfassende Abhängigkeit der Anfangsspannung von der Schlagweite aufgestellt wurde.



Kurven 11. Durchbruchsfeldstärke einer Funkenstrecke aus 2 Elektrode und geerdeter Zinkscheibe, abhängig von dem Verhältnisse Schlagweite zu Elektrodenradius

Für Elektrodenradien 1,025, 0,5, 0,4, 0,2, 0,045 cm wurden in der oben angegebenen Art die Durchbruchsfeldstärken berechnet. Die Werte wurden in Tabelle 18a zusammengestellt und in den Kurven 11 abhängig von $\frac{2\delta}{r}$ graphisch dargestellt: Man ersieht, daß die Kurven zunächst fallen, ein Minimum durchschreiten und dann wieder ansteigen, analog den von A. Klemm gefundenen Kurven, von denen die für $r = 0{,}6315$ cm mit eingetragen wurde.

Man erhält so auch für die Anordnung 1 Elektrode-Platte eine Fortsetzung der von Klemm experimentell gefundenen Werte. Da aus diesen v-förmigen Kurven



der Durchbruchsfeldstärke keine Werte herausfallen, kann man weiterhin mit brauchbaren Grundwerten einwandfrei arbeiten.

II. Anfangsspannungen einer geerdeten Zinkscheibe gegenüber 3 Elektroden in verschiedenen Abständen untereinander.

Zu den folgenden Untersuchungen stand der geerdeten Plattenelektrode der bereits bei den vorher beschriebenen Messungen verwandte Elektrodenhalter gegenüber, in dessen mittelstes Loch 1 Elektrode gesteckt wurde, und zwar der Plattenmitte genau gegenüber. Dann wurden 2 weitere Elektroden hinzugefügt. Die Abstände dieser Elektroden untereinander bezogen sich auf die Elektrodenmitten. Gemessen wurden je 3 Elektroden von 10 und 4 mm ∅ bei gegenseitigen Abständen von 10, 20, 30 und 60 mm. Tabelle 19 bringt die gefundenen Werte.

Tabelle 19.
Anfangsspannungen einer geerdeten Zinkscheibe gegenüber 3 Elektroden in verschiedenen Abständen zueinander, bezogen auf Mitte—Mitte. 20° C. 760 mm Hg. Uviollichtbestrahlung.

Abstand der Elektrodenmitten gegeneinander in cm					
δ cm	Vergleichswerte 1 kg—Platte	Kugeln 10 mm ∅			
		1	2	3	6
0,1	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6
0,2	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8
0,3	10,3	10,3	10,3	10,3	10,3
0,4	12,6	12,91	12,75	12,75	12,71
0,5	14,6	15,1	14,85	14,76	14,71
0,6	16,07	16,95	16,56	16,31	16,1
0,7	17,53	18,5	18,01	17,82	17,55
0,8	18,5	19,48	18,99	18,95	18,61
0,9	19,48	20,77	20,26	20,07	19,63
1	20,4	21,63	21,2	20,98	20,7
1,5	23,7	25	25	25	24,35
2	25,7	28,28	28,28	28	26,7
2,5	27,7	30,68	30,68	30,4	28,72

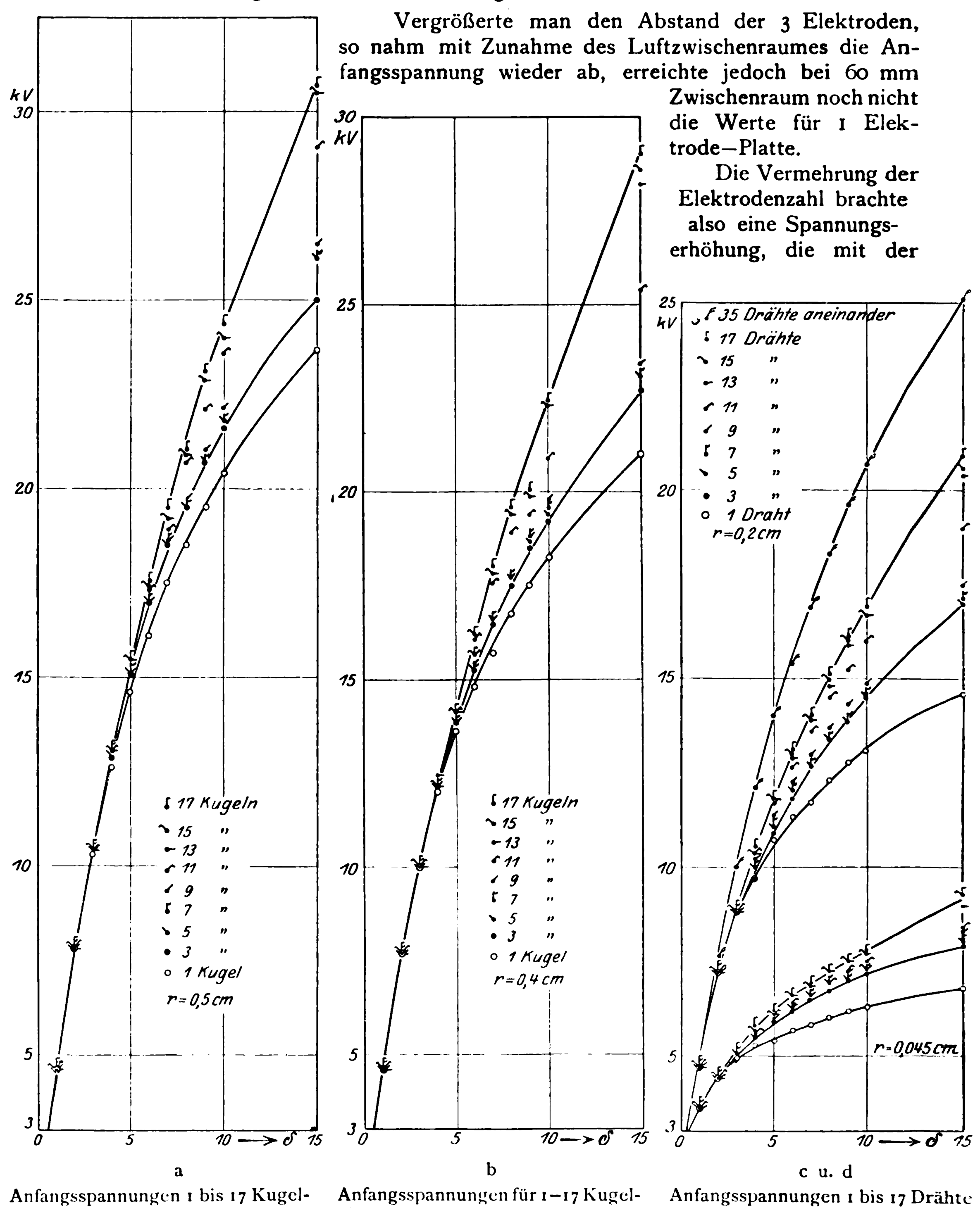
Abstand der Elektrodenmitten gegeneinander in cm					
δ cm	1 Draht—Platte	Drähte 4 mm ∅			
		1	2	3	6
0,1	4,7	4,7	4,7	4,7	4,7
0,2	7,2	7,2	7,2	7,2	7,2
0,3	8,8	8,8	8,8	8,8	8,8
0,4	9,7	9,7	9,7	9,7	9,7
0,5	10,7	10,88	10,8	10,8	10,75
0,6	11,3	11,80	11,77	11,68	11,44
0,7	11,7	12,65	12,46	12,17	11,97
0,8	12,3	13,39	13,1	12,8	12,46
0,9	12,72	13,85	13,53	13,3	13,1
1	13,1	14,5	14	13,7	13,39
1,5	14,6	17	16,3	16	15,3
2	16,1	18,8	18,1	17,9	16,8
2,5	17	20,2	19,5	19,2	18,1

Für 1 Elektrode—Platte bekam man die bekannten Werte. 3 Elektroden, 10 mm Mitte—Mitte, brachten bis 4 mm Schlagweite die gleichen Werte wie die

Einzelelektrode—Platte. Bei 5 mm Schlagweite wurde eine Spannungserhöhung beobachtet, die mit größer werdender Schlagweite immer deutlicher hervortrat.

Vergrößerte man den Abstand der 3 Elektroden, so nahm mit Zunahme des Luftzwischenraumes die Anfangsspannung wieder ab, erreichte jedoch bei 60 mm Zwischenraum noch nicht die Werte für 1 Elektrode—Platte.

Die Vermehrung der Elektrodenzahl brachte also eine Spannungserhöhung, die mit der



a
Anfangsspannungen 1 bis 17 Kugelelektroden—geerdete Platte.

b
Anfangsspannungen für 1—17 Kugelelektroden gegen geerdete Platte.

c u. d
Anfangsspannungen 1 bis 17 Drähte—geerdete Platte.

Kurven 12a bis d. Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.

Zunahme des Luftzwischenraumes wieder herabgesetzt wurde, ohne jedoch die Werte 1 Elektrode-Platte zu erreichen.

Ein unterschiedliches Verhalten der Anfangsspannung hier gegen die der Messungen bei symmetrischer Anordnung besteht darin, daß hier die Anfangsspannung beim Übergang von 1 auf 3 Elektroden bei 5 mm Schlagweite steigt gegen dort bei 8 mm. Zugleich fällt die Anfangsspannung mit zunehmendem Abstand der Elektroden bei den eben angegebenen Schlagweiten.

III. Anfangsspannungen einer geerdeten Zinkscheibe gegenüber 1 bis 17 Elektroden bei konstant gehaltenem Abstand untereinander.

Analog den Untersuchungen an parallelen Kämmen wurden jetzt der Einzelelektrode je zwei weitere Elektroden hinzugefügt, bis 17 Elektroden der Platte gegenüberstanden.

Für 1 Elektrode gegen geerdete Zinkscheibe traten die oben gefundenen Werte wieder auf.

Sobald man jetzt zwei neue Elektroden hinzufügte, so daß also 3 Elektroden der geerdeten Zinkscheibe gegenüberstanden, blieben die Verhältnisse bis zu 3 mm Schlagweite ungeändert, d. h. die Anfangsspannung war konstant. Bei Schlagweiten über 3 mm trat eine Änderung ein: Man beobachtete eine geringe Zunahme der Anfangsspannung, die mit wachsender Schlagweite größer wurde. Siehe Tabelle 20 und Kurve 12. Diese Steigerung zeigte sich durchweg bei Elektroden mit verschiedenem Durchmesser. Fügte man weitere Elektroden hinzu, so wurde bei Schlagweiten über 5 mm eine weitere geringe Zunahme der Anfangsspannung mit der Elektrodenzahl festgestellt, die bei größeren Schlagweiten immer deutlicher in die Erscheinung trat. Besonders bei den Kugelelektroden ist der Anstieg deutlich zu bemerken, da hier kein und nur geringer Luftzwischenraum vorhanden war. Der Luftzwischenraum und die Form der Elektroden scheint einen herabsetzenden Einfluß auszuüben. So wurden 35 Drähte von 4 mm ∅ dicht aneinander gebracht und nun die Anfangsspannungen gegen geerdete Platte gemessen. Schlagweiten über 4 mm zeigen für diesen Fall eine ganz bedeutende Erhöhung der Anfangsspannung. Hierdurch wurde die Annahme bestätigt, daß bei der gewählten Anordnung einander berührende Elektroden die höchsten Anfangsspannungen zeigen. Die Spannungen scheinen also einem bestimmten Grenzwert zuzustreben, der praktisch dann erreicht wird, wenn die Elektroden so gewählt werden, daß hervorstehende Teile nicht mehr vorhanden sind, sondern ein Ganzes bilden, was bei den 35 Drähten fast erreicht war.

Vergleicht man die hier gefundenen Resultate mit denen bei symmetrischer Elektrodenanordnung, so stellt man ein unterschiedliches Verhalten darin fest, daß hier schon bei kleinen Schlagweiten eine Zunahme der Anfangsspannung mit der Zahl der Elektroden zu beobachten war, während dort eine geringe Zunahme beim Übergang auf 3 Elektroden zunächst bei Schlagweiten $\delta = 0{,}4$ cm festgestellt wurde und eine weitere Zunahme erst bei größeren Schlagweiten ($\delta = 1{,}5$ cm) und einer großen Anzahl von Elektroden beobachtet werden konnte.

IV. Anfangsspannungen einer geerdeten Platte gegenüber 9 Elektroden unter Bevorzugung einzelner Elektroden.

Bei den folgenden Messungen werden einzelne Elektroden bevorzugt, d. h. sie überragen den Elektrodenkamm um 1 mm. Gewählt wurden je 9 Elektroden von 4 und 0,9 mm ∅. In Tabelle 21 wurde unter a eine mittlere Elektrode um 1 mm vorgezogen, unter b der mittelste Draht und unter c eine Randelektrode bevorzugt, während die übrigen Elektroden eine 1 mm größere Schlagweite aufwiesen. Am deutlichsten trat ein Unterschied bei den 4-mm-Drähten in die Erscheinung, während bei 0,9-mm-Draht wegen der geringen Spannungsunterschiede die Herabsetzung nicht



so augenfällig war. Bis zu 3 mm Schlagweite war eine Änderung nicht festzustellen, doch von 4 mm an trat eine Spannungsherabsetzung gegenüber ausgerichteten Kämmen auf, ohne jedoch den Wert 1 Elektrode—Platte zu erreichen. Wurde der äußerste Draht bevorzugt, so beobachtete man eine geringe weitere Abnahme. Eine Eigentümlichkeit trat noch auf insofern, als trotz Bevorzugung der Mittelelektrode unter a ab 6 mm Schlagweite die Entladungen an der 1 mm zurückstehenden Randelektrode begannen.

Tabelle 21.
Anfangsspannungen einer geerdeten Zinkscheibe gegenüber 9 Drähten, von denen einer die übrigen um 1 mm überragt.
a) Draht 1 cm von Mitte 1 mm vor,
b) Mitteldraht 1 mm vor,
c) ein äußerer Draht 1 mm vor.
20° C. 760 mm Hg. 40%. Uviollichtbestrahlung.

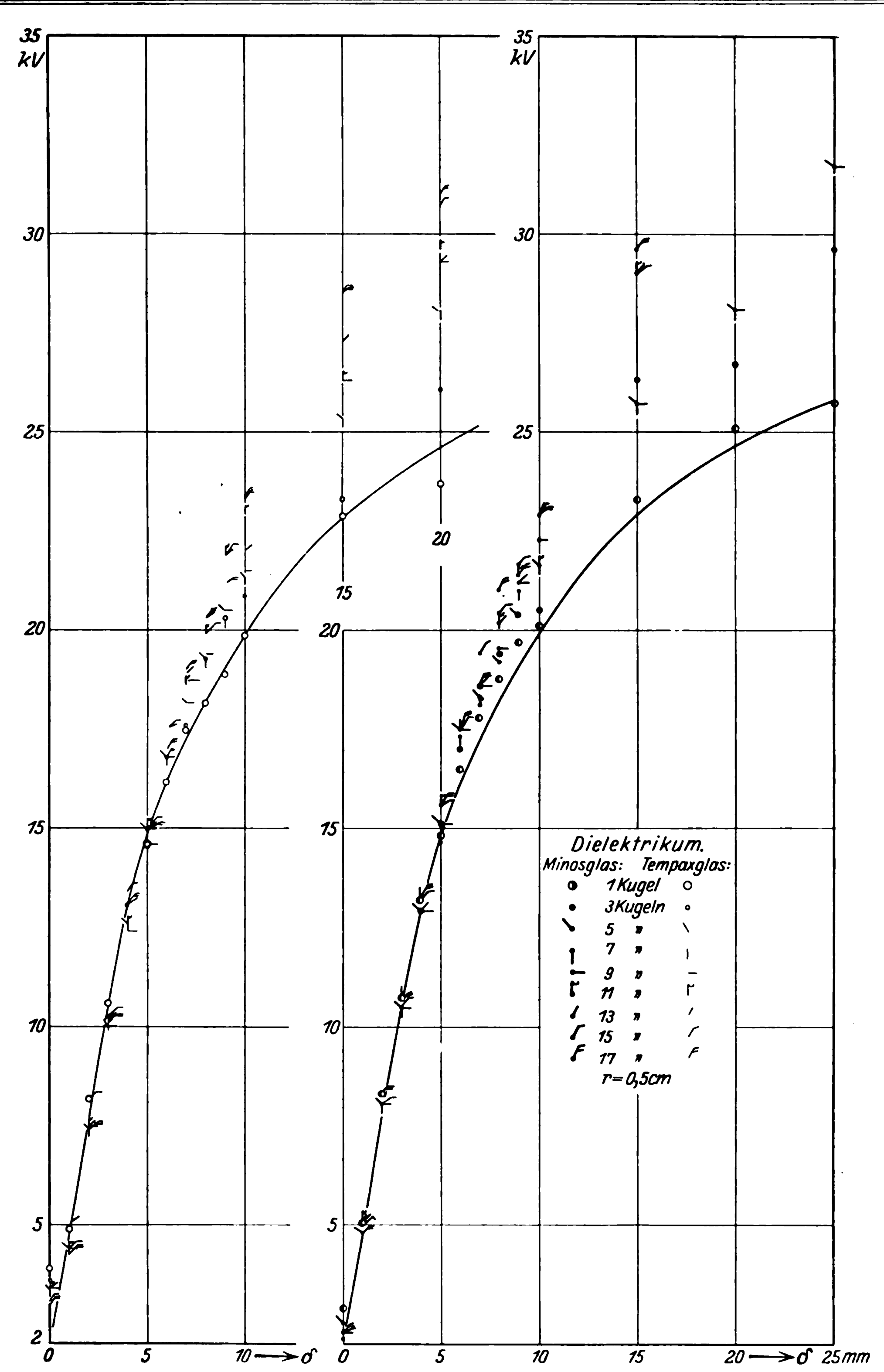
δ	4 mm Draht		0,9 mm Draht	
cm	a	c	b	c
0,1	4,6	4,6	3,6	3,6
0,2	7,2	7,2	4,4	4,4
0,3	8,8	8,8	5,1	5
0,4	9,8	9,8	5,5	5,5
0,5	11	10,9	6	5,9
0,6	11,9[1]	11,7	6,3	6,2
0,7	12,7	12,4	6,6	6,5
0,8	13,6	13,1	6,8	6,8
0,9	14,1	13,8	7,1	7,1
1	14,7	14,3	7,3	7,3
1,5	17,2	16,6	8,1	7,9
2	19,2	18,4	8,8	8,6
2,5	20,6	19,9	9,3	9,1

Man erkennt also, daß zwar die Bevorzugung einzelner Elektroden eine Spannungsverminderung herbeiführt, der Einfluß der übrigen Elektroden jedoch groß genug ist, besonders bei größeren Schlagweiten, fast einen Ausgleich herbeizuführen, d. h. die Werte der ausgerichteten 9 Elektroden zu erreichen.

V. Anfangsspannungen 1 bis 17 Elektroden—geerdete Zinkscheibe mit konzentrischer Glasplatte.

Die oben beschriebene Anordnung wurde weiter verwendet, nur wurde auf der Zinkplatte eine konzentrische Glasscheibe von 150 mm ∅ und 1 mm Dicke angebracht. Untersucht wurde Minos- und Tempaxglas. Die Schlagweiten bezogen sich auf Kamm gegen Glasplatte, sind also gegen die geerdete Zinkscheibe 1 mm größer. Durchgeführt wurden die Messungen an Kugeln von 10 und 8 mm ∅ sowie an Drähten von 4 und 0,9 mm ∅ zunächst für 1 bis 10 mm Schlagweite, dann um je 5 mm wachsend. Die in Tabelle 22 und 23 aufgestellten und in den Kurven 13 graphisch dargestellten Werte sind wegen der Streuungen nur als Mittelwerte aus einer großen Zahl von Messungen zu betrachten, wobei besonders hoch herausfallende Werte nicht mitberücksichtigt wurden. Auch hier lagen wie bei der Anordnung: Mehrfachelektroden—Mehrfachelektroden die Werte für Minosglas höher als die für Tempaxglas, so daß trotz der Mittelwerte auf einen Unterschied der beiden Glassorten geschlossen werden konnte.

[1] Überschlag am Rand, obwohl Mitte 1 mm vor.



Kurven 13a. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%.
Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen 1 bis 17 Kugeln—geerdete Zinkscheibe, Dielektrikum.

Kurven 13b. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.

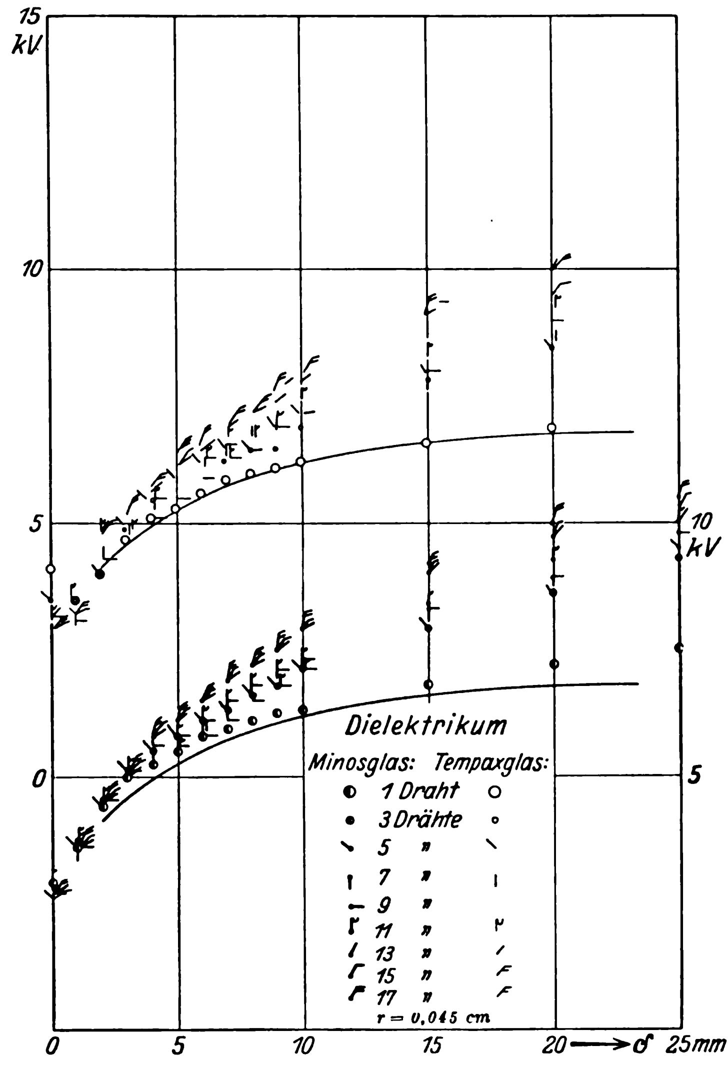
Anfangsspannungen 1 bis 17 Kugeln—geerdete Zinkscheibe, Dielektrikum.

Um das durch die Aufladung der Glasscheibe bedingte unterschiedliche Verhalten zwischen Gleich- und Wechselspannung zu vermeiden, wurde nach jeder Messung mit Gleichspannung die Glasscheibe entladen.

Kurven 13c. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen 1 bis 17 Drähte—geerdete Zinkscheibe, Dielektrikum.

Solange die Elektroden die Glasscheibe berührten, waren die Streuungen besonders auffallend; hier nahm die Anfangsspannung mit Zunahme der Elektrodenzahl ab. Dieses Verhalten wurde auch bei kleinen Schlagweiten beobachtet, besonders bei den Kugelelektroden. Am auffallendsten war diese Erscheinung bei Kugeln von 10 mm ∅, die sich berührten, indem hier die Anfangsspannung noch bis 4 mm Schlagweite mit Zunahme der Elektrodenzahl zunächst abnahm. Eine

Vermehrung über 9 Elektroden zeigte jedoch eine geringe Erhöhung mit der Zahl, bis 17 Elektroden den Wert für 1 Elektrode erreichten.



Kurven 13d. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg. Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%. Uviollichtbestrahlung.
Anfangsspannungen 1 bis 17 Drähte—geerdete Platte, Dielektrikum.

Die Drahtelektroden zeigten bis zu 3 mm Schlagweite eine fast gleichbleibende Anfangsspannung unabhängig von der Elektrodenzahl. Ging man über die erwähnten Schlagweiten hinaus, so bemerkte man eine geringe Erhöhung der Anfangsspannung mit Zunahme der Elektrodenzahl, die für größere Schlagweiten und besonders für kleine Elektroden sehr deutlich hervortrat.

Vergleicht man diese Mittelwerte mit den oben gefundenen Werten ohne Dielektrikum, so liegen für gleiche Schlagweiten die Mittelwerte tiefer. Es wird also mit Hilfe der Glasscheibe die Entladung begünstigt.

Beim Überschreiten der Anfangsspannung breitete sich die Entladung zunächst über die Glasplatte aus, um erst bei bedeutend höheren Spannungen um die Glasplatte herum zur Zinkscheibe überzugehen (Bild 5).

Auch bei den beobachteten Mittelwerten dieser Anordnung findet man einen gewissen Unterschied gegen die Messungen bei symmetrischer Verteilung. Hier tritt von bestimmten Schlagweiten an wiederum eine Spannungserhöhung mit Zunahme der Elektrodenzahl auf, während dort diese Erhöhung erst bei größeren Schlagweiten beobachtet werden konnte.

VI. Anfangsspannungen Elektrode—Platte bei 500 ∼.

Analog den Messungen an Mehrfachelektroden—Mehrfachelektroden wurden Versuche bei 500-Perioden-Wechselstrom angestellt. Ein merklicher Unterschied gegen 50 Perioden war nicht festzustellen, wodurch frühere Messungen erneut bestätigt werden konnten. Die Werte für Draht von 0,9-mm ∅ -Platte bringt Tabelle 24. Die Messungen mit 500 und 50 Perioden folgten kurz aufeinander und zeigten vollkommene Übereinstimmung.

C. Anfangsspannungen für Zylinderelektroden.

Bei den Untersuchungen mit Kugel- bzw. Drahtelektroden (symmetrische Anordnung) war ein Anwachsen der Anfangsspannung mit Zunahme der Elektrodenzahl erst bei größeren Schlagweiten festgestellt worden. Das trat in verstärktem Maße auf bei der Anordnung, in der den kammartigen Elektroden eine Platte als Gegenelektrode gegenüberstand. Der Versuch mit 35 Elektroden von 4 mm ∅ hatte unter Ausschaltung des Luftzwischenraumes noch bedeutend höhere Anfangsspannungen ergeben, wodurch bestätigt wurde, daß die Werte mit Zunahme der Elektrodenzahl einem Grenzwert zustreben. Besonders die letzte Anordnung ähnelte einer Zylinderelektrode. So lag die Annahme nahe, daß die Werte für Mehrfachelektroden—geerdete Platte entsprechend dem Luftzwischenraum zwischen den einzelnen Elektroden mehr oder weniger einem Grenzwert zustreben, der in der Nähe der Zylinderwerte liegen muß. Um für diese Behauptung den Beweis liefern zu können, wurden zunächst Zylinderelektroden von 10 und 4 mm ∅ gewählt, so daß für 2 bestimmte Durchmesser Vergleichswerte geschaffen wurden.

Über Messungen an Zylinderelektroden von 34 cm Länge berichtet Löber[1]. Dort waren die Enden umgebogen. Die hier verwendeten Zylinder waren vollkommen gerade und an den Enden kugelförmig abgerundet.

I. Anfangsspannungen zweier paralleler Zylinder.

Mittels der Funkenstrecke 2 wurden je 2 Zylinder von 3 cm und 13 cm Länge von 4 und 10 mm ∅ durchgemessen. Es wurde darauf geachtet, daß der Entladungsfunke in der Mitte übersprang. Vergleicht man die in Tabelle 25 zusammengestellten Werte für 10 mm ∅ mit den Löberschen Werten, so findet man bis 10 mm Schlagweite eine gute Übereinstimmung. Ein Unterschied zwischen den Anfangsspannungen der Zylinder von verschiedenen Längen macht sich erst bei größeren Schlagweiten bei 10 mm ∅ bemerkbar.

Bei 4 mm Zylinderdurchmesser beginnen die Abweichungen gegen die Löberschen Werte schon bei 4 mm Schlagweite, da es hier nicht möglich war, den Funken in die Mitte zu zwingen.

Die Durchbruchsfeldstärke für zwei parallele Zylinder berechnet man nach Russel[2] mit

$$E = \frac{U}{\delta} f,$$

wo U die Anfangsspannung in kV,
δ die Schlagweite in cm bedeutet

[1] H. Löber, Arch. f. Elektrot. Bd. XIV, S. 511 ff., 1925.
[2] Russel, Phil. Mag. 6, 237, 1906.

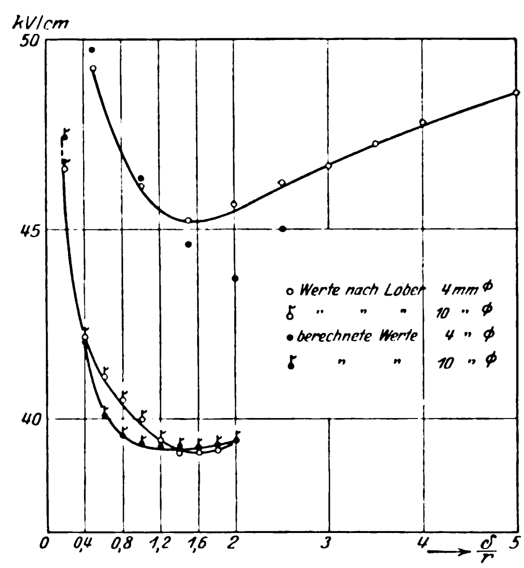
und f ein Faktor ist von der Form

$$f = \frac{\sqrt{\xi(2+\xi)}}{\ln(\xi + 1 + \sqrt{\xi(2+\xi)})}.$$

Hier ist

$$\xi = \frac{\delta}{2r}.$$

Für Zylinder—Ebene gilt der gleiche Ansatz, nur wird $\xi = \frac{\delta}{r}$, wo δ die Schlagweite Zylinder—Ebene bedeutet. Mittels der Formel wurde die Durchbruchsfeldstärke berechnet und in der Tabelle 26 zusammengestellt. Für 10 mm ∅ bekam man übereinstimmende Werte mit Löber, doch für 4 mm ∅ weichen die Werte schon bei 5 mm Schlagweite ab. Diese Abweichungen sind durch die Sprüherscheinungen zu erklären, die vor dem eigentlichen Überschlag auftraten. Da es sich um Anfangsspannungen handelte, kamen diese Überschläge, die allerdings eine Übereinstimmung brachten, nicht in Frage.



Kurven 14. Durchbruchsfeldstärke einer Funkenstrecke aus 2 gleichen Zylindern, abhängig vom Verhältnis Schlagweite zu Radius $\left(\frac{\delta}{r}\right)$.

Bei den gewählten Zylindern spielte die Länge erst bei größeren Schlagweiten eine Rolle insofern, als die Anfangsspannung mit der Länge zunahm. In den Kurven 14 wurden die berechneten Werte in Abhängigkeit von $\frac{\delta}{r}$ graphisch dargestellt und zeigen für 10 mm Zylinderdurchmesser einen ähnlichen Verlauf wie die von Löber.

II. Senkrechte Zylinderanordnung.

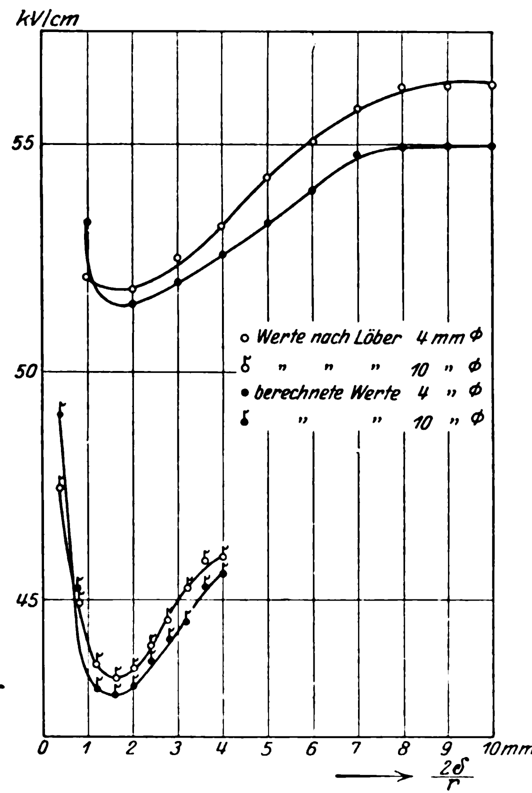
Analog den Versuchen mit Mehrfachelektroden wurden die Zylinder um 90° zueinander verdreht. Aus der Tabelle 27 erkennt man, daß auch hier eine Erhöhung der Anfangsspannung auftrat. Während bei 10 mm ∅ die verschiedenen Zylinderlängen keinen Unterschied erkennen ließen, machte sich bei 4 mm ∅ eine wesentliche Spannungserhöhung mit Zunahme der Zylinderlänge bemerkbar. Besonders bei größeren Schlagweiten wurde diese Erscheinung deutlich, da eben bei kurzen



Zylindern eine Sprüherscheinung auftrat, die bei 13-cm-Zylindern erst später beobachtet wurde.

III. Anfangsspannungen für Teilzylinder—Teilzylinder.

Analog der früheren gabelförmigen Anordnung wurden jetzt Teilzylinder von 10 mm ∅ und 10 mm Länge gewählt derart, daß sie sorgfältig zusammengesetzt einen Vollzylinder von 3 bzw. 13 cm ergaben, wobei die äußersten Teile abgerundet waren. Die Untersuchungen an diesen zusammengesetzten Teilzylindern ergaben die aus den oberen Abschnitten bekannten Werte, siehe Tabelle 27a. Wurden aus der Anordnung für 13 Teilzylinder 6 derart herausgenommen, daß noch 7 Stück mit je 10 mm Zwischenraum stehen blieben, so sank die Anfangsspannung auffallend. Zog man weiter 4 Teilzylinder heraus, so daß der scharfkantige Mittel-



Kurven 15. Durchbruchsfeldstärke einer Funkenstrecke aus einem Zylinder und einer geerdeten Zinkscheibe, abhängig vom Verhältnis Schlagweite zu Radius $\left(2\frac{\delta}{r}\right)$.

zylinder und die beiden äußeren abgerundeten Endzylinder — Zwischenraum je 50 mm — allein stehen blieben, so bekam man noch tiefere Anfangsspannungen, die vollkommen den Werten für 1 Teilzylinder—1 Teilzylinder (scharfkantig) analog waren.

Dieselben Werte ergaben 3 scharfkantige Teilzylinder bei 10 mm Abstand für Schlagweiten über 6 mm. Kleinere Schlagweiten zeigten eine geringe Spannungserhöhung. Wurden noch 3 kantige Teilzylinder ohne Luftzwischenraum durchgemessen, so lagen diese Werte weit unter denen für 3, deren äußeren Teile abgerundet waren, doch oberhalb eines oder mehrerer mit Zwischenraum. Jedenfalls ergaben ein Luftzwischenraum und die scharfen Kanten eine bedeutende Spannungsherabsetzung, ein Umstand, der für eine spätere Anordnung von Wichtigkeit war.



IV. Anfangsspannungen für Zylinder—geerdete Platte.

Die Funkenstrecke 2 diente weiter dazu, die Anfangsspannungen für Zylinder von 10 und 4 mm ∅—geerdete Zinkscheibe festzustellen. Um den Einfluß der Zylinderlänge feststellen zu können, wurden Zylinder von 2, 3, 6, 12 und 13 cm durchgemessen. Löber fand eine Abnahme der Überschlagsspannung mit Zunahme der Zylinderlänge. Die in Tabelle 28 gefundenen Werte zeigen, daß die Anfangsspannung mit der Zylinderlänge wächst, wobei es sich allerdings um bedeutend kleinere Längen handelt als bei Löber. Solange die Platte den Zylinder überragte, machten sich Sprüherscheinungen bemerkbar, die die niedrige Anfangsspannung bedingten. Überragten jedoch die Zylinderenden die Zinkscheibe, so bekam man höhere Anfangsspannungen, die den Löberschen Werten sehr nahe kamen. Den Unterschied bedingt die Zylinderform.

Die Anfangsspannung steigt also mit der Zylinderlänge und bringt die höchsten Werte, wenn die Platte vom Zylinder überragt wird.

Bei kleinem Zylinderdurchmesser wurden die Sprüherscheinungen in Betracht gezogen, da es sich um Anfangsspannungen handelte. Dadurch sind die Unterschiede gegen die Löberschen Werte zu erklären.

Nach der oben erwähnten Formel von Russel wurden nun für 13 cm lange Zylinder die Durchbruchsfeldstärke berechnet und in der Tabelle 29 zusammengestellt. Die graphische Darstellung, abhängig von $\frac{2\delta}{r}$, zeigen die Kurven 15, denen die Löberschen Werte zugrunde gelegt wurden. Für 10 mm ∅ bekommt man etwas tiefere Werte, doch sonst ähnelt sich der Verlauf der Kurven vollkommen. Für 4 mm ∅ erkennt man ein deutliches Abbiegen von der Löberschen Kurve, das eben durch die oben erwähnten Sprüherscheinungen bedingt ist.

V. Anfangsspannungen Teilzylinder—geerdete Platte.

Es wurden zunächst Teilzylinder von 10 mm ∅ und 10 mm Länge mittels der Halter derart zusammengesetzt, daß sich ein Vollzylinder von 13 cm Länge ergab, wobei die Enden abgerundet waren. Die Anfangsspannungen für diesen zusammengesetzten Zylinder ergaben die gleichen Werte wie weiter oben für den ganzen Zylinder von 13 cm Länge beobachtet waren. Nahm man wieder einzelne Teile heraus, so daß 7 Teilzylinder 10 mm und 3 sogar 50 mm Luftzwischenraum hatten, so sank die Spannung mit Zunahme des Zwischenraumes. Endlich zeigte ein einzelner kantiger Teilzylinder die niedrigste Spannung. Wählte man Teilzylinder von 6 mm Länge, so lag die Anfangsspannung bei 13 Stück weit unter denen von 10 mm Länge, wo sich 13 Stück innig berührten und so einen Zylinder von 13 cm bildeten. Auch hier nahm die Anfangsspannung mit größer werdendem Zwischenraum ab bis auf 1 Teilzylinder, der seinerseits wieder einen etwas niederen Wert zeigte als der 10 mm lange Teilzylinder. Die Versuche ergeben also, daß der Luftzwischenraum und die scharfen Kanten die Spannung herabsetzten, was auch zu erwarten war. Die Beobachtungen zeigt Tabelle 29a. Tabelle 29b gibt noch einige Beobachtungen für 6 mm Teilzylinder, die deutlich zeigen, von wie großem Einfluß auf die Entladung die scharfen Kanten waren.

3 Teilzylinder mit je 4 mm Zwischenraum, bei denen die äußeren abgerundet waren, ergaben höhere Werte als 5, bei denen 3 scharfkantig und die beiden äußeren abgerundet waren. Wählte man schließlich nur scharfkantige Zylinder, so sank die Spannung ganz bedeutend gegen die mit abgerundeten Endzylindern, doch war eine Zunahme mit der Zahl nicht zu beobachten.

Scharfe Kanten und ein gewisser Luftzwischenraum tragen zur Herabsetzung der Anfangsspannung ganz bedeutend bei. Die niedrigsten Werte wurden erhalten für nur 1 Elektrode gegen geerdete Platte.



D. Messungen am Glimmschutz.

Die Wirkungsweise und den Bau des Glimmschutzes beschreibt G. J. Meyer in seinen beiden Veröffentlichungen[1]. Die Theorie des Glimmschutzes erklärt F. Kesselring[2]. Im vorliegenden Falle kam es nur darauf an, das bisher festgestellte Ergebnis auf den Glimmschutz anzuwenden. Zur Verfügung stand ein Glimmschutz, ein einpoliger Apparat Serie III mit 1 Glasglocke für Spannungen von 7,5 bis 25 kV (Bild 6).

Da Meyer in seinen Kurven nur Glimmgrenzen festlegt, so bringen die Untersuchungen mit Glasglocke auch nur Glimmgrenzen, während für die Versuche ohne Glasglocke Anfangsspannungen gemessen wurden.

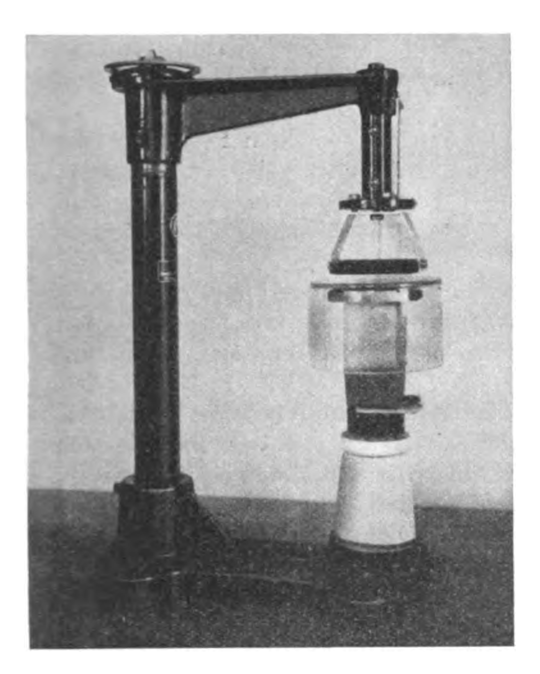
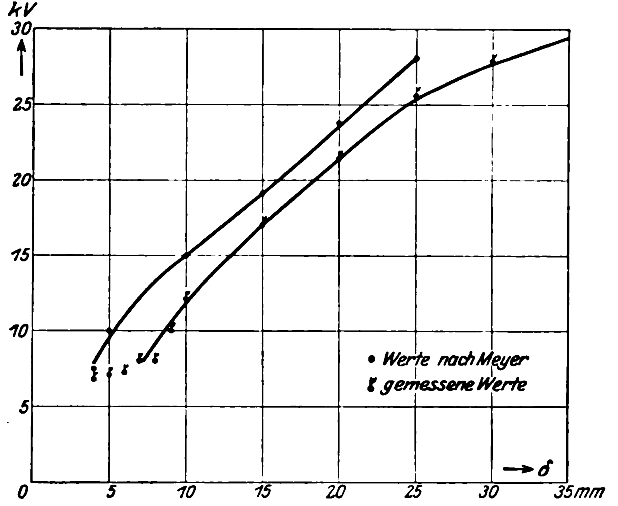


Bild 6. Glimmschutz nach G. J. Meyer Serie III für 7,5 bis 25 kV.

Kurven 16.
Temperatur 20° C. Luftdruck 760 mm Hg.
Relative Luftfeuchtigkeit etwa 40%.
Uviollichtbestrahlung.



Glimmgrenze für den Meyerschen Glimmschutz.

Die Werte mit Dielektrikum sind wiederum nur Mittelwerte aus einer größeren Anzahl von Versuchen, da auch hier die oben erwähnten Streuungen auftraten. In Tabelle 30 sind die Werte für Versuche ohne Glasglocke zusammengestellt, und zwar in a) ohne Bestrahlung und in b) mit Uviollichtbestrahlung. Die Werte unter b lagen zum größten Te.l unter denen von a und waren reproduzierbar, während die a-Werte als Mittelwerte aufzufassen sind.

Man erkennt, wie wichtig für eine derartige Elektrodenansammlung die Bestrahlung ist. So ist auch zu erklären, daß die gemessenen Werte noch unter denen von Meyer lagen. Siehe Kurven 16. Tabelle 31 gibt endlich die Werte der Glimmgrenzen bei aufgesetzter Glasglocke. Auch hier bewirkte die Bestrahlung eine Herabsetzung der Mittelwerte.

Wie wichtig die Glasglocke ist, erkennt man daraus, daß bei gleichen Schlagweiten zwischen den Elektroden ohne Dielektrikum schon längst eine Funkenentladung auftrat, während mit Dielektrikum erst ganz bedeutend höhere Spannungen

[1] G. J. Meyer, Der Glimmschutz 1923. — Sprungwelle und ihre Bekämpfung durch den Glimmschutz. 1924.

[2] F. Kesselring, Arch. f. Elektrot. 1926, II.

die Funkenentladung um die Glasglocke herum bewirkten. Aus den oben angestellten Versuchen erkannte man, daß die scharfen Kanten bei den Teilzylindern und ein Luftzwischenraum die Spannung wesentlich herabsetzten, während die Bevorzugung einzelner Elektroden ebenfalls eine Spannungsherabsetzung bewirkte. Diese Eigentümlichkeiten sind im Glimmschutz verwendet, wie man aus den von Meyer aufgestellten Staubfiguren erkennen kann. Weiterhin bewirkte die Glasglocke eine Spannungsherabsetzung, dann aber auch für bedeutend höhere Spannungen ein Verzögern der Funkenentladung zwischen den Elektroden.

E. Abhängigkeit der Anfangsspannung vom Elektrodenmaterial.

Nach W. O. Schumann[1] ist die Anfangsspannung unter normalen Verhältnissen vom Elektrodenmaterial vollkommen unabhängig. Um auch darüber für die gewählten Elektrodenformen Schlüsse ziehen zu können, wurden Kohlenelektroden angefertigt und durchgemessen.

Zunächst wurden Kohlenstäbchen von 4 mm ∅ von derselben Form wie die Messingstäbchen von 4 mm ∅ gewählt. Die Messungen gleichen vollkommen denen, die oben angestellt wurden: 1 Kohlenstäbchen—1 Kohlenstäbchen, dann 3 — 3 in paralleler und senkrechter Anordnung, hierauf 1 bzw. 3 Kohlenstäbchen – geerdete Zinkscheibe.

Endlich wurde die Anordnung Zylinder—Zylinder und Zylinder—Platte für Kohlenzylinder von 10 mm ∅ und 13 cm Länge durchgemessen. Die Ergebnisse wurden in Tabelle 32 zusammengestellt und die früheren Werte für Metallelektroden hinzugefügt.

Wie man aus der Tabelle ersieht, ergaben die Kontrollversuche mit Kohle erneut eine Unabhängigkeit vom Elektrodenmaterial, was zu erwarten war, da sich die Materialeigenschaften nur in Oberflächen- und Austrittpotential bemerkbar machen könnten, nicht aber in der Feldverteilung. Gegenüber den hohen Potentialen fallen natürlich einige 20 Volt aus dem Bereich der Meßmöglichkeit.

Aus denselben Gründen würden sich z. B. bei sehr feinen Spitzen auch keine Unterschiede bemerkbar machen, doch ist eine Herstellungsmöglichkeit nicht vorhanden.

F. Vergleich der experimentell gefundenen Werte.

Da sich bei Messungen mit Mehrfachelektroden gegen geerdete Platte eine Zunahme der Anfangsspannung mit der Elektrodenzahl gezeigt hatte, die einem bestimmten Grenzwert zuzustreben scheint, wurden Vergleichswerte aufgestellt.

Zunächst sind in Tabelle 33 die Werte für 10 mm Kugeln und 4 mm Drähte mit den entsprechenden Zylinderdurchmessern bei symmetrischer Anordnung zusammengestellt bei paralleler Stellung der Kämme. Hinzugefügt wurden die Löberschen Werte für die gleichen Zylinderdurchmesser allerdings nur bis 15 mm Schlagweite, da es bei größeren Schlagweiten nicht mehr möglich war, den Funken genau in der Mitte zum Überschlag zu zwingen. Die hier gemessenen Zylinderwerte zeigten bei verschiedenen Längen der Zylinder fast gleiche Werte und stimmten für 10 mm ∅ mit den Löberschen überein. Die Werte für 4 mm ∅ zeigten wegen der Sprüherscheinungen bedeutende Abweichungen. Für die betrachteten Schlagweiten zeigten die Mehrfachelektroden noch keine wesentliche Spannungssteigerung beim Übergang auf mehrere Elektroden. So kann hier nicht von einem Grenzwert gesprochen werden.

Es ist nur so viel zu sagen, daß die Zylinderwerte bei konstantem Durchmesser höher liegen als die der Mehrfachelektroden.

Tabelle 34 bringt die Vergleichswerte bei senkrechter Anordnung. Für 10 mm ∅ tritt zwar eine Spannungserhöhung schon bei kleineren Schlagweiten auf, doch ist

[1] W. O. Schumann, 1923.



eine weitere Zunahme mit der Elektrodenzahl für die in Frage kommenden Schlagweiten nicht zu merken. Die schon früher auftretende Erhöhung bei 4 mm ∅ bringen die Sprüherscheinungen.

Die in Tabelle 35 aufgestellten Vergleichswerte zeigen zunächst eine Steigerung der Anfangsspannung mit Zunahme der Zylinderlänge und Vermehrung der Elektrodenzahl.

Beachtet man zuerst die Anfangsspannungen von 10 mm ∅, so erkennt man eine Steigerung beim Übergang von 1 Kugel auf 2-cm-Zylinder, dessen Werte mit denen von 3 Kugeln übereinstimmen. Der 3-cm-Zylinder bringt eine weitere Steigerung, die fast von 9 Kugeln erreicht wird. Erst 17 Kugeln liegen über dem 3-cm-Zylinder, aber unter dem 13-cm-Zylinder, der die Löberschen Werte erreicht

Man sieht, daß die Kugeln einem Grenzwert zustreben, der in der Nähe der entsprechenden Zylinder liegen muß. Daher wurden die höchst gemessenen Zylinderwerte als diese Grenzwerte angesehen, zumal die Anordnung der sich berührenden Kugeln als eine Zusammensetzung von Elektroden betrachtet werden kann, deren idealste Form eben ein Zylinder ist.

Für 4 mm ∅ liegen die Werte schon weiter auseinander, was durch den Luftzwischenraum bedingt ist. Zwischen 17 Drähten und 13-cm-Zylinder ist noch ein großer Unterschied zu merken. Doch die Anordnung der 35 aneinanderliegenden Drähte kommt den Werten des 13-cm-Zylinders schon bedeutend näher. Man hat also bei kleineren, sich nicht berührenden Elektroden eine gewisse Abhängigkeit vom Luftzwischenraum in Betracht zu ziehen.

Unter den gemachten Voraussetzungen läßt sich die Anfangsspannung der Kugelelektroden V_{K_n}, wo n die Anzahl der Elektroden bedeutet, abhängig von der Anfangsspannung der Zylinder V_Z darstellen.

Es wird

$$V_{K_n} = V_Z \cdot e^{-\frac{a}{\sqrt[4]{n}}}.$$

a und V_Z sind Funktionen der Schlagweite:

$$a = f(\delta) = \alpha\,\delta + \beta \text{ und } V_Z = F(\delta) = A \cdot \delta^B,$$

wo die Konstanten folgende Werte ergaben:

$$\alpha = 0{,}42, \quad \beta = -0{,}07, \quad A = 23{,}9 \quad B = 4{,}75.$$

Als Endformel erhält man:

$$V_{K_n} = A \cdot \delta^B \cdot e^{-\frac{\alpha\delta + \beta}{\sqrt[4]{n}}}.$$

Nach dieser Formel wurden nun die Anfangsspannungen für Schlagweiten von 4 bis 10 mm berechnet und in Tabelle 36 zusammengestellt. Die experimentell gefundenen Werte wurden mitbeigefügt.

Die Kurven 17 geben die graphische Darstellung der berechneten Werte, die einen ähnlichen Verlauf zeigen, wie die experimentell gefundenen Kurven.

Für 4 mm ∅ wurde eine gleiche Formel aufgestellt, deren Konstante natürlich andere waren und wegen des Luftzwischenraumes auch eine andere Abhängigkeit von der Elektrodenzahl zeigten.

$$V_{D_n} = A \cdot \delta^B \cdot e^{-\frac{\alpha\delta + \beta}{\sqrt[10]{n}}}.$$

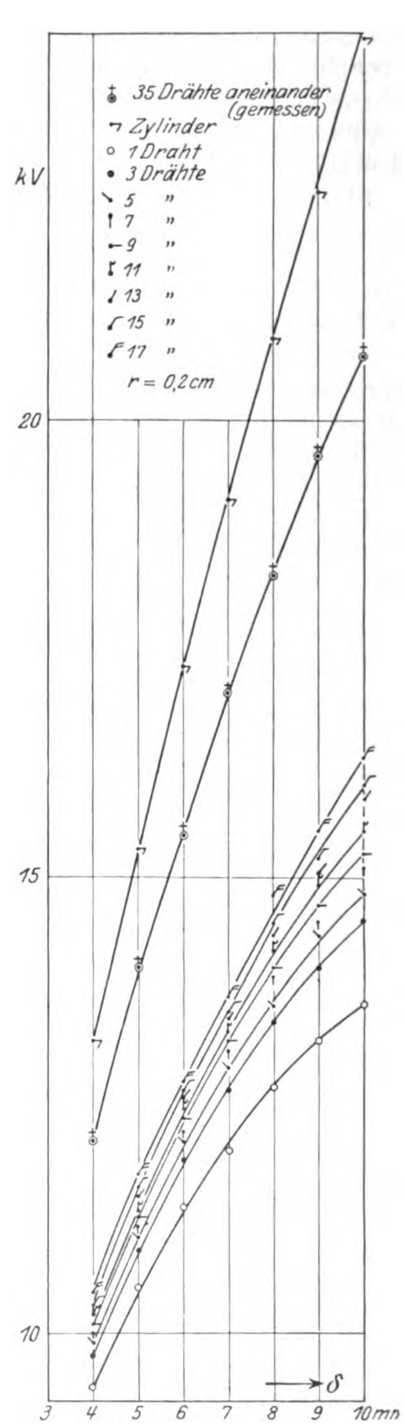
$$A = 24{,}22, \quad B = 0{,}6618, \quad \alpha = 0{,}38, \quad \beta = 0{,}19.$$

Die Kurven 18 zeigen die berechneten, in Tabelle 37 zusammengestellten Werte.

Die mit eingezeichnete experimentell gefundene Kurve für 35 aneinanderliegende Drähte kommt der Zylinderkurve bedeutend näher.

kV
Zylinder
1 Kugel
3 Kugeln
5 "
7 "
9 "
11 "
13 "
15 "
17 "
r=0,5 cm
25
20
15
12,5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 mm
→ δ

Kurven 17. Anfangsspannungen für 1 bis 17 Kugelelektroden gegen geerdete Platte, berechnet nach der gefundenen Formel.



Kurven 18. Anfangsspannungen für 1 bis 17 Drähte (4 mm ∅)—geerdete Platte nach der Formel: $V_{D_n} = A \cdot \delta^B \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot \delta + \beta}{\sqrt[1]{n}}}$.

Tabelle 36.

Anfangsspannungen 1 bis 17 Kugeln (10 mm ∅) gegen geerdete Platte.

Berechnet aus der Formel: $V_{K_n} = A \cdot \delta^B \cdot e^{-\frac{\alpha\delta+\beta}{\sqrt[4]{n}}}$.

In Klammern gemessene Werte.

δ cm	K_1	K_3	K_5	K_7	K_9	K_{11}	K_{13}	K_{15}	K_{17}	V_z
0,4	12,6 (12,6)	12,9 (12,9)	13 (12,9)	13,1 (12,9)	13,1 (13)	13,2 (13)	13,2 (13)	13,2 (13)	13,2 (13)	13,9 (13,8)
0,5	14,4 (14,6)	14,9 (15,1)	15,1 (15,1)	15,2 (15,1)	15,3 (15,1)	15,3 (15,2)	15,4 (15,2)	15,4 (15,4)	15,4 (15,4)	16,6 (16,6)
0,6	16 (16,1)	16,7 (17)	16,9 (17)	17,1 (17)	17,2 (17)	17,3 (17,3)	17,4 (17,4)	17,4 (17,4)	17,5 (17,6)	19,2 (19,2)
0,7	17,3 (17,4)	18,3 (18,5)	18,6 (18,5)	18,8 (18,5)	18,9 (18,6)	19,1 (18,9)	19,2 (19,2)	19,3 (19,2)	19,4 (19,5)	21,7 (21,8)
0,8	18,4 (18,5)	19,6 (19,5)	20,1 (19,5)	20,3 (19,5)	20,5 (19,7)	20,8 (20,8)	20,9 (20,9)	21,0 (20,9)	21 (21)	24,1 (24,3)
0,9	19,4 (19,5)	20,8 (20,8)	21,4 (20,8)	21,8 (20,8)	22 (21)	22,2 (22,1)	22,4 (22,8)	22,6 (22,9)	22,7 (23,1)	26,4 (26,6)
1,0	20,2 (20,4)	21,9 (21,6)	22,6 (22)	23,1 (22)	23,3 (23)	23,6 (23,6)	23,8 (24)	24 (24)	24,1 (24,3)	28,6 (28,6)

Tabelle 37.

Anfangsspannungen 1 bis 17 Drähte (4 mm ∅) gegen geerdete Platte.

Berechnet aus der Formel: $V_{D_n} = A \cdot \delta^B \cdot e^{-\frac{\alpha\delta+\beta}{\sqrt[10]{n}}}$.

In Klammern gemessene Werte.

δ cm	D_1	D_3	D_5	D_7	D_9	D_{11}	D_{13}	D_{15}	D_{17}	V_z
0,4	9,4 (9,7)	9,7 (9,7)	9,9 (10)	10 (10)	10,1 (10,2)	10,2 (10,3)	10,3 (10,4)	10,3 (10,4)	10,5 (10,5)	13,2 (13,1)
0,5	10,5 (10,7)	10,9 (10,9)	11,1 (11)	11,2 (11,1)	11,3 (11,3)	11,4 (11,7)	11,5 (11,8)	11,6 (11,8)	11,8 (11,8)	15,3 (15,3)
0,6	11,4 (11,3)	11,9 (11,8)	12,1 (12,1)	12,2 (12,1)	12,4 (12,2)	12,5 (12,6)	12,5 (12,9)	12,6 (13)	12,8 (13,1)	17,3 (17,3)
0,7	12 (11,7)	12,7 (12,7)	12,9 (12,7)	13,1 (12,7)	13,2 (12,9)	13,3 (13,6)	13,5 (13,9)	13,5 (13,9)	13,7 (14)	19,2 (19,2)
0,8	12,7 (12,3)	13,4 (13,4)	13,5 (13,4)	13,9 (13,4)	14 (13,6)	14,2 (14,5)	14,4 (14,8)	14,5 (14,9)	14,8 (15,1)	20,9 (20,9)
0,9	13,2 (12,7)	14 (13,9)	14,4 (13,9)	14,5 (13,9)	14,7 (14,3)	14,9 (15,3)	15 (15,9)	15,2 (15,9)	15,5 (16,1)	22,5 (22,6)
1,0	13,6 (13,2)	14,5 (14,5)	14,8 (14,6)	15,1 (14,6)	15,3 (14,8)	15,5 (16,1)	15,9 (16,7)	16 (16,7)	16,3 (16,9)	24,2 (23,6)

Zusammenfassung.

1. Zur Spannungsmessung wurde ein Hochspannungsvoltmeter angefertigt, verwendbar für Gleich- und Wechselspannung mit einem Meßbereich von 0,3 bis 50 kV.

2. Es wurde die Durchbruchsfeldstärke der Luft zwischen Plattenelektroden im homogenen Feld für 0,1 bis 1 cm Schlagweite bestimmt und mit Messungen von A. Klemm, sowie theoretischen Werten von W. O. Schumann verglichen. Meßgenauigkeit $\pm 0,5\%$.

3. Es wurden die Durchbruchsfeldstärken für 2 gleiche Kugeln von 0,5 und 0,4 cm Radius und für 2 gleiche Drähte von 0,2 und 0,045 cm Radius bei Erdung eines Poles für die Schlagweiten 0,1 bis 2,5 cm berechnet. Die Werte bringen eine Fortsetzung der Klemmschen Messungen für kleinere Elektrodenradien.

4. Es wurden die Anfangsspannungen gemessen für eine gegen mehrere Elektroden.

a) Bei Erdung der Mehrfachelektroden sinkt die Anfangsspannung, bei Kugeln für Schlagweiten $\delta > 0,5$, bei Drähten $\delta > 0,3$ cm.

b) Bei Erdung der Einzelelektrode fällt die Anfangsspannung langsamer als in a. Bei $\delta > 1,5$ cm auffallende Schwankungen.

5. Anfangsspannungen für 3 gegen 3 Elektroden bei verschiedenen Abständen untereinander für Kugeln von 10 mm Ø und Drähte von 4 mm Ø bei Schlagweiten von 1 bis 15 mm. Gegenüber Einfachelektroden eine Erhöhung der Anfangsspannung erst bei größeren Schlagweiten. Mit zunehmendem Abstand der Elektroden untereinander tritt eine Herabsetzung der Anfangsspannung ein, und zwar besonders deutlich bei größeren Schlagweiten.

6. Es wurden Anfangsspannungen von kammartigen Elektroden gemessen, indem von 1 Elektrode ausgehend je 2 hinzugefügt wurden. Bei parallelen Kämmen beobachtete man beim Übergang auf 3 Elektroden ab $\delta > 5$ mm eine geringe Zunahme der Anfangsspannung wachsend mit der Schlagweite. Eine weitere Spannungserhöhung zeigt sich bei Schlagweiten $\delta > 15$ mm, jedoch erst bei einer großen Elektrodenzahl und kleinen Elektrodenradien. Bei senkrechter Anordnung tritt eine Spannungserhöhung schon früher auf, und zwar bei $\delta = 0,3$ cm. Hier nahm die Anfangsspannung mit der Elektrodenzahl besonders bei kleinen Elektrodenradien merklich zu ($\delta = 0,7$ cm).

7. Die Bevorzugung einzelner Elektroden setzt die Spannung herab.

8. Das Dielektrikum am geerdeten Elektrodenkamm bewirkt ein Streuen der Anfangsspannungen. Die Mittelwerte nehmen bei kleinsten Schlagwerten mit der Zahl der Elektroden ab. Bei 5 mm Schlagweite beobachtet man beinahe Unabhängigkeit von der Elektrodenzahl, dann Spannungszunahme mit der Elektrodenzahl bei paralleler Anordnung. Bei senkrechter Anordnung stellt man schon bei Schlagweiten $\delta > 0,3$ cm eine Spannungserhöhung mit der Elektrodenzahl fest. Die Mittelwerte für Tempaxglas liegen niedriger als für Minosglas. Das unterschiedliche Verhalten zwischen Gleich- und Wechselspannung wurde durch Entladen der Glasplatte vermieden.

a) Die Lage des Dielektrikums ist von Bedeutung. Beim Vergleich verschiedener Stellungen des Dielektrikums erhält man die niedrigsten Werte, wenn der geerdete Kamm die Glasplatte berührt.

9. Es wurden die Anfangsspannungen für Einfachelektrode—geerdete Platte gemessen für Kugeln von 1,025 cm, 0,5 und 0,4 cm Radius sowie für Drähte von 0,2 und 0,045 cm Radius, endlich für verschiedene Stopf- und Nähnadeln. Für Kugeln und Drähte wurden die Durchbruchsfeldstärken berechnet. Es ergab sich eine Fortsetzung der Klemmschen Werte für kleinere Elektrodenradien.



10. Für 3 Elektroden in verschiedenen Abständen zueinander gegen geerdete Platte brachte die Vermehrung der Elektrodenzahl eine Spannungserhöhung, die mit Zunahme des Luftzwischenraumes wieder sank.

11. Für 1 bis 17 Elektroden—geerdete Platte werden die Anfangsspannungen gemessen, und zwar für Kugeln von 10 und 8 mm ∅ sowie für Drähte von 4 und 0,9 mm ∅. Bei Schlagweiten $\delta > 3$ mm findet beim Übergang von einer auf drei Elektroden eine Zunahme der Anfangsspannung statt, die mit der Elektrodenzahl wächst.

12. Die Bevorzugung einzelner Elektroden setzt ähnlich wie bei der symmetrischen Elektrodenanordnung die Spannung bis auf bestimmte Schlagweiten herab.

13. Ein Dielektrikum vor der Zinkscheibe veranlaßt ein Streuen der Werte. Für kleinste Schlagweiten ergaben die Mittelwerte eine Herabsetzung der Anfangsspannung mit Zunahme der Elektrodenzahl. Größere Schlagweiten ergaben eine Spannungssteigerung mit Zunahme der Elektrodenzahl besonders auffallend bei den größten gemessenen Schlagweiten und kleinen Radien.

14. Bei symmetrischer Elektrodenanordnung sowie bei Elektroden—geerdete Platte wird ein Unterschied zwischen 500 Perioden und 50 Perioden nicht beobachtet.

15. Es werden die Anfangsspannungen zweier paralleler Zylinder von 10 und 4 mm ∅ gemessen bei verschiedenen Längen. Es wurde eine Zunahme der Spannung mit der Zylinderlänge beobachtet. Die Werte für $l = 13$ cm brachten eine Übereinstimmung mit den Löberschen Werten bei 10 mm ∅, Zylinder von 4 mm ∅ zeigten niedere Werte infolge der Sprüherscheinungen. Senkrechte Stellung der Zylinder brachte eine Spannungserhöhung.

a) Bei Teilzylindern von 10 bzw. 6 mm Länge von 10 mm ∅ sinkt die Anfangsspannung mit zunehmendem Luftzwischenraum, wobei die scharfen Kanten eine weitere Herabsetzung bewirken.

16. Für Zylinder—geerdete Platte wachsen die Anfangsspannungen mit der Zylinderlänge. Die Durchbruchsfeldstärke der Luft für Zylinder von 10 und 4 mm ∅ ergibt bei 13 cm Länge Werte, die etwas unter den Löberschen liegen.

a) Für unterteilte Zylinder—Platte bewirkten das Größerwerden des Luftzwischenraumes und die scharfen Kanten eine Spannungsherabsetzung.

17. Die Mittelwertskurve für die Glimmgrenze des Glimmschutzes lag unterhalb der Meyerschen Kurve.

18. Versuche an verschiedenen Kohlenelektroden bestätigten erneut die Unabhängigkeit vom Elektrodenmaterial auch bei Mehrfachelektroden.

19. Für symmetrische Elektrodenanordnung wird eine geringe Zunahme der Anfangsspannung mit der Elektrodenzahl beobachtet, so daß man aus den Vergleichswerten nicht auf Grenzwerte schließen kann, die im Bereich der Zylinderwerte liegen.

20. Bei der Anordnung: Mehrfachelektroden—Platte findet eine Zunahme der Anfangsspannung nach einem Grenzwert hin statt, der in Nähe der entsprechenden Zylinder lag.

21. Für Anfangsspannungen 1 bis 17 Elektroden gegen geerdete Platte, bezogen auf Anfangsspannungen Zylinder—Platte, wurde folgende Formel gefunden:

$$V_{Kn} = A \cdot \delta^{B} \cdot e^{-\frac{\alpha\delta + \beta}{\sqrt[x]{n}}}.$$

Literaturverzeichnis.

J. Algermissen, Über das statische Funkenpotential bei großen Schlagweiten. Ann. d. Phys. 19, 1007, 1906.
W. Estorff, Die Kugelfunkenstrecke. ETZ 37, 60, 1906.

W. Gerlach und E. Meyer, Über die Auslösung von Spitzenentladungen durch ultraviolettes Licht. Verh. d. Phys. Ges. XV, 1037, 1913.

E. Goebeler, Über die Dielektrischen Eigenschaften der Luft und einiger fester Isoliermaterialien bei hochgespannter Hochfrequenz. Arch. f. Elektrot. XIV, 491, 1925.

J. Herweg, Über die Herabsetzung des Funkenpotentials durch Bestrahlung der Funkenstrecke mit Kathodenstrahlen. Ann. d. Phys. 24, 326, 1907.

F. Kesselring, Theorie des Glimmschutzes. Arch. f. Elektrot. XVI, 1926.

A. Klemm, Anfangsspannungen und Durchbruchsfeldstärke von Kugelelektroden bei Gleichspannung. Arch. f. Elektrot. XII, 553, 1923.

H. Löber, Anfangsspannungen und Durchbruchsfeldstärke von parallelen Zylinderelektroden. Archiv. f. Elektrot. XIV, 511, 1925.

G. J. Meyer, Der Glimmschutz, Teubner, 1923, 1924.

G. Mie, Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator. Ann. f. Phys. 13, 857, 1904.

C. Müller, Messung hoher Spannungen und Bestimmung des Funkenpotentials für große Schlagweiten. Ann. d. Phys. 28, 585, 1909.

W. Rogowski, Die elektrische Festigkeit am Rande des Plattenkondensators. Arch. f. Elektrot. XII. 1923.

W. O. Schumann, Über die elektrische Festigkeit der Luft. Arch. f. Elektrot. XI, 1, 1922.

— Elektrische Durchbruchsfeldstärke von Gasen. Julius Springer, Berlin 1923.

A. Schwaiger, Die Überschlagsfestigkeit des Porzellans. ETZ 26, 875, 1922.

— Elektrische Festigkeitslehre. Julius Springer, Berlin 1925.

M. Toepler, Grenzpotentialdifferenz der elektrischen Entladung in Luft von Atmosphärendruck. Ann. d. Phys. 7, 477, 1902.

— Über Funkenlängen und Anfangsspannungen in Luft von Atmosphärendruck. Ann. d. Phys. 10, 730, 1903.

— Über Funkenspannungen. Ann. d. Phys. 19, 191, 1906 und 22, 119, 1907.

— Funkenspannungen zwischen Kugelelektroden. Ann. d. Phys. 29, 153, 1909.

— Anfangsspannungen zwischen Kugeln in Zylinderkäfigen. Zeitschr. f. Techn. Phys. 10, 327, 1922.

E. Warburg, Über die Verzögerung bei der Funkenentladung. Wied. Ann. 62, 385, 1897.

— Über die Wirkung der Strahlung auf die Funkenentladung. Ann. d. Phys. 5, 811, 1901.

Warburg und Gorton, Über die Wirkung der Bestrahlung, den Einfluß der Temperatur und das Verhalten der Halogene bei der Spitzenentladung. Ann. d. Phys. 18, 128, 1905.

W. Weicker, Dissertation Dresden 1910.

J. B. Whitehead u. Jsshiki, The Corona Voltmeter and the Electric Strength of Air. Journal of the Amer. Inst. of El. Engin. May 1920, p. 441.

Die magnetischen Felder in leerlaufenden Synchronmaschinen.

Von

Dr. phil. et Dr.-Ing. **Ernst Weber,** Wien.

Inhaltsverzeichnis der Arbeit.

a) Die Felderregerkurven der Synchronmaschinen.
1. Allgemeiner Begriff der Felderregerkurve.
2. Die Felderregerkurve der Nutpolmaschinen.
3. Die Felderregerkurve der Schenkelpolmaschinen.
b) Die Normal-Leerlaufcharakteristik der Synchronmaschinen.
c) Die mittleren Feldkurven der Synchronmaschinen.
1. Die Ermittlung der mittleren Feldkurven aus der Leerlaufcharakteristik.
2. Die mittleren Feldkurven der Nutpolmaschinen.
3. Die mittleren Feldkurven der Schenkelpolmaschinen.
d) Die scheinbare Polbedeckung der Synchronmaschinen.
1. Die Ermittlung der scheinbaren Polbedeckung.
2. Die scheinbare Polbedeckung der Nutpolmaschinen.
3. Die scheinbare Polbedeckung der Schenkelpolmaschinen.
e) Die Feldkurven der Synchronmaschinen bei Berücksichtigung der Nutungen.
1. Der Einfluß einer Nutung auf die mittlere Feldkurve.
2. Die wirklichen Feldkurven der Nutpolmaschinen.
3. Die wirklichen Feldkurven der Schenkelpolmaschinen.
Zusammenfassung.

Einleitung.

Die magnetische Beanspruchung der modernen Synchronmaschinen ist durch die Rücksichtnahme auf Kurzschlußerscheinungen, Preiswirtschaft, Erwärmungsgrenzen und Materialerfahrungen so weitgehend eingeschränkt, daß man geradezu von magnetischer Gleichartigkeit sprechen kann. Dies findet am sprechendsten seinen Ausdruck in der Tatsache, daß bei Zeichnung der auf den normalen Leerlaufpunkt (Nennspannung und zugehörigen Erregerstrom) bezogenen Leerlauf-Charakteristik sich ein sehr guter Mittelwert für alle normalen modernen Synchronmaschinen angeben läßt, die sogenannte „Normal-Leerlaufcharakteristik". Diese selbst findet eine sehr einfache und leicht weiter zu behandelnde mathematische Darstellung durch eine Exponentialfunktion ähnlich der Erwärmungskurve.

Mit der Möglichkeit, die Leerlaufcharakteristik der Synchronmaschinen in vollkommen allgemeiner Weise mathematisch erfassen zu können, ist nun ein neuer Weg zur Behandlung aller diese Maschinenart betreffenden Probleme gewonnen. Der erste Schritt auf diesem Wege ist im folgenden gemacht worden, indem die Leerlauffelder der Synchronmaschinen in Fourier-Reihenzerlegung abhängig vom Sättigungszustande, d. h. vom Erregerstrom untersucht wurden. Weitere Arbeiten sind im Gange, insbesondere zur Ermittlung der wirklichen Eisenverluste bei Leerlauf.

In Synchronmaschinen erzeugt die mit Gleichstrom erregte Läuferwicklung ein starres Feld, das infolge der Drehung des Läufers, mit diesem fest verbunden, mit der mechanischen Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{2\pi n}{60} \cdot 1/\text{sec}$ über den Ständer und dessen Wicklungsanordnung eilt, wenn n die Zahl der Umdrehungen je Minute bedeutet. Besitzt der Läufer 2p Pole, so ist elektrisch, da das Erregerfeld in jedem Polpaare gleichen Verlauf hat, die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = p \cdot \Omega = 2\pi f \ 1/\text{sec}. \tag{1}$$

Die Ausbildung des Läufers in Synchronmaschinen und damit die Form des Erregerfeldes läßt zwei Typen unterscheiden:



a) die Nutpolmaschinen (Turbomaschinen), deren Läufer eine zylindrische Trommel mit tief eingehobelten Nuten darstellt, in denen die Wicklung spulenartig verteilt wird, und

b) die Schenkelpolmaschinen, bei welchen die Wicklung konzentrisch um einen vom Magnetkörper radial abragenden Kern, den Polkern, angeordnet ist.

Diese Scheidung wird im folgenden stets dort hervortreten, wo ein Eingehen auf spezielle Verhältnisse geboten scheint.

a) Die Felderregerkurven der Synchronmaschinen.

1. Allgemeiner Begriff der Felderregerkurve.

Es sei eine Reihe von Leitern parallel und wesentlich flächenhaft angeordnet, so daß man die elektrische Stromverteilung längs dieser Fläche als Funktion einer einzigen unabhängig veränderlichen Koordinate angeben kann (s. Bild 1). Bildet man bei einer solchen Anordnung das Linienintegral der magnetischen Feldstärke, etwa im angedeuteten Sinne des Bildes, so erhält man nach bekannter Definition die $\frac{4\pi}{10}$-fache Summe der eingeschlossenen Ampereleiter, die mit Θ bezeichnet sei:

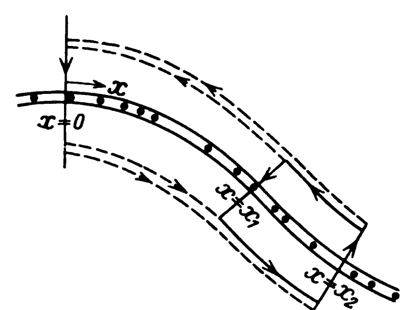


Bild 1. Zum allgemeinen Begriffe der Felderregerkurve.

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{10} \cdot \Theta. \qquad (2)$$

Ist die Stromverteilung in der Fläche als Strombelagsfunktion A (x) bekannt, so ist die elektrische Durchflutung Θ aus Gleichung (2) nach Bild 1 auch anzugeben als

$$\Theta = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\, dx$$

oder, falls man eine mathematische Umformung vornimmt, durch Zerlegung des Integrals

$$\Theta = \int_{x_1}^{0} A(x)\, dx + \int_{0}^{x_2} A(x)\, dx = \int_{0}^{x_2} A(x)\, dx - \int_{0}^{x_1} A(x)\, dx. \qquad (4)$$

Setzt man die Integrale in (4), welche Funktionen ihrer oberen Grenzen darstellen, neuen Funktionen gleich, indem man allgemein

$$\int_{0}^{x} A(x)\, dx = F(x) \qquad (5)$$

als „Felderregerkurve“ definiert, so gibt (4) bezw. (2)

$$\Theta = F(x_2) - F(x_1) \qquad (6)$$

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{10} \cdot [F(x_2) - F(x_1)]. \qquad (7)$$

Die Felderregerkurve F (x) ist also die Integralkurve des Strombelages A (x), wobei vorläufig über die Lage des Nullpunktes noch keine Festsetzung getroffen wurde. Im allgemeinen läßt sich auch keine weitere Bestimmung einführen. In dem Falle jedoch, in dem hauptsächlich Gebrauch von der Felderregerkurve gemacht wird, in elektrischen Maschinen, ist durch die Periodizität der Wicklung des erregenden Teiles eine natürliche Festlegung gegeben.

Insbesondere in Synchronmaschinen herrscht, was das erregende Stromsystem betrifft, innerhalb jeder Polpaarteilung Periodizität (wenn man von den wenigen Fällen absieht, in denen eine absichtliche Verzerrung der Polfelder durch Versetzung

der Polschuhe, ungleichmäßigen Luftspalt usw. stattfindet, um etwa die Spannungskurve des Generators zu verbessern). Hier ist die natürliche Lage des Nullpunktes in der Pollückenmitte, so daß stets

$$F(+x) = F(-x), \qquad F(0) = 0$$

gilt und die Linienintegrale der magnetischen Feldstärke, die man ebenso zweckmäßig über $x_1 = -x$, $x_2 = +x$ führt, die Form annehmen

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{10}\, 2\, F(x). \tag{8}$$

Bekanntlich liegt der Hauptanteil des Linienintegrals im Luftspalt, weil in Luft magnetische Feldstärke und magnetische Induktion gleiche Größe haben. Wegen des (nahezu) senkrechten Eintrittes der Feldlinien in die den Luftspalt begrenzenden Eisenflächen wird dort die magnetische Induktion die gleiche bleiben wie im Luftspalte, doch geht die magnetische Feldstärke im umgekehrten Verhältnisse mit der Permeabilität des Eisens zurück, so daß der Eisenweg der Kraftlinien zum Linienintegral bis zu ziemlich hohen Sättigungen nur wenig Beitrag liefert. Um diesen dennoch in Rechnung zu ziehen, denken wir die Eisenkörper unendlich permeabel, legen ihren wahren Widerstand, in einen äquivalenten Luftspalt eingerechnet, zum wirklichen Luftspalt

$$\delta'' = \delta + \delta_{\text{äqu}} \tag{9}$$

und rechnen weiterhin mit diesem Ersatzluftspalt für den Kraftlinienweg in der ganzen Maschine.

Statt des geschlossenen magnetischen Linienintegrals in (8) dürfen wir auch dessen halben Wert betrachten, da ja zur Pollückenmitte volle Symmetrie herrscht. Mit Errinnerung an (9) wird letzterer $H\delta''$ und wir haben die einfache Beziehung

$$H\delta'' = \frac{4\pi}{10} F(x), \tag{10}$$

woraus sich sofort die magnetische Feldstärke im Luftspalte errechnet

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{1}{\delta''} F(x), \tag{11}$$

und damit tritt eigentlich erst der Sinn der Definition (5) in Erscheinung. Aus der Kenntnis der Felderregerkurve folgt sofort jene der Feldstärke im Luftspalt, falls der scheinbare Luftspalt der Maschine gegeben ist. Voraussetzung ist dabei volle Symmetrie der Felderregerkurve und des scheinbaren Luftspaltes zur Pollückenmitte, was beides für Leerlauf zutrifft.

Im weiteren sollen die speziellen Fälle der Felderregerkurven, die für uns in Betracht kommen, untersucht werden.

2. Die Felderregerkurve der Nutpolmaschine.

Bild 2 zeigt die schematische Skizze des Querschnittes durch einen Nutpol mit gegenüberliegender Ständereisenfläche. In Polmitte findet sich ein ungenuteter Kern und symmetrisch zu diesem eine je nach der Größe der Maschine verschiedene

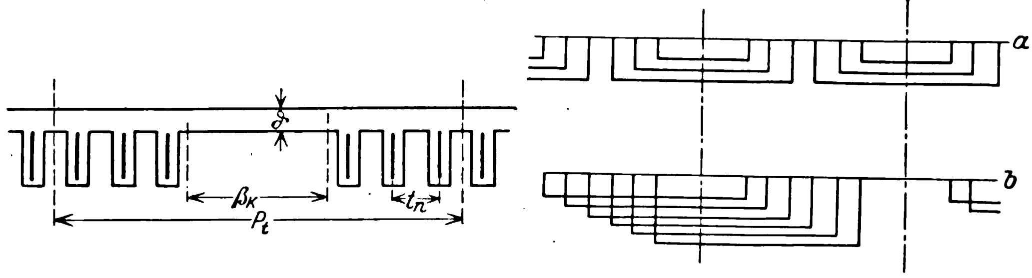


Bild 2. Schematischer Querschnitt durch einen Nutpol.

Bild 3. Ersetzung der Rotorwicklung (a), durch Durchmesserspulen (b).



Anzahl von Nuten. Die Wicklung wird gewöhnlich symmetrisch zur Polmitte spulenförmig eingebracht (siehe Bild 3a). Zur bequemeren rechnerischen Erfassung des Feldes können wir aber diese Schaltung ersetzen durch jene des Bildes 3b, welche lauter „Durchmesserspulen", deren Weite gleich der Polteilung, also der halben Grundwellenlänge gleich ist, vorsieht. Daß diese Änderung für die Felderregerkurve ohne Belang ist, läßt deren Definition (5) erkennen, denn der Strombelag wird ja nicht geändert.

Die Felderregerkurve einer Durchmesserspule.

Nachdem sich in jedem Polpaar die gleiche Wicklungsanordnung vorfindet, ist es nur nötig, ein einzelnes Polpaar als Periodengrundeinheit zu betrachten. Wir legen daher vorläufig den Ursprung $x = 0$ des eindimensionalen Koordinatensystems in die Mitte einer Spule, die wieder in der Mitte eines Polpaares gelegen sei. Bild 4b zeigt die geometrische Anordnung. Sind in einer Nut S_n-Leiter vorhanden und a-fach parallelgeschaltet, so ist das Stromvolumen der Nut, wenn der Serienstrom J Ampere betrage, $\frac{S_n}{a} \cdot J$ Ampereleiter. Das Vorzeichen ist für beide Spulenseiten

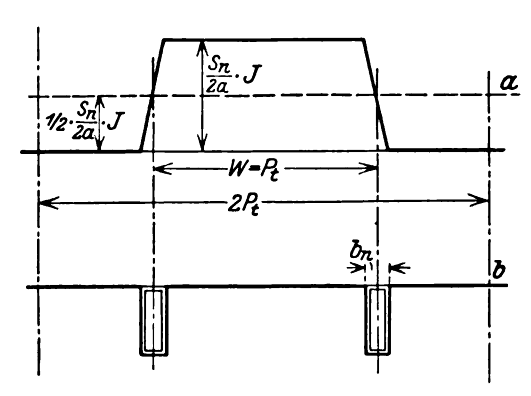


Bild 4. Die Felderregerkurve einer Durchmesserspule.

natürlich entgegengesetzt anzunehmen, so daß die Felderregerkurve bis zum Leiterbeginn der linken Spulenseite den Wert 0 aufweist, über der Leiterbreite b_{cu} linear (gleichmäßige Stromverteilung vorausgesetzt) bis zum Betrage $\frac{S_n}{a}$ J anwächst, vom Ende der linken bis Anfang der rechten Spulenseite diesen Wert behält und über der rechten Leiterbreite wegen des entgegengesetzten Vorzeichens wieder linear auf 0 abnimmt (siehe Bild 4a). Dabei ist der Nullpunkt willkürlich nach $x' = -P_t$ verlegt gewesen, in den Bildanfang, wenn P_t die Polteilung bedeutet. Machen wir von der natürlichen Bestimmung Gebrauch, daß wegen der Periodizität positive und negative Fläche der Felderregerkurve gleich sein sollen, so muß der Nullpunkt der Felderregerkurve in den Mittelpunkt einer Spulenseite, etwa der linken gelegt werden, wohin wir auch jetzt den Kordinatenanfangspunkt verschieben wollen. Die Amplitude der Felderregerkurve ist jetzt nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{S_n}{a} \cdot J$ Ampereleiter.

Die Fouriersche Reihendarstellung einer allgemeinen Trapezkurve lautet[1]:

$$\frac{4}{\pi} A \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\sin \nu \xi \pi}{\nu \xi \pi} \cdot \sin \nu \frac{2 \pi x}{\lambda}, \tag{12}$$

[1] Z. B. nach Rziha-Seidener, Bd. 1, S. 50, 6. Aufl.

wenn A die Amplitude und ξ die Projektion der schiefen Seite, bezogen auf die Grundlinie $\frac{\lambda}{2}$ (halbe Grundwellenlänge) des Trapezes, ist. In unserem Falle ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_n}{a} \cdot i, \quad \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_{cu}}{P_t}, \quad \lambda = 2 P_t \tag{13}$$

zu setzen, so daß (12) nunmehr geschrieben werden kann:

$$F_1(x) = \frac{2}{\pi} \frac{S_n}{a} i \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \psi_\nu \sin \frac{\nu x \pi}{P_t} \tag{14}$$

mit der Abkürzung

$$\psi_\nu = \frac{1}{\nu} \frac{\sin \frac{\nu \pi}{2} \cdot \frac{b_{cu}}{P_t}}{\frac{\nu \pi}{2} \cdot \frac{b_{cu}}{P_t}} = \frac{1}{\nu} \cdot \sigma_\nu \left(\frac{b_{cu}}{P_t}\right). \tag{15}$$

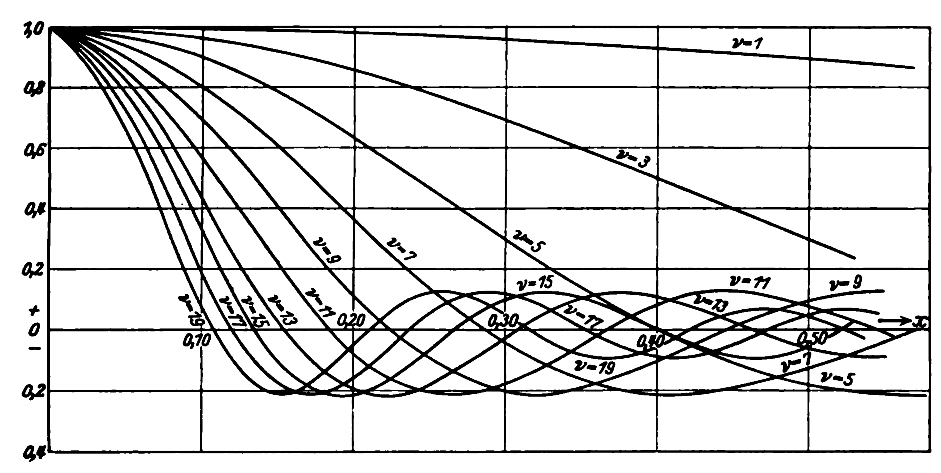


Bild 5. Die Funktion $\sigma(x) = \frac{\sin \frac{\nu \pi}{2} x}{\frac{\nu \pi}{2} x}$ für die ungeraden Zahlen bis $\nu = 15$.

In Bild 5 ist der Wert $\sigma_\nu(x)$ für $\nu = 1$ bis $\nu = 19$ eingetragen, man kann also direkt $\sigma_\nu\left(\frac{b_{cu}}{P_t}\right)$ als Funktion von $\frac{b_{cu}}{P_t}$ ablesen. Man bemerkt sofort aus der Tafel, daß die Kupferbreite keinen vernachlässigbaren Einfluß erlangt, wenn sie über $0{,}04\, P_t$ wächst, weil insbesondere die Werte für die höheren Harmonischen rasch abnehmen.

Die Gesamtfelderregerkurve.

Aus der Übereinanderlagerung der Felderregerkurven von soviel Einzelspulen als Nuten je Pol vorhanden sind, gewinnt man die Gesamtfelderregerkurve eines Nutpoles. Die Verschiebung der Einzelfelder beträgt je eine Nutteilung, und wenn β Nuten zwischen 2 Polkernen (nach Bild 2) liegen, so ist der analytische Summenausdruck:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{S_n}{a} i \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \left\{ \psi_\nu \sum_{\mu=0}^{\beta-1} \sin \frac{\nu \pi}{P_t} (x - \mu t_n) \right\} \tag{16}$$

zu bilden. Die Summe in der geschlungenen Klammer läßt sich nach einer allgemeinen Rechenregel angeben mit

$$\frac{\sin\frac{\nu\pi}{P_t}\cdot\frac{\beta}{2}t_n}{\sin\frac{\nu\pi}{P_t}\cdot\frac{1}{2}t_n}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{P_t}\left(x-\frac{\beta-1}{2}t_n\right).$$

Ist die Nutteilung im Läufer einer Nutenzahl z je Pol entsprechend ausgeführt, gilt also

$$P_t = z\cdot t_n, \tag{17}$$

so läßt sich der Bruch auch schreiben:

$$\beta\cdot\frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\frac{\beta}{z}}{\frac{\nu\pi}{2}\frac{\beta}{z}}\cdot\frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}\frac{1}{z}}{\frac{\nu\pi}{2}\frac{1}{z}}=\beta\,\frac{\sigma_\nu\left(\frac{\beta}{z}\right)}{\sigma_\nu\left(\frac{1}{z}\right)} \tag{18}$$

und damit wird (16):

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\left(\beta\frac{S_n}{a}i\right)\cdot\sum_{\nu=1,3}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sigma_\nu\left(\frac{b_{cu}}{P_t}\right)\frac{\sigma_\nu\left(\frac{\beta}{z}\right)}{\sigma_\nu\left(\frac{1}{z}\right)}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{P_t}\left(x-\frac{\beta-1}{2}t_n\right). \tag{19}$$

Der Subtrahend von x stellt eine Verschiebung des Ursprunges von der Leitermitte der ersten linken Spulenseite nach rechts in die Mitte der linken Hälfte der ganzen Spulengruppe dar, also genau in die Pollückenmitte, womit der Anschluß an Abschnitt 1 gefunden ist. Wir lassen daher die Größe $\frac{\beta-1}{2}t_n$ weg und legen endgültig den Ursprung in die Pollückenmitte. Fassen wir noch die von x freien Faktoren unter dem Summenzeichen als Amperewindungsfaktor φ_ν zusammen:

$$\varphi_\nu=\frac{1}{\nu}\cdot\sigma_\nu\left(\frac{b_{cu}}{P_t}\right)\cdot\frac{\sigma_\nu\left(\frac{\beta}{z}\right)}{\sigma_\nu\left(\frac{1}{z}\right)} \tag{20}$$

und berücksichtigen wir die Definition des Strombelages AS_1 des Läufers (bezogen auf den Ständerinnendurchmesser D_i):

$$AS_1=\frac{1}{P_t}\beta\cdot\frac{S_n}{a}i, \tag{21}$$

so wird endlich die Felderregerkurve (19) zu

$$F(x)=\frac{2}{\pi}P_t\cdot AS_1\cdot\sum_{\nu=1,3}^{\infty}\varphi_\nu\sin\nu\frac{x\pi}{P_t}. \tag{22}$$

Beispiel. Es seien gegeben:

Polteilung $P_t = 110$ cm,

Strombelag im Läufer (bezogen auf den Ständerinnendurchmesser), $AS_1 = 500$ A/cm,

Kupferbreite in der Läufernut (bezogen auf den Ständerinnendurchmesser) $b_{cu} = 4$ cm,

die der Nutenteilung entsprechende Nutenzahl je Pol $z = 12$,

Zahl der bewickelten Nuten je Pol $\beta = 8$;

damit rechnen sich die Amperewindungsfaktoren nach (20).

Tabelle 1.

$\nu =$	1	3	5	7	9	11	13
$\sigma_\nu\left(\frac{4}{110}\right)$	+ 0,966	+ 0,990	+ 0,978	+ 0,961	+ 0,933	+ 0,910	+ 0,898
$\sigma_\nu\left(\frac{2}{3}\right)$	+ 0,827	0,000	— 0,166	+ 0,118	0,000	— 0,075	+ 0,064
$\sigma_\nu\left(\frac{1}{12}\right)$	+ 0,994	+ 0,972	+ 0,920	+ 0,856	+ 0,774	+ 0,680	+ 0,580
φ_ν	+ 0,829	0,000	— 0,036	+ 0,019	0,000	— 0,009	+ 0,008

$\nu =$	15	17	19	21	23	25	27
$\sigma_\nu\left(\frac{4}{110}\right)$	+ 0,864	+ 0,830	+ 0,802	+ 0,777	+ 0,737	+ 0,694	+ 0,649
$\sigma_\nu\left(\frac{2}{3}\right)$	0,000	— 0,049	+ 0,044	0,000	— 0,036	+ 0,033	0,000
$\sigma_\nu\left(\frac{1}{12}\right)$	+ 0,500	+ 0,357	+ 0,245	+ 0,139	+ 0,040	— 0,037	— 0,108
φ_ν	0,000	— 0,007	+ 0,0075	0,000	— 0,028	— 0,025	0,000

Weil der Bewicklungsfaktor $\frac{\beta}{z} = \frac{2}{3}$ ist, fallen alle harmonischen Oberwellen, die durch 3 teilbar sind, weg.

Man ersieht, daß ziemlich alle Oberwellen nur gering vertreten sind, von Bedeutung überhaupt erscheint nur $\nu = 5$. Doch treten jene Oberwellen, deren Ordnung der Zahl der Nuten je Pol am nächsten kommt, stärker hervor. Dies hängt mit dem Stufencharakter der Felderregerkurve zusammen, da sie als Summe der um je eine Nutteilung verschobenen trapezförmigen Felderregerkurven der Einzelspulen gebildet wurde.

3. Die Felderregerkurve der Schenkelpolmaschine.

Wir hatten nach (5) die Felderregerkurve als die Integralkurve des Strombelages definiert und waren auf rein flächenhafte Leiteranordnungen beschränkt.

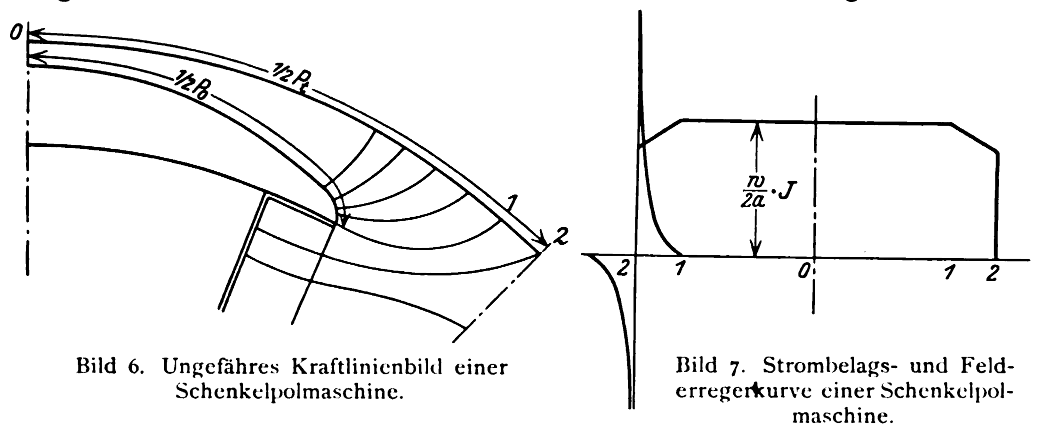


Bild 6. Ungefähres Kraftlinienbild einer Schenkelpolmaschine.

Bild 7. Strombelags- und Felderregerkurve einer Schenkelpolmaschine.

Im Falle eines ausgeprägten Poles müssen wir, um mit der Felderregerkurve arbeiten zu können, deren Definitionsbereich erweitern. Dies kann leicht nach der folgenden Überlegung geschehen.

Zeichnen wir gefühlsweise das Kraftlinienbild im Luftspalt zwischen der Poloberfläche und der als glatt angenommenen Ständeroberfläche und verfolgen wir die Kraftlinien eine Strecke weit ins Poleisen hinein, wie Bild 6 zeigt.

Das Durchflutungsgesetz (2) gilt unabhängig von der Lage des Stromvolumens innerhalb der einschließenden Kraftlinien. Verlegen wir also die gesamte elektrische Strömung der Erregerwicklung in die Ständeroberfläche als Strombelag, indem wir die je zwischen benachbarten Kraftlinien eingeschlossene Ampereleiterzahl zwischen ihnen bis zur Ständeroberfläche fortschreitend weiterschieben und sie durch die Bogenlänge, welche die Mündungsstellen der beiden Kraftlinien begrenzen, dividieren. Wir erhalten eine Strombelagskurve nach Bild 7, wenn die äußerste noch sämtliche Ampereleiter umfassende Kraftlinie bei $x = \frac{1-\alpha}{2} P_t$ in den Ständer tritt, wobei $\alpha P_t = P_b$ den Polbogen, gemessen auf der Poloberfläche, bedeutet. Diese Kurve wird für $x = 0$ unendlich, weil wegen der Streuung der Pole gegeneinander die letzte den Ständer überhaupt noch treffende Kraftlinie mit einer endlichen Ampereleiterzahl verkettet ist, die auf den Berührungspunkt mit der Bogenlänge 0 zurückgeführt, natürlich einen unendlichen Strombelag hervorruft, der jedoch nur ideell theoretisch, nicht praktisch zu denken ist.

Die Felderregerkurve, als Integralkurve, ist ebenfalls in Bild 7 dargestellt. Ihre Amplitude muß $\frac{w}{a} i$ sein, wenn w Windungen je Pol in a-facher Parallelschaltung vorhanden sind und der Serienstrom i Ampere beträgt. Den Wert der Felderregerkurve in der Pollückenmitte kann man im Mittel mit 70% des Höchstwertes schätzen. Doch fällt dieser Teil schon in den Bereich des rasch zunehmenden Luftspaltes, der in praktischen Fällen dort überhaupt nicht mehr genau definierbar ist, so daß es ziemlich gleichgültig ist, ob wir die oben abgeleitete Form beibehalten wollen, oder der rascheren Erfassung wegen einfach eine Rechteckkurve voraussetzen, wie es in der Literatur bisher geschehen ist.

Der Entwicklung der Felderregerkurve in eine Fouriersche Reihe legen wir jedenfalls der Bequemlichkeit halber eine Rechteckkurve vom Höchstwerte $\frac{w}{a} i$ zugrunde. Die Reihe lautet[1] allgemein

$$\frac{4}{\pi} A \sum_{\nu = 1,3}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu \frac{2 x \pi}{\lambda}. \tag{23}$$

In unserem Falle ist nun

$$A = \frac{w}{a} i, \qquad \lambda = 2 P_t. \tag{24}$$

so daß wir erhalten

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{w}{a} i \sum_{\nu = 1,3}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu \frac{x \pi}{P_t}. \tag{25}$$

Führen wir für die Schenkelpolmaschinen einen fiktiven Strombelag ein, nach der (21) entsprechenden Definition

$$A S_1 = 2 \frac{w}{a} i_1 \frac{1}{P_t} \tag{26}$$

(der Faktor 2 steht, weil Ampereleiter in Rechnung zu ziehen sind und eine Windung 2 Leiter umfaßt), so erhalten wir damit einen (22) ähnlichen Ausdruck für die Felderregerkurve

[1] Z. B. Rziha-Seidener, Bd. 1, S. 49, VI. Aufl.

$$F(x) = \frac{2}{\pi} P_t A S_1 \cdot \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu \frac{x \pi}{P_t} \qquad (27)$$

der sich nur in der Fourierreihe unterscheidet.

Beispiel.

Wie für Nutpolmaschinen, so wollen wir auch für Schenkelpolmaschinen ein Beispiel betrachten. Hier interessiert uns vor allem der gestaltliche Vergleich der beiden Felderregerkurven, weshalb in der Tabelle 2 die Amplituden der Fourierschen Reihenglieder aus (22) und (27) einander gegenübergestellt sind.

Tabelle 2.

$\nu =$	1	3	5	7	9	11	13	15
φ_ν	+ 0,829	0,000	— 0,036	+ 0,019	0,000	— 0,009	+ 0,008	0,000
$\frac{1}{\nu}$	+ 1,000	+ 0,333	+ 0,200	+ 0,143	+ 0,111	+ 0,091	+ 0,077	+ 0,067

Man bemerkt sofort, daß im Falle der Schenkelpolmaschine alle Oberwellen und nur langsam abnehmend vorhanden sind, während die Felderregerkurve der Nutpolmaschinen nur mit der Grundwelle zu rechnen gestattet.

b) Die Normal-Leerlaufcharakteristik der Synchronmaschinen.

Legt man den Leerlaufpunkt für normale effektive Spannung $E = E_n$ durch die Erregung i_n fest und bezieht die gesamte Leerlaufcharakteristik, also die Ma-

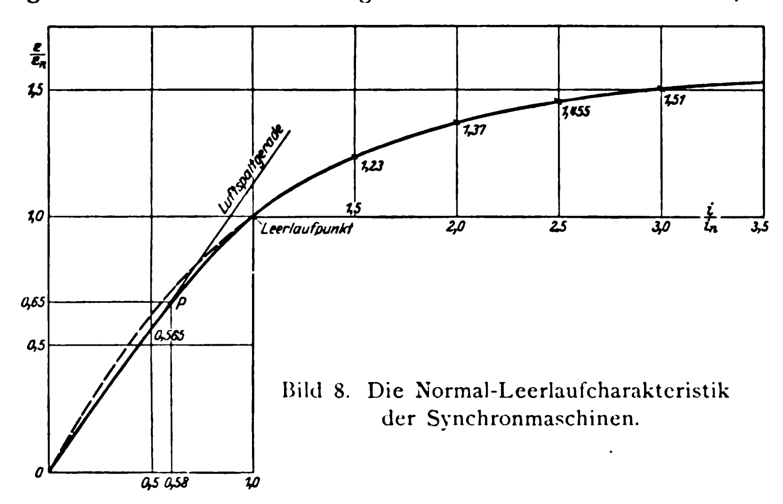


Bild 8. Die Normal-Leerlaufcharakteristik der Synchronmaschinen.

schinenspannung abhängig vom Erregerstrom (Magnetisierungsstrom) auf diesen Leerlaufpunkt, so erhält man für die verschiedensten modernen Maschinen überraschend gleichliegende reduzierte Leerlaufkurven. Unter modernen Maschinen sind solche zu verstehen, die bereits den heute durchwegs angestrebten Ausnützungsgrad, insbesondere in bezug auf magnetische Beanspruchungen, erreicht haben. Für solche Maschinen also, gleichgültig ob Nutpol- oder Schenkelpoltype, kann man eine einzige Normal-Leerlaufcharakteristik als ziemlich genaues Mittel bis auf Abweichungen von höchstens $\pm 5\%$ genau angeben (siehe Bild 8).

Es ist also nur nötig, die Daten des Leerlaufpunktes E_n, i_n anzugeben, und man kann bereits jeden anderen Punkt der wahren Leerlaufcharakteristik aus den bezogenen Punkten der Normalcharakteristik berechnen. Daß man jedoch die spezielle Charakteristik der Einzelmaschine überhaupt nicht mehr benötigt, wird klar, wenn man die Gegenamperewindungen des Ständers ebenfalls auf den Leererregerlaufstrom i_n bezieht und gleicherweise die Streuspannungen prozentuell bezogen auf die Normalspannung angibt. Denn dann kann in die gleiche Normalcharakteristik das jeweilige bezogene Potiersche Dreieck eingezeichnet werden, und man ist von der umständlichen Einzelrechnung befreit. Diese Überlegungen scheinen besonders weittragend für Maschinenreihen bzw. -normierungen zu sein und werden auch in einer Erweiterung von Vorschriften für elektrotechnische Maschinen Anlaß zu genauer gefaßten Bestimmungen sein können.

Für die graphische Behandlung genügte die Angabe zugeordneter Punkte etwa in Form der folgenden Tabelle:

Tabelle 3.

$\frac{i}{i_n}=$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\frac{E}{E_n}=$	0,0	0,56	1,00	1,23	1,37	1,45	1,51	1,54

Für die rechnerische Behandlung der weiterhin sich ergebenden Probleme jedoch muß es als außerordentlich günstig zu bezeichnen sein, wenn sich eine einfache Funktion findet, die die angegebenen Punkte stetig verbindet. Die Gestalt läßt auf eine Exponentialkurve schließen und tatsächlich genügt der Ansatz

$$\frac{E}{E_n} = 1{,}584\left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right) \tag{28}$$

vollkommen identisch der obigen Punktreihe für $\frac{E}{E_n} > 1$. Die allgemeine Fassung war zunächst

$$\frac{E}{E_n} = a\left(1 - e^{-b\frac{i}{i_n}}\right) \tag{29}$$

und die Zuordnung zweier Punkte lieferte dann die Konstanten.

Für Sondermaschinen, oder Maschinen, deren Leerlaufcharakteristik sich nicht mit der in (28) angegebenen Kurve deckt, wird es mit Hilfe der allgemeinen Gleichung (29) leicht möglich sein, eine entsprechende Funktion zu bestimmen, wenn nur die Konstanten a und b richtig gewählt werden. Die weitere Rechnung ist im allgemeinen vollkommen analog zu führen, weshalb wir im folgenden nur den häufigsten Fall der (28) entsprechenden Leerlaufcharakteristik behandeln werden.

Noch ist auf den Mangel der Übereinstimmung in dem Bereiche sehr geringer Erregerströme aufmerksam zu machen. Dort spielt der Widerstand der Eisenwege des magnetischen Flusses keine Rolle neben dem hohen Widerstande des Luftspaltes, weshalb die Beziehung Feld zu Erregerstrom in eine Gerade, die „Luftspaltcharakteristik" übergeht, wie das Bild 8 für die Maschinencharakteristiken zeigt. Dies ist nun bei der Exponentialkurve leider nicht der Fall. Man könnte sich so helfen, daß man die Leerlaufcharakteristik nicht durch eine einzige Kurve definiert, sondern die Form (28) nur für $\frac{E}{E_n} > 1$ beibehält, also für $E > E_n$, dagegen für $\frac{E}{E_n} < 1$ eine andere Funktion ansetzt, welche hier besser übereinstimmt. Da aber im allgemeinen der Bereich geringer Sättigungen außer im Kurzschlußfalle bei Nennstrom im Ständer nicht von Bedeutung ist, so kann mit (29) als etwas zu günstig im genannten Bereiche ruhig gerechnet werden.



Anders liegt die Sache allerdings mit der Bestimmung der später nötigen Luftspaltgeraden. Man darf sie natürlich nicht als Tangente im Ursprunge an die Kurve (28) definieren, wie bei der wirklichen Charakteristik, denn man bekäme viel zu hohe Werte. Wir werden hier auf die Normalcharakteristik selbst zurückgehen, deren Tangente im Ursprung für $\frac{i}{i_n} = 1$ den Punkt $\frac{E}{E_n} = 1{,}13$ liefert, weshalb die Gleichung

$$\frac{E}{E_n} = 1{,}13 \frac{i}{i_n} \tag{30}$$

lautet.

c) Die mittleren Feldkurven der Synchronmaschinen.

1. Die Bestimmung der mittleren Feldkurven aus der Leerlaufcharakteristik.

Die Leerlaufcharakteristik der synchronen Maschinen stellt den Zusammenhang der an den Klemmen der Maschine bei Leerlauf und verschiedenen Erregerströmen herrschenden Spannung mit diesen letzteren dar. Bei ihrer Berechnung geht man allgemein folgendermaßen vor:

Man wählt eine beliebige, nach Erfahrungen günstige normale Luftspaltinduktion für Polmitte B_{ln}. Legt man eine bestimmte, wieder durch Erfahrung gegebene, Feldform zugrunde, so kann man das Feld eines Poles in ein Rechteck verwandeln, das als Höhe B_{ln} besitzt und dessen Länge die „scheinbare Polbedeckung $\alpha_i P_t$" darstellt, die damit erst definiert erscheint. Der Polfluß ist somit

$$\Phi_n = \alpha_i P_t \cdot B_{ln} \cdot 0{,}9\, l, \tag{31}$$

wenn l die reine Eisenlänge der Maschine bedeutet. α_i führt auch den Namen „Polbedeckungsfaktor". Aus dem normalen Polfluß Φ_n rechnet sich die normale Spannung E_n einer Phase nach[1]

$$E_n = k \cdot f \cdot S \cdot \Phi_n \cdot 10^{-8}, \tag{32}$$

wobei k, der bekannte Kappsche Faktor, sich zusammensetzt aus

$$k = \frac{\pi}{\sqrt{2}} f_w \cdot f_f, \tag{33}$$

dem Wicklungsfaktor f_w und dem Formfaktor f_f, welche für jede Maschine geometrische Konstanten darstellen. S ist die Stabzahl je Phase, f die Frequenz des Gleichstromdrehfeldes. Führt man (31) in die Beziehung (32) ein, so erhält man

$$E_n = (0{,}9 \cdot 10^{-8} \cdot k\, f\, l\, \alpha_i P_t S)\, B_{ln} = c_n \cdot B_{ln}, \tag{34}$$

nachdem alle in der Klammer stehenden Größen als Maschinenkonstanten aufgefaßt werden können. (32) bzw. (34) liefern die Gleichungen zur Ermittlung der Stabzahl S je Phase, nachdem gewöhnlich die Normalspannung (Nennspannung) E_n vorgegeben ist und die Luftinduktion B_{ln} nach früheren gewählt wurde.

Man berechnet nun die bei der gewählten Luftspaltinduktion B_{ln} für die Überquerung des Luftspaltes in Polmitte nötigen Amperewindungen AW_{ln}, bestimmt die Zahninduktion B_z, sowie die mit Berücksichtigung des Nutennebenschlusses durch einen vergrößerten Luftspalt aufzuwendenden Amperewindungen für die Nut-Zahnzone des Ständers, gleicherweise für einen mittleren Weg und eine mittlere Induktion die nötigen Amperewindungen für das Ständerjoch, endlich nach Berechnung der Läuferstreuung und damit des wirklichen Läuferflusses die zu seiner Leitung benötigten Amperewindungen im Läuferweg. Die Summe aller gerechneten Amperewindungen gibt mit $\frac{4\pi}{10}$ multipliziert jene magnetomotorische Kraft, die für Normalspannung E_n bei der normalen Luftinduktion B_{ln} im Läufer zu erzeugen ist. Ist

[1] Siehe z. B. Arnold, Wechselstromtechnik.

die Läuferwicklung ausgelegt, und umfaßt sie $\frac{w}{a}$ Serienwindungen je Pol, so läßt sich der notwendige Läuferstrom i_n berechnen.

Nach diesen Darlegungen gibt die Leerlaufcharakteristik den Zusammenhang von normaler Luftinduktion B_{ln} und Erregerstrom i_n eigentlich nur für die Polmitte an, nicht etwa für eine beliebige Stelle des Ständerumfanges. Gleichung (7) zeigt nun, daß die Felderregerkurve identisch ist mit der Verteilung der Amperewindungen für die magnetischen Kreise am Ständerumfang. Stellen wir die Felderregerkurve allgemein als Fourierreihe dar

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \cdot P_t \cdot A S_1 \cdot \sum_{\nu=1,3}^{\infty} f_\nu \sin \nu \frac{x\pi}{P_t}, \tag{35}$$

welche, wie ein Blick lehrt, (22) und (27) als Sonderfälle bei Wahl von f_ν enthält, so ist für Polmitte $x = \frac{P_t}{2}$, daher

$$F\left(\frac{P_t}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot P_t \cdot A S_1 \sum_{\nu=1,3}^{\infty} (-1)^\nu \cdot f_\nu \tag{36}$$

eine Konstante, die wir für den Normalstrom i_n mit $F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)$ bezeichnen wollen. Das Verhältnis $\frac{F(x)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}$ geht für $x = \frac{P_t}{2}$ in

$$\frac{F\left(\frac{P_t}{2}\right)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)} = \frac{A S_1}{A S_{1n}} = \frac{i}{i_n} \tag{37}$$

über, also in jenes Verhältnis, das nach (28) für die Normal-Leerlaufcharakteristik Verwendung findet.

Nach (34) läßt sich das Verhältnis $\frac{E}{E_n}$ ersetzen durch

$$\frac{E}{E_n} = \frac{B_l}{B_{ln}}, \tag{38}$$

das Verhältnis der Luftinduktionen in Polmitte. Es ist dabei, wie ja bei der Berechnung der Leerlaufcharakteristik stets vorausgesetzt wird, α_i als von der Sättigung unabhängig angenommen.

Mit (37) und (38) wird die Gleichung der Normal-Leerlaufcharakteristik übergeführt in

$$\frac{B_l}{B_{ln}} = 1{,}584\left(1 - e^{-\frac{F\left(\frac{P_t}{2}\right)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}}\right). \tag{39}$$

Es ist jetzt nur der letzte Schritt nötig, nämlich die Beziehung zwischen Luftspaltinduktion und Felderregerkurve, welche (39) ausspricht, allgemein für jeden Punkt des Ständerumfanges gültig anzunehmen, welche Hypothese wohl jetzt noch keinerlei Stütze erfahren kann, sondern erst durch die aus ihr erfließenden Ergebnisse und Folgerungen einen gewissen Beweis der Wahrscheinlichkeit erhält. Wir schreiben also den allgemeinen Ausdruck für die mittlere Feldkurve der Synchronmaschinen in Abhängigkeit von deren Gleichstromerregung an

$$\frac{B_x}{B_{ln}} = 1{,}584 \left(1 - e^{-\frac{F(x)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}}\right) = 1{,}584 \left(1 - e^{-\frac{i}{i_n} \frac{\Sigma f_\nu \sin \nu \frac{x\pi}{P_t}}{\Sigma (-1)^\nu f_\nu}}\right). \tag{40}$$

Die Veränderung von x zwischen 0 und P_t bei konstantem i liefert aus (40) die Feldkurve einer bestimmten Erregung, die Veränderung von i bei konstantem x liefert für die Stelle x die Änderung der Luftspaltinduktion mit der Erregung.

Es wurde bisher der Ausdruck „mittlere Feldkurve" gebraucht; er soll nun gerechtfertigt werden. Wie ausgeführt, enthält die Leerlaufcharakteristik bereits den Einfluß der Nutung in der Art, daß die Flußverminderung durch diese einem gleichmäßigen Luftspalte zugeschrieben wurde. Die Nutung ist also nur quantitativ, als Mittelwertbildung eingegangen, nicht aber qualitativ als Erhöhung der Induktion unter den Zähnen und Verminderung derselben unter den Nuten, wie etwa Bild 9 zu verdeutlichen sucht. Somit ist es richtig, die durch (40) erhaltene Darstellung als „mittlere Feldkurve" zu bezeichnen, wobei der Einfluß der Nutung auf letztere getrennt zu untersuchen wäre, was erst in einem späteren Abschnitte geschehen soll.

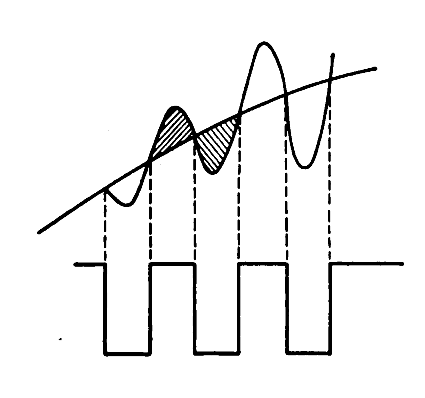


Bild 9. Einfluß der Nutung auf die mittlere Feldkurve.

Bild 10. Die Felderregerkurve in Nutpolmaschinen.

Wir haben mit (40) für die Feldkurve einen allgemeinen Ausdruck gewonnen, der eigentlich mit der Ausgangsgleichung (11) übereinstimmen sollte, wenn wir dort B_x statt H einführen, und erweitern auf

$$\frac{B_x}{B_{ln}} = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{1}{\delta''} \cdot \frac{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}{B_{ln}} \cdot \frac{F(x)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}. \tag{41}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich nun umgekehrt mit Hilfe von (40) der **äquivalente Luftspalt** δ'', der den gesamten Maschinenwiderstand als Funktion der Ständerkoordinate x darstellt, rechnen:

$$\delta'' = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{F(x)}{1{,}584\, B_{ln} \left(1 - e^{-\frac{F(x)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}}\right)}. \tag{42}$$

Seine Abhängigkeit von der Sättigung der Maschine ist durch den Klammerausdruck im Nenner gegeben. Mit größerer Erregung [größerem F(x)] wächst δ'' geringer als linear, weil die e-Potenz kleiner, somit der Klammerausdruck größer wird.

Für die Polmitte, $x = \frac{P_t}{2}$, ist mit Einführung von (36) und (37) der äquivalente Luftspalt aus (42)



$$\delta_0'' = 0{,}8 \frac{P_t}{1{,}584} \cdot \frac{A S_1}{B_{ln}} \cdot \frac{\sum\limits_{\nu=1,3}^{\infty} (-1)^\nu f_\nu}{\left(1 - e^{-\frac{A S_1}{A S_{1n}}}\right)}. \tag{43}$$

Es wurde (40) als die Gleichung der Feldkurven angesprochen, obwohl nicht die absoluten Werte, sondern nur die auf die normale Luftinduktion B_{ln}, nach der die Maschine mittels der Beziehung (34) ausgelegt wird, bezogenen Werte in die Gleichung eingehen. Nachdem aber B_{ln} für jede Maschine eindeutig festgelegt wird, ist sie als eine Konstante für die ganze Rechnung aufzufassen, allerdings mit dem Charakter eines Parameters, der nicht das Wesen der Kurven oder ihre Form verändert, sondern nur den Maßstab entsprechend vergrößert. Wir werden somit im folgenden stets von den Werten der „Feldkurven" sprechen und meinen damit die auf B_{ln} bezogenen Zahlenwerte.

Wollte man die allgemeine Feldkurve (40) harmonisch zerlegen, so wäre der allgemeine Ausdruck für den k-ten Koeffizienten der Fourierschen Reihe[1]

$$B_k = \frac{2}{P_t} \int_0^{P_t} \frac{B_x}{B_{ln}} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = 1{,}584 \frac{2}{P_t} \int_0^{P_t} \left(1 - e^{-\frac{i}{i_n} \frac{\sum f_\nu \sin \nu \frac{x\pi}{P_t}}{\sum (-1)^\nu f_\nu}}\right) \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx, \tag{44}$$

wobei nur Sinusglieder ungerader Ordnung auftreten, ganz wie in der Erregerkurve selbst. Die Integration (41) bereitet aber im allgemeinen sehr große Schwierigkeiten, weshalb nun auf die beiden Maschinentypen näher eingegangen werden soll, um andere geeignetere Methoden zu finden.

2. Die mittleren Feldkurven der Nutpolmaschinen.

Wir wollen die Stufenkurve aus Bild 10, welche als Erregerkurve der Nutpolmaschinen erscheint, durch ein Trapez ersetzen und damit zunächst eine ideelle Feldkurve für kontinuierlichen Strombelag auf dem Läufer rechnen. Dem durch die Anordnung der Wicklung in Nuten überlagerten „Zahnfelde", das als Restkurve (Bild 10b) bleibt, wollen wir in einem späteren Kapitel Rechnung tragen, wenn wir den Einfluß der Nutung auf die mittlere Feldkurve behandeln werden.

Die Trapezkurve in Bild 10, die nunmehr der weiteren Rechnung dienen soll, läßt sich abschnittsweise durch folgende Definition geben:

$$\left.\begin{aligned} 0 < x < \frac{1}{3} P_t \qquad & F(x) = 3A \frac{x}{P_t} \\ \frac{1}{3} P_t < x < \frac{2}{3} P_t \qquad & F(x) = A \\ \frac{2}{3} P_t < x < P_t \qquad & F(x) = 3A \frac{P_t - x}{P_t} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

wobei A die Amplitude der Trapezkurve darstellt, welche β-fach so groß ist wie die Amplitude einer Nutspule aus (13), die sich mit Berücksichtigung von (21) schreibt:

$$A = \beta \frac{1}{2} \cdot \frac{S_n}{a} i = \frac{1}{2} P_t A S_1, \qquad A_n = \frac{1}{2} P_t A S_{1n}. \tag{46}$$

Nun wissen wir, daß die Gleichung der mittleren Feldkurve (40), weil auf der allgemeinen Ersatzkurve der Normal-Charakteristik (28) aufgebaut, nur für größere Sättigungen, also ungefähr für $\frac{i}{i_n} \geqq 0{,}6$ an gilt. Bis dahin dürfen wir aber die Luft-

[1] Siehe z. B. Rziha-Seidener, Bd. 1, S. 48, 6. Auflage.

spaltgerade verwenden. Um jedoch die Rechnung nicht zu komplizieren, nehmen wir zunächst (40) allgemein geltend an und werden in einem Zusatze auch den anderen Fall behandeln.

Mit diesen Festlegungen wird weiter abschnittsweise wegen (46)

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < x < \frac{1}{3} P_t & \frac{B_x}{B_{ln}} = 1{,}584 \cdot \left(1 - e^{-3 \frac{i}{i_n} \frac{x}{P_t}}\right) \\ \frac{1}{3} P_t < x < \frac{2}{3} P_t & \frac{B_x}{B_{ln}} = 1{,}584 \cdot \left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right) \\ \frac{2}{3} P_t < x < P_t & \frac{B_x}{B_{ln}} = 1{,}584 \cdot \left(1 - e^{-3 \frac{i}{i_n} \frac{P_t - x}{P_t}}\right) \end{array}\right\} \tag{47}$$

Die Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten nach (44) wird etwa für den k-ten auf die 3 Integrationen zurückgeführt:

$$\left.\begin{array}{c} \int\limits_0^{\frac{1}{3}P_t} \left(1 - e^{-3 \frac{i}{i_n} \frac{x}{P_t}}\right) \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx, \qquad \int\limits_{\frac{1}{3}P_t}^{\frac{2}{3}P_t} \left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right) \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx, \\ \int\limits_{\frac{2}{3}P_t}^{P_t} \left(1 - e^{-3 \frac{i}{i_n} \frac{P_t - x}{P_t}}\right) \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx. \end{array}\right\} \tag{48}$$

Aus allen drei Integralen läßt sich herausschreiben, wenn k = ungerade berücksichtigt wird

$$\int\limits_0^{P_t} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = + \frac{2 P_t}{k\pi}. \tag{49}$$

Die restlichen Integrale des ersten und dritten Gliedes in (48) lösen sich einfach mit Hilfe der in der Hütte[1] angegebenen Formel. Mit Einsetzung der Grenzen erhält man

$$\left.\begin{array}{c} -\int\limits_0^{\frac{1}{3}P_t} e^{-3 \frac{i}{i_n} \frac{x}{P_t}} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = \frac{-P_t}{\left(3 \frac{i}{i_n}\right)^2 + (k\pi)^2} \cdot \\ \cdot \left\{\left(-3 \frac{i}{i_n} \sin \frac{k\pi}{3} - k\pi \cos \frac{k\pi}{3}\right) e^{-\frac{i}{i_n}} + k\pi\right\} \end{array}\right\} \tag{50}$$

$$-\int\limits_{\frac{2}{3}P_t}^{P_t} e^{-3 \frac{i}{i_n} \frac{P_t - x}{P_t}} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = \frac{-P_t}{\left(3 \frac{i}{i_n}\right)^2 + (k\pi)^2} \left\{k\pi - \left[3 \frac{i}{i_n} \sin \frac{2k\pi}{3} - k\pi \cos \frac{2k\pi}{3}\right] e^{-\frac{i}{i_n}}\right\}. \tag{51}$$

Das zweite Glied in der geschlungenen Klammer in (48) liefert das restliche Integral

$$e^{-\frac{i}{i_n}} \int\limits_{\frac{1}{3}P_t}^{\frac{2}{3}P_t} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = e^{-\frac{i}{i_n}} \frac{P_t}{k\pi} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} - \cos \frac{k\pi}{3}\right). \tag{52}$$

[1] Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch, I, S. 77, Nr. 34, 23. Auflage.

Die Zusammenfassung aller Integrale liefert somit den Ausdruck

$$B_k = 1{,}584 \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \cdot \frac{3 \frac{i}{i_n}}{\left(3 \frac{i}{i_n}\right)^2 + (k\pi)^2} \cdot \left\{ 3 \frac{i}{i_n} \cdot \left[\left(\cos \frac{2k\pi}{3} - \cos \frac{k\pi}{3} \right) e^{-\frac{i}{i_n}} + 2 \right] + \right. \left. + k\pi \left[\left(\sin \frac{2k\pi}{3} + \sin \frac{k\pi}{3} \right) e^{-\frac{i}{i_n}} \right] \right\} \tag{53}$$

Die Amplituden aller harmonischen Wellen sind also nur von dem Erregerstrome $\frac{i}{i_n}$ und von der Ordnungszahl der Welle abhängig. Es lassen sich auch leicht die extremen Fälle behandeln: Für $\frac{i}{i_n} = 0$ wird auch $B_k = 0$, es ist natürlich kein Feld vorhanden. Für $\frac{i}{i_n} = \infty$, also undenkbar hochgesättigte Maschine, wird

$$B_k = 1{,}584 \frac{2}{k\pi}$$

und ein Vergleich[1] zeigt, daß dies ein Rechteckfeld darstellt.

Nunmehr müssen wir auch auf den Fall der geringen Sättigung eingehen. Für diesen Teil der Leerlaufcharakteristik, der als Gerade anzusehen ist, die „Luftspaltcharakteristik", gibt (30) die Beziehung von Spannung und Erregerstrom an, welche Gleichung mit Ersetzung nach (38) und (37) übergeht in

$$\frac{B_x}{B_{l n}} = 1{,}13 \frac{i}{i_n} = 1{,}13 \frac{F(x)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)}. \tag{54}$$

Setzen wir (45) bzw. (46) für die rechte Seite ein, so erhalten wir abschnittsweise:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < x < \frac{1}{3} P_t & \frac{B_x}{B_{l n}} = 1{,}13 \cdot 3 \frac{i}{i_n} \cdot \frac{x}{P_t} \\ \frac{1}{3} P_t < x < \frac{2}{3} P_t & \frac{B_x}{B_{l n}} = 1{,}13 \cdot \frac{i}{i_n} \\ \frac{2}{3} P_t < x < P_t & \frac{B_x}{B_{l n}} = 1{,}13 \cdot 3 \frac{i}{i_n} \frac{P_t - x}{P_t} \end{array}\right\} \tag{55}$$

Die Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten nach (44) liefert hier die Teilintegrale

$$\int_0^{\frac{1}{3}P_t} \frac{x}{P_t} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx, \qquad \int_{\frac{1}{3}P_t}^{\frac{2}{3}P_t} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx, \qquad \int_{\frac{2}{3}P_t}^{P_t} \frac{P_t - x}{P_t} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx. \tag{56}$$

Die allgemeinen Integrale, welche hier nötig sind, lauten mit ihrer einfachen Lösung

$$\int \frac{x}{P_t} \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = \frac{P_t}{(k\pi)^2} \cdot \left[-k \frac{x\pi}{P_t} \cos k \frac{x\pi}{P_t} + \sin k \frac{x\pi}{P_t} \right]. \tag{57}$$

$$\int \sin k \frac{x\pi}{P_t} dx = -\frac{P_t}{k\pi} \cos k \frac{x\pi}{P_t}. \tag{58}$$

Setzen wir diese gleich in den Grenzen in (56) ein, so erhalten wir nach Zusammenziehung der gleichen Glieder

$$B_k = 1{,}13 \cdot \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{i}{i_n} \left[\sin \frac{k\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} \right]. \tag{59}$$

Um die Auswertung der beiden Formeln (53) und (59) leicht zu ermöglichen, verwenden wir die erstere, wenn $\frac{i}{i_n} \geqq 0{,}6$ ist, und die letztere für die Werte $\frac{i}{i_n} \leqq 0{,}6$.

[1] Siehe Rziha-Seidener, I, S. 49, 6. Auflage.

Die Ungenauigkeit, die darin liegt, daß die Feldkurven für $\frac{i}{i_n} \geqq 0{,}6$ in den Teilen, in welchen die Induktion unter eine gewisse $\left(\text{eben } \frac{i}{i_n} < 0{,}6 \text{ entsprechende}\right)$ Größe sinkt, etwas zu hoch geraten, nehmen wir gerne hin; denn sie beträgt kaum Prozente des Polflusses.

Zum raschen Überblick über die Änderung der Feldform durch den Einfluß der Oberwellen sei in der folgenden Tabelle 4 der Wert B_k für verschiedene Werte von $\frac{i}{i_n}$ und für die Oberwellen der Ordnungszahlen 1 bis 15 eingetragen. Dabei ist, wie oben betont, für $\frac{i}{i_n} = 0{,}5$ nach Formel (59), für alle anderen Werte $\frac{i}{i_n}$ nach Formel (53) gerechnet worden.

Tabelle 4.

$\frac{i}{i_n} \backslash k$	1	3	5	7
0,5	+ 0,5941 100,00 %	0,0000 0,00 %	— 0,0238 4,00 %	+ 0,0121 2,04 %
1,0	+ 1,1007 100,00 %	+ 0,0787 7,10 %	— 0,0144 1,30 %	+ 0,0177 1,60 %
1,5	+ 1,3918 100,00 %	+ 0,1518 10,90 %	+ 0,0066 0,47 %	+ 0,0212 1,52 %
2,0	+ 1,5724 100,00 %	+ 0,2201 13,98 %	+ 0,0321 2,04 %	+ 0,0272 1,73 %
2,5	+ 1,7005 100,00 %	+ 0,2820 16,58 %	+ 0,0606 3,57 %	+ 0,0351 2,07 %
3,0	+ 1,7794 100,00 %	+ 0,3365 18,90 %	+ 0,0897 5,04 %	+ 0,0446 2,51 %
∞	+ 2,0160 100,00 %	+ 0,6720 30,00 %	+ 0,4032 20,00 %	+ 0,2880 14,30 %

Tabelle 4 (Fortsetzung).

$\frac{i}{i_n} \backslash k$	9	11	13	15
0,5	0,0000 0,00 %	— 0,0049 0,83 %	+ 0,0039 0,59 %	0,0000 0,00 %
1,0	+ 0,0029 0,26 %	— 0,0042 0,38 %	+ 0,0043 0,39 %	+ 0,0007 0,06 %
1,5	0,0068 0,49 %	— 0,0018 0,13 %	+ 0,0049 0,35 %	+ 0,0015 0,11 %
2,0	+ 0,0110 0,70 %	+ 0,0014 0,09 %	+ 0,0057 0,36 %	+ 0,0024 0,15 %
2,5	+ 0,0159 0,93 %	+ 0,0052 0,31 %	+ 0,0068 0,40 %	+ 0,0036 0,21 %
3,0	+ 0,0216 1,21 %	+ 0,0094 0,53 %	+ 0,0084 0,47 %	+ 0,0050 0,28 %
∞	+ 0,2240 11,10 %	+ 0,1829 9,10 %	+ 0,1550 7,70 %	+ 0,1343 6,67 %

Man ersieht, daß bei geringen Sättigungen, für welche die Leerlaufcharakteristik eine Gerade ist, die durch 3 teilbaren Oberwellen vollkommen wegfallen. Damit ist ganz deutlich geworden, daß jede Sättigungserscheinung im Eisen als ein Auftreten der dritten Harmonischen gedeutet werden kann. Nachdem bei $\frac{i}{i_n} = 0{,}6$ die Luftspaltgerade sich von der Normalleerlauf-Charakteristik abzuheben beginnt (wie auch das Bild 8 zeigt), werden also dort zum ersten Male die dreifachen Oberwellen in Erscheinung treten. Die späteren graphischen Darstellungen werden dies sehr deutlich zeigen.

Um die Ergebnisse der Tab. 4 deutlich zu versinnlichen, wurde in Bild 11 zunächst die Amplitude der Grundwelle B_1 in Abhängigkeit von der Erregung aufgetragen. Der Vergleich mit der ebenfalls gezeichneten Kurve der Feldwerte in Polmitte $\left(\frac{B_l}{B_{ln}}\right)$ (also einfach die Leerlauf-Charakteristik des Bildes 8) überzeugt davon, daß

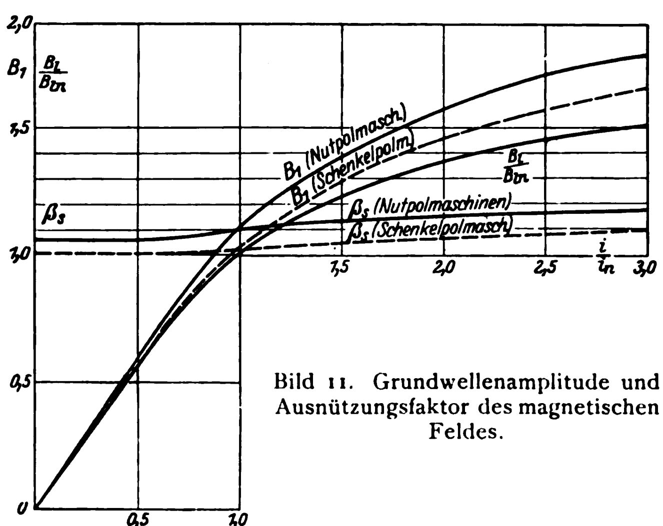


Bild 11. Grundwellenamplitude und Ausnützungsfaktor des magnetischen Feldes.

die Ausnützung des Feldes mit zunehmendem Erregerstrome eine günstigere wird, denn das Verhältnis der beiden Werte, der Grundwellenscheitelfaktor β_s

$$\beta_s = \frac{B_1}{\frac{B_l}{B_{ln}}} \tag{60}$$

steigt linear mit geringer Neigung an (Tafel 3). Das bedeutet, daß mit zunehmendem Erregerstrome die Grundwelle rascher wächst als der Feldwert in Polmitte, man also nicht mit konstantem Faktor β_s für alle Sättigungen rechnen darf, soll nicht die gerechnete Leerlauf-Charakteristik im oberen Teile über der gemessenen liegen. Dies mag aber als Sicherheitsfaktor in den meisten Fällen sogar erwünscht sein. Der für $\frac{i}{i_n} < 0{,}6$ konstante Wert $\beta_s = 1{,}054$ stellt das konstante Verhältnis der Grundwelle der Trapezkurve aus Bild 10a zu deren Höchstwerte dar, wenn keine Sättigung im Eisen auftritt, die Eisenwege mit ihrem magnetischen Widerstande gegen den Luftspaltweg gar nicht ins Gewicht fallen.

Die harmonische Darstellung der Feldkurve lautet nach früherem

$$\frac{B_x}{B_{ln}} = \sum_{k=1,3}^{\infty} B_k \sin k \frac{x\pi}{P_t} \tag{61}$$

oder auch, falls man alle Amplituden auf die Grundwelle bezieht,

$$\frac{B_x}{B_{ln}} = B_1 \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \left(\frac{B_k}{B_1}\right) \sin k \frac{x\pi}{P_t}. \tag{62}$$

Diese Form der Darstellung läßt deutlich den Einfluß der Oberwellen ersehen. Das prozentuale Verhältnis $\left(\frac{B_k}{B_1}\right)$ ist demnach auch in Tabelle 4 unter die Absolutwerte der Amplituden geschrieben. Außerdem sind in Bild 12 für die Ordnungszahlen 3 bis 15 die prozentualen Werte $\left(\frac{B_k}{B_1}\right)$ in Kurvenform über dem Erregerstrome als unabhängig Veränderlicher aufgetragen. Merkwürdig ist, daß die Kurven für $k = 3, 9, 15 \ldots$ fast linear vom Punkte $\frac{i}{i_n} = 0{,}6$ aus ansteigen (jenem Punkte, in dem die Luftspaltgerade von der Charakteristik abweicht), während die Kurven für $k = 7, 13$, mit nur positiven Zahlenwerten, eine Sattelung zeigen und endlich die Kurven für $k = 5, 11$ nach einem Minimum im negativen Ordinatenbereiche linear in den positiven aufsteigen. Jedenfalls erhält die Feldkurve bei größeren Sättigungen ihr Gepräge vom Überwiegen der dritten Harmonischen, die in der Felderregerkurve vollkommen fehlte!

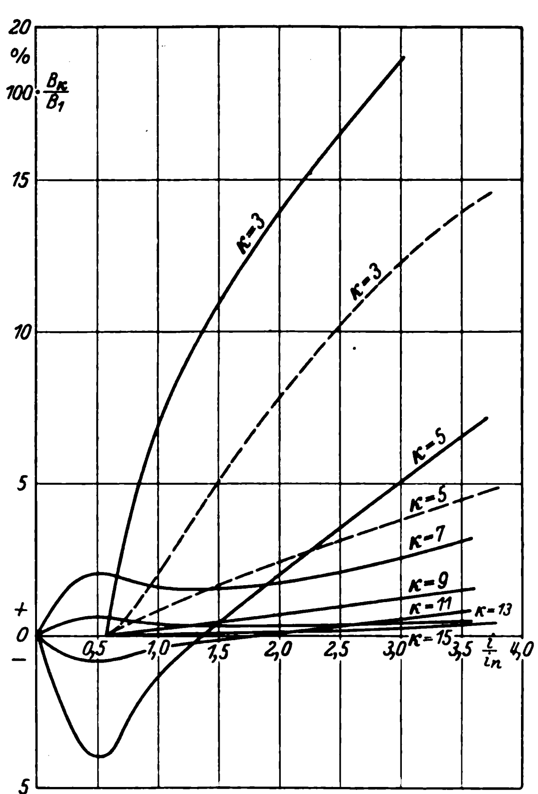


Bild 12. Die auf die Grundwelle bezogenen Oberwellen des Erregerfeldes.
——— für Nutpolmaschinen,
------ für Schenkelpolmaschinen.

Die Darstellung der Feldkurven mittels der angegebenen harmonischen Analyse (61) durch Summation bis zur fünfzehnten Oberwelle zeigt Bild 13. Sehr deutlich ist die bei geringen Sättigungen vorherrschende Trapezform des Feldes zu erkennen, die bei hohen Sättigungen bereits den Übergang zur Rechteckform andeutet. Diese mittleren Feldkurven stimmen, wenn man vom Einfluß der Nutung absieht, mit den Oszillogrammen, die man an Maschinen aufgenommen hat, sehr gut überein[1].

3. Die mittleren Feldkurven der Schenkelpolmaschinen.

Die Schenkelpolmaschinen werden heute fast nur mehr mit stetig erweitertem Luftspalte ausgeführt. Die Veranlassung gab eine Arbeit von R. Rüdenberg[2], der nachwies, daß eine Erweiterung des Luftspaltes nach dem Gesetze

$$\delta_x = \frac{\delta_0}{\sin \frac{x\pi}{P_t}} \tag{63}$$

[1] Siehe in Revue gen. de l'électricité 1922, XIII/8, p. 316 die Bilder 14 und 15 aus dem Aufsatze „Les alternateurs de 40,000 pour Gennevilliers" von E. Roth.

[2] R. Rüdenberg, „Über die Verteilung der magnetischen Induktion in Dynamoankern" ETZ 1906, S. 109.

bei Vernachlässigung der Sättigungserscheinungen im Eisen, notwendig eine reine Sinuskurve als Feldkurve haben müßte. δ_o ist der Luftspalt in Polmitte, δ_x jener an beliebiger Stelle des Ständerumfanges x, der für $x = \frac{P_t}{2}$ in δ_o übergeht. In der Pollückenmitte wird natürlich der Luftspalt unendlich groß.

Wir wollen im folgenden nur Maschinen mit sog. „Sinuslamelle" untersuchen, also mit dem vorhin gekennzeichneten Verlauf des Luftspaltes. Allerdings dürfen wir die Eisenwege nicht mehr vernachlässigen, sondern müssen im Gegenteile gerade den Einfluß letzterer bei höheren Erregerströmen behandeln. Bei Berücksichtigung der Eisenwege finden wir die allgemeine Beziehung (11) zwischen Felderregerkurve und Feldkurve und erhalten nach Abschnitt c,1 für den äquivalenten Luftspalt den Ausdruck (42), der für Polmitte in (43) überging. Nennen wir den die Eisenwege vertretenden Luftspalt δ_{fe}, so besteht für Polmitte die Beziehung

$$\delta_o'' = \delta_o + \delta_{fe}. \qquad (64)$$

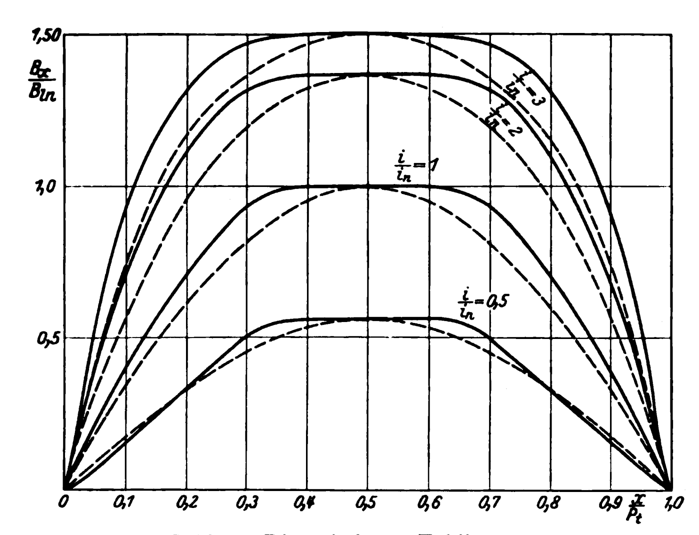


Bild 13. Die mittleren Feldkurven
——— für Nutpolmaschinen,
------ für Schenkelpolmaschinen.

Wir wollen voraussetzen, daß der zusätzliche Luftspalt δ_{fe} für alle Stellen des Ankerumfanges dem Zahlenwerte nach gleich sei. Die Willkür wird durch die Ergebnisse gemildert erscheinen, jetzt entspringt sie dem Bedürfnis nach einfachen Beziehungen, insbesondere, da hier zum ersten Male dieser Weg gegangen wird. Somit dürfen wir schreiben

$$\delta_x'' = \delta_x + \delta_{fe} = \delta_x + (\delta_o'' - \delta_o), \qquad (65)$$

wenn wir auch (64) einführen. Mit Benützung von (63) wird daraus

$$\delta_x'' = \frac{\delta_o}{\sin\frac{x\pi}{P_t}} + (\delta_o'' - \delta_o) = \frac{1}{\sin\frac{x\pi}{P_t}}\left[\delta_o + (\delta_o'' - \delta_o)\sin\frac{x\pi}{P_t}\right]. \qquad (66)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die allgemeine Gleichung (11) ein, und ersetzen dabei H durch B_x (weil in Luft beide Größen gleichen Zahlenwert haben), so entsteht

$$B_x = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{F(x)\sin\frac{x\pi}{P_t}}{\delta_o + (\delta_o'' - \delta_o)\sin\frac{x\pi}{P_t}}. \qquad (67)$$

Aus dem Abschnitte a, 3 wissen wir, daß die Felderregerkurve F(x) als ein Rechteck angenommen werden darf, dessen Höhe A ist, also mit (24) bzw. (26)

$$F(x) = A = \frac{1}{2} P_t \cdot A S_1. \tag{68}$$

Den wirklichen Luftspalt in Polmitte können wir aus der Luftspaltgeraden rechnen. Diese ist in (30) angeschrieben und wird mit der Ersetzung (38)

$$\frac{B_l}{B_{l_n}} = 1{,}13 \frac{i}{i_n} = 1{,}13 \frac{F(x)}{F_n\left(\frac{P_t}{2}\right)} \tag{69}$$

wenn auch (68) zu Hilfe gezogen wird. Aus dieser Beziehung erhalten wir nun δ_0, wenn wir aus (10)

$$\delta_0 = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{F(x)}{B_l} \tag{70}$$

bilden, für $\frac{F(x)}{B_l}$ obige Gleichung (69) in Anspruch nehmen und ferner (68) berücksichtigen:

$$\delta_0 = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{1}{1{,}13} \cdot \frac{\frac{1}{2} P_t \cdot A S_{1n}}{B_{l_n}}. \tag{71}$$

Endlich ist der äquivalente Luftspalt in Polmitte aus (42) zu entnehmen, wenn für F(x) der Ausdruck (68) eingesetzt wird, der als Konstante auch für $x = \frac{P_t}{2}$ gilt:

$$\delta_0'' = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{\frac{1}{2} P_t A S_1}{1{,}584 \cdot B_{l_n} \cdot \left(1 - e^{-\frac{A S_1}{A S_{1n}}}\right)}. \tag{72}$$

Der Nenner von (67) wird bei geeigneter Heraushebung

$$\delta_0 \left(1 + \frac{\delta_0'' - \delta_0}{\delta_0} \sin \frac{x\pi}{P_t}\right) = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{1}{1{,}13} \cdot \frac{\frac{1}{2} P_t A S_1}{B_{l_n}} \cdot \left[1 + (D-1) \sin \frac{x\pi}{P_t}\right], \tag{73}$$

wobei zur Abkürzung

$$D = \frac{1{,}13}{1{,}584} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right)} \frac{i}{i_n} \tag{74}$$

geschrieben wurde. Mit (68) und (73) wird somit der Ausdruck für die Feldkurve einfachst dargestellt durch

$$\frac{B_x}{B_{l_n}} = 1{,}13 \frac{i}{i_n} \cdot \frac{\sin \frac{x\pi}{P_t}}{1 + (D-1) \sin \frac{x\pi}{P_t}}. \tag{75}$$

Die Zerlegung in die Fouriersche Reihe erfordert nach (44) die Koeffizientenbestimmung

$$B_k = 1{,}13 \frac{i}{i_n} \cdot \frac{2}{P_t} \int_0^{P_t} \frac{\sin \frac{x\pi}{P_t}}{1 + (D-1) \sin \frac{x\pi}{P_t}} \sin K \frac{x\pi}{P_t} dx. \tag{76}$$

Setzen wir zur mathematischen Behandlung des Integrals

$$\frac{x\pi}{P_t} = y, \qquad dy = \frac{\pi}{P_t} dx, \tag{77}$$

so besteht für die Grenzen die Zuordnung

$$x = 0, \quad y = 0, \qquad x = P_t, \quad y = \pi. \tag{78}$$

und (76) nimmt die Form an

$$B_k = 1{,}13 \frac{2}{\pi} \cdot \frac{i}{i_n} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin y}{1 + (D - 1) \sin y} \sin k y \, d y.$$

Wenn man beachtet, daß k nur ungerade ganzzahlig ist, infolgedessen volle Symmetrie zu $y = \frac{\pi}{2}$ besteht, so läßt sich das Integral bezüglich seiner Grenzen in 2 gleiche Teilintegrale zerlegen und man erhält endlich

$$B_k = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \cdot \frac{i}{i_n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1 + (D - 1) \sin y} \sin k y \, d y. \tag{79}$$

Zur weiteren Auswertung des Integrals

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y \sin k y}{1 + (D - 1) \sin y} d y \tag{80}$$

sei auf den Anhang verwiesen, in dem die Integration vollkommen durchgeführt ist. Benennen wir $D - 1 = a$, wie im Anhang unter (5) definiert, so haben wir für die beiden Fälle unter Verwendung der Formeln aus dem Anhang

für $a \geqq 1$

$$B_1 = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \frac{\frac{i}{i_n}}{a^2} \cdot \left[\frac{\operatorname{Area Cos} a}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{\pi}{2} + a\right] \tag{81}$$

$$B_3 = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \frac{\frac{i}{i_n}}{a^2} \cdot \left\{\left(3 - \frac{4}{a^2}\right)\left[\frac{\operatorname{Area Cos} a}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{\pi}{2} + a\right] + \pi - \frac{8}{3} a\right\} \tag{82}$$

$$B_5 = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \frac{\frac{i}{i_n}}{a^2} \cdot \left\{\left(5 - \frac{20}{a^2} + \frac{16}{a^4}\right)\left[\frac{\operatorname{Area Cos} a}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{\pi}{2} + a\right] - \frac{24}{5} a + 2\pi + \frac{32}{3} \frac{1}{a} - \frac{4\pi}{a^2}\right\} \tag{83}$$

und für $a \leqq 1$

$$B_1 = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \frac{i}{i_n} \sum\nolimits_1 \tag{84}$$

$$B_3 = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \frac{i}{i_n} \left(3 \sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_3\right) \tag{85}$$

$$B_5 = 1{,}13 \frac{4}{\pi} \frac{i}{i_n} \left(5 \sum\nolimits_1 - 20 \sum\nolimits_3 + 16 \sum\nolimits_5\right), \tag{86}$$

wobei in letzterem Falle noch die unendliche Reihe

$$\sum\nolimits_1 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^4 + \ldots\right] - \left[\frac{2}{3} a + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a^3 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} a^5 + \ldots\right] \tag{87}$$

als Funktion von $a = D - 1$ definiert ist, und daraus

$$\sum\nolimits_3 = \frac{1}{a^2}\left(\sum\nolimits_1 - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} a\right) \tag{88}$$

$$\sum\nolimits_5 = \frac{1}{a^2}\left(\sum\nolimits_3 - \frac{3\pi}{16} + \frac{8}{15} a\right) \tag{89}$$

abgeleitet sind.



Zur numerischen Berechnung der harmonischen Amplituden müssen wir zunächst die Werte a abhängig von der Erregung $\frac{i}{i_n}$ kennen. Die Beziehung (74) definiert zunächst D, und wir erhalten demnach tabellarisch geordnet

Tabelle 5.

$\frac{i}{i_n}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
D	(0,713)	(0,907)	1,128	1,376	1,650	1,944	2,253	2,573
a = D − 1	(− 0,287)	(− 0,093)	0,128	0,376	0,650	0,944	1,253	1,573

Negative Werte für a sind nicht möglich. Dies ist sehr leicht einzusehen, wenn man sich auf die physikalische Bedeutung der Größe besinnt. Die Analogie von (75) mit (76) weist sofort auf, daß

$$a = D - 1 = \left(\frac{\delta_0''}{\delta_0} - 1\right). \tag{90}$$

Es ist klar, daß stets $\delta_0'' > \delta_0$, denn die Eisenwege sind nur „praktisch vernachlässigbar" gegen die reinen Luftwege. Die negativen Werte für a sind also wirklich unmöglich. Die Erklärung dieses Widerspruches wurde eigentlich schon in Abschnitt Ib vorweggenommen, als auf die mangelhafte Übereinstimmung der Ersatzkurve für die Normal-Leerlaufcharakteristik im Bereiche kleiner Erregungen hingewiesen wurde. Die Luftspaltgerade liegt ja für kleine $\frac{i}{i_n}$ über größeren Werten von $\frac{i}{i_n}$ als die Exponentialkurve, weshalb wir uns entschlossen hatten, für kleine Werte $\frac{i}{i_n}$ einfach die Luftspaltgerade selbst zu verwenden. Für Tabelle 5 würde dies bedeuten, daß die in Klammer gesetzten Werte von D durch 1 und diejenigen von (a) durch 0 zu ersetzen wären.

Mit Berücksichtigung dieser Erwägungen sollen wie früher für die Nutpolmaschinen, jetzt für die Schenkelpolmaschinen die Amplitudenwerte B_k als Funktion der Erregung $\frac{i}{i_n}$ gerechnet werden. Es sind nur die beiden Definitionsbereiche $a > 1$ und $a < 1$ zu unterscheiden. Dabei ist für $\frac{i}{i_n} = 2,5$ keine der beiden Formeln praktisch, weil die Konvergenz sehr schwach ist. Deshalb ist für diesen Punkt der Wert nachträglich aus dem graphischen Bilde eingetragen und durch Klammern ersichtlich gemacht. Tabelle 6 zeigt das Ergebnis.

Der besseren Anschaulichkeit halber wurden in die Bilder 11, 12 und 13 die obigen Werte sinngemäß und strichliert eingetragen. Man bemerkt zunächst, daß die Grundwelle in Schenkelpolmaschinen geringer ist als in Nutpolmaschinen, also eine eigentlich geringere Ausnützung der aufgebrachten Erregerwicklung stattfindet. Daran ist natürlich nur der verlaufende Luftspalt schuld, der eben bedeutend mehr Erregung erfordert als der konstante Luftspalt. Die Steigerung der Feldausnützung mit der Erregung ist auch hier vorhanden, β_r ist fast eine lineare Funktion von $\frac{i}{i_n}$, allerdings mit nur geringer Veränderlichkeit.

Aus Bild 12 ist zu ersehen, daß die dritte Oberwelle bedeutend geringer auftritt als in Nutpolmaschinen. Dies hat wieder seinen Grund im verlaufenden Luftspalte und in der Konzentration der Erregerwicklung. Man erkennt ja in Bild 13

Tabelle 6.

$\frac{i}{i_n}$ \ k	1	3	5
0,5	+ 0,5650 100,00 %	0,0000 0,00 %	0,0000 0,00 %
1,0	+ 1,0202 100,00 %	+ 0,0205 2,01 %	+ 0,0072 0,70 %
1,5	+ 1,2884 100,00 %	+ 0,0666 5,17 %	+ 0,0222 1,72 %
2,0	+ 1,4548 100,00 %	+ 0,1137 7,82 %	+ 0,0347 2,38 %
2,5	+ 1,5700 100,00 %	+ 0,1603 10,22 %	+ 0,0489 3,12 %
3,0	+ 1,6643 100,00 %	+ 0,2036 12,23 %	+ 0,0632 3,80 %
3,5	+ 1,7225 100,00 %	+ 0,2397 13,92 %	+ 0,07778 4,52 %

an den trapezförmigen Feldkurven der Nutpolmaschinen die verteilte Anordnung der Erregerwicklung, insbesondere für geringe Sättigungen, während in diesem Falle die Schenkelpolmaschinen ein reines Sinusfeld aufweisen. Es steht also dem Vorteile idealerer Feldkurven der Nachteil eines kleineren Polflusses gegenüber, der jedoch nicht voll ins Gewicht fällt, wenn man bedenkt, daß für die Spannung der Maschine die dritte Oberwelle des Feldes nicht in Betracht kommt. Dagegen wird diese für die Verluste von großer Bedeutung sein, so daß die Schenkelpolmaschinen dabei in Vorteil gegen die Nutpolmaschinen geraten. Diese Tatsache bleibt im wesentlichen auch für die höheren Sättigungen bestehen.

Daß wir ein Recht haben, bei Schenkelpolmaschinen die Harmonischen von höherer als siebenter Ordnung, deren Rechnung infolge der umständlichen Reihenentwicklung sehr langwierig ist, zu vernachlässigen, zeigt sich zunächst in den Feldkurven des Bildes 13, denn die Abweichung von der Sinusform ist nicht sehr erheblich. Außerdem weist die harmonische Analyse nach, daß alle Oberwellen erst mit $\frac{i}{i_n} > 0{,}6$ in Erscheinung treten und da fast linear, langsam ansteigend. Nur die fünfte Oberwelle erreicht noch berücksichtigenswerte Amplituden, während die siebente Oberwelle bereits in die Größenordnung der neunten Oberwellen der Nutpolmaschinen sinkt, also schon vernachlässigbar wird.

Wir werden somit für die weitere Rechnung bei Nutpolmaschinen die Oberwellen 3., 5. und 7. Ordnung, bei Schenkelpolmaschinen nur jene 3. und 5. Ordnung berücksichtigen.

d) Die scheinbare Polbedeckung der Synchronmaschinen.

Da sich für die Berechnung der elektrischen Maschinen die Einführung der „scheinbaren Polbedeckung" günstig erwiesen hat und diese meist noch verwendet wird, wollen wir diese Größe im folgenden auf Grund der von uns ermittelten Feldkurven bestimmen. Wie bekannt, versteht man unter scheinbarer Polbedeckung jenen Bruchteil der Polteilung, über dem bei gleichmäßiger Felddichte die Luftspaltinduktion der Polmitte herrschen müßte, um den wirklichen Polfluß hervorzubringen. Einfacher gesagt, es soll die Feldkurve im Luftspalt mit dem Scheitelwerte B_l in Polmitte in ein Rechteck gleicher Fläche mit B_l als Höhe verwandelt werden[1].

[1] Siehe auch Seite 203.

1. Die Ermittlung der scheinbaren Polbedeckung.

Bei gegebener Feldkurve ist es ein Leichtes, das flächengleiche Rechteck graphisch oder rechnerisch zu bestimmen. Wir wählen natürlich, um allgemein bleiben zu können, den letzteren Weg. Die Feldkurve können wir im allgemeinen nach (61) anschreiben als

$$\frac{B_x}{B_{ln}} = \sum_{k=1,3}^{\alpha} B_k \sin k \frac{x\pi}{P_t} \tag{91}$$

wobei B_x die jeweilige Induktion an der Ständerumfangstelle x und B_{ln} die normale Leerlaufinduktion in Polmitte sind, während die B_k die Amplituden der Fourierschen Reihenentwicklung der Feldkurve darstellen, die für die zwei Maschinenarten bereits gerechnet sind.

Der Polfluß, das ist der Fluß des Läufers über eine Polteilung, wird durch Integration des Ausdruckes (91) über eine Polteilung erhalten, wenn noch mit der Länge des Poles l_p multipliziert wird.

$$\Phi = l_p \int_0^{P_t} B_x \, d x = \frac{2}{\pi} l_p B_{ln} P_t \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} B_k. \tag{92}$$

Andererseits soll dieser Fluß aber gleichgesetzt werden

$$\Phi = l_p \cdot (\alpha_l P_t) \cdot B_l, \tag{93}$$

wenn die scheinbare Polbedeckung mit $(\alpha_l P_t)$ bezeichnet wird. Die Vereinigung der beiden Gleichungen liefert den Ausdruck

$$\alpha_l = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} B_k}{\frac{B_l}{B_{ln}}}. \tag{94}$$

Nachdem die Leerlauf-Charakteristik den Wert $\frac{B_l}{B_{ln}}$ als Funktion der Erregung $\frac{i}{i_n}$ angibt, ferner die Koeffizienten B_k für jede Maschinenart bekannt sind, läßt sich der Polbedeckungsfaktor α_l leicht rechnen und stellt sich nur als Funktion der Erregung der Maschine dar.

2. Die scheinbare Polbedeckung der Nutpolmaschinen.

Wir entnehmen die Koeffizienten B_k der Tabelle 4 und berechnen damit die folgende Tabelle 7.

Tabelle 7.

$\frac{i}{i_n}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\sum_{k=1,3} \frac{1}{k} B_k$	0,5909	1,1268	1,4478	1,6580	1,8166	1,9200
$\frac{B_l}{B_{ln}}$	0,5650	1,0000	1,23	1,37	1,455	1,51
α_l	0,666	0,718	0,750	0,770	0,795	0,809

Die Werte finden sich in Bild 14 eingetragen. Wie zu erwarten, steigt die Polbedeckung mit der Sättigung, weil die Feldform breiter wird, der Rechteckkurve zustrebt. Als Wert für normalen Leerlauf kann man 0,72 entnehmen.

3. Die scheinbare Polbedeckung der Schenkelpolmaschinen.

Hier benützen wir die Tabelle 6 für die Amplituden der harmonischen Wellen und rechnen damit die nachstehende Tabelle 8.

Tabelle 8.

$\frac{i}{i_n}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\sum_{k=1,3} \frac{1}{k} B_k$	0,565	1,028	1,315	1,500	1,633	1,745
$\frac{B_l}{B_{ln}}$	0,565	1,00	1,23	1,37	1,455	1,51
α_i	0,637	0,655	0,680	0,697	0,715	0,736

Auch diese Werte wurden in Bild 14 eingetragen, sie ergeben eine vollkommen lineare Abhängigkeit von der Erregung. Der Vergleich mit dem Polbedeckungsfaktor für Nutpolmaschinen zeigt deutlich die bereits erwähnte Polflußverminderung durch den verlaufenden Luftspalt.

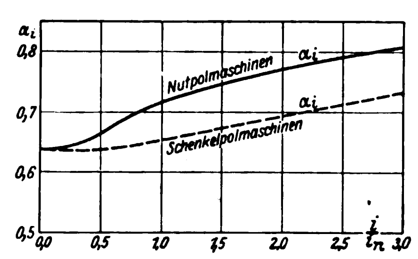


Bild 14. Die scheinbare Polbedeckung der Synchronmaschinen.

e) Die Feldkurven der Synchronmaschinen bei Berücksichtigung der Nutungen.

Die angegebenen mittleren Feldkurven sind im Luftspalte an der Oberfläche eines glatten Ständers vorhanden, der mit dem scheinbaren Luftspalte δ'' einem glatten Läufer gegenübersteht. Da aber der Ständer stets und der Läufer häufig (bei Nutpolmaschinen immer) genutet sind, werden in Wirklichkeit diese Feldformen nur fiktiven Charakter besitzen. Durch den Einfluß der Nutungen überlagern sich Oberwellen von Nutfrequenz, die an einem Oszillogramm einer Meßschleife im Ständer leicht abzulesen sind.

Es soll im folgenden mit einfachen Mitteln der Einfluß der Nutungen auf die Feldkurven im Luftspalte behandelt werden. Bei der Anwendung erweist es sich als notwendig, wieder nach den beiden Maschinenarten zu trennen.

1. Der Einfluß einer Nutung auf die mittlere Feldkurve.

In der Maschinenberechnung bietet seit jeher die Rechnung der für die Nutzahnzone aufzuwendenden Amperewindungen die größten Schwierigkeiten. Oft ist dieses Problem einer Lösung zuzuführen versucht worden, jedoch es ist noch nicht gelungen, endgültig die Klärung zu bringen. Wir bedienen uns für unsere Zwecke der mit den einfachsten Formeln arbeitenden Abhandlung von L. Dreyfus[1]. Die

[1] „Wirbelstromverluste in Ankerleitern bei Leerlauf infolge des Eindringens des Luftspaltfeldes in die Nuten." Bull. d. Schweizer E. V., 1926, XVII/10, S. 471.

Ergebnisse sind die gleichen, wie sie als erster F. W. Carter[1] und später Frey[2], dessen Abhandlung im Buche von R. Richter[3] benützt wurde, ableiten. Danach beträgt die stärkste Senke der Induktion in Nutenmitte (siehe Bild 15)

$$\frac{B_{min}}{B_{max}} = \frac{\delta}{\sqrt{\left(\frac{b_n}{2}\right)^2 + \delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b_n}{2\delta}\right)^2 + 1}} \tag{95}$$

und die Schwankung der Induktion rechnet sich daraus zu

$$B_{max} - B_{min} = 2\,B_0. \tag{96}$$

Definieren wir das Verhältnis $\frac{B_0}{B_{max}}$ mit b, so ist auch

$$B_0 = b \cdot B_{max}, \tag{97}$$

mit

$$b = \frac{\sqrt{\left(\frac{b_n}{2\delta}\right)^2 + 1} - 1}{2\sqrt{\left(\frac{b_n}{2\delta}\right)^2 + 1}}. \tag{98}$$

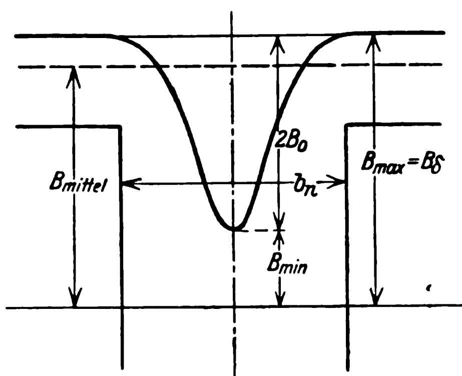


Bild 15. Der Einfluß der Nutung auf die mittlere Feldkurve.

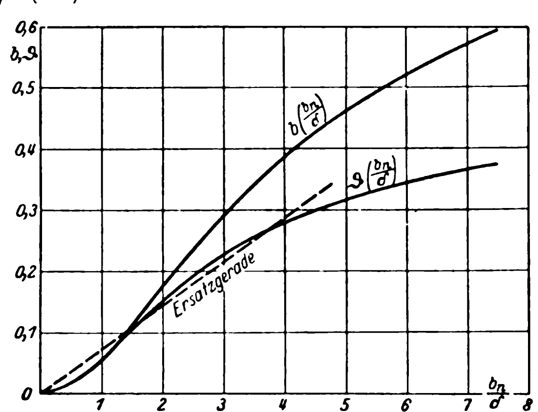


Bild 16. Die Größe der Induktionsschwankung über der Nut[4].

Bild (16) enthält die Größe b als Funktion des Verhältnisses Nutbreite zu Luftspalt.

Nachdem wir stets die mittlere Feldkurve mit den Werten B_m gegeben haben, werden wir B_0, die halbe Schwankung, durch B_m ausdrücken. Es ist

$$B_0 = b\,(B_m + B_0), \tag{99}$$

woraus folgt:

$$B_0 = \frac{b}{1 - b} B_m = \vartheta\left(\frac{b_n}{\delta}\right) \cdot B_m. \tag{100}$$

Auch dieser Wert ϑ ist in Bild 16 über $\frac{b_n}{\delta}$ aufgetragen. Es läßt sich für normale Verhältnisse, wenn $1{\cdot}5 < \frac{b_n}{\delta} < 6$ ist, angenähert durch eine Gerade durch den Ursprung wiedergeben, deren Gleichung lautet:

[1] El. World and Eng. 1901, Bd. 38, S. 884.

[2] „Anwendungen der konformen Abbildung auf praktische Probleme des Elektromaschinenbaues," Arbeiten aus d. El. Institute Karlsruhe, 1925, Bd. IV, S. 159, Beispiel 5.

[3] Elektrische Maschinen, 1924, Bd. I, S. 173.

[4] In obigem Bilde sind die Bezeichnungen $b\left(\frac{b_n}{\delta}\right)$ und $\vartheta\left(\frac{b_n}{\delta}\right)$ zu vertauschen und demgemäß die Ersatzgerade für die höherliegende Kurve zu zeichnen.

$$\vartheta = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta}, \qquad 1 \leqq \frac{b_n}{\delta} \leqq 4, \tag{101}$$

so daß aus (100) wird

$$B_0 = 0 \cdot 11 \cdot \frac{b_n}{\delta} \cdot B_m, \qquad 1 \leqq \frac{b_n}{\delta} \leqq 4. \tag{102}$$

Um über die Form der Induktionsschwankung über der Nut einfache Aussagen machen zu können, nehmen wir auf die praktischen Ausführungen der Nuten Rücksicht. Man unterscheidet allgemein offene Nuten und halbgeschlossene Nuten bei Synchronmaschinen, erstere zeichnen sich dadurch aus, daß das Verhältnis der Nutbreite zur Nutteilung nahe bei $^1/_2$ liegt.

Für offene Nuten mit $\frac{b_n}{t_n} \cong 0{,}5$ setzen wir die Induktionsschwankung als reine Sinuskurve voraus, sie folgt also dem Gesetze

$$B_{nut} = B_0 \cdot \cos \frac{2\,x\,\pi}{t_n}, \tag{103}$$

wenn t_n die Nutteilung bedeutet. Führen wir B_0 aus (102) ein, so erhalten wir

$$B_{nut} = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cdot B_m \cdot \cos \frac{2\,x\,\pi}{t_n} \tag{104}$$

und für die resultierende Feldkurve im Luftspalte:

$$B_x = B_m + B_{nut} = B_m \left(1 + 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cos \frac{2\,x\,\pi}{t_n}\right) \tag{105}$$

Für B_m ist die Entwicklung (61) zu verwenden, wobei die Amplituden der Oberwellen B_k für Nutpol- bzw. Schenkelpolmaschinen den entsprechenden Tabellen zu entnehmen sind. Belassen wir allgemein die Form (61), so können wir wegen $P_t = z\,t_n$, wenn z die Rotornutenzahl je Pol ist,

$$B_x = B_{ln} \sum_k B_k \sin k \frac{x\,\pi}{P_t} \left(1 + 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cos \frac{2\,x\,\pi}{t_n}\right) \tag{106}$$

schreiben und bei Zerlegung des trigonometrischen Produktes nach bekanntem Satze erhalten wir:

$$B_x = B_{ln} \cdot \sum_k B_k \left\{\sin k \frac{x\,\pi}{P_t} + 0 \cdot 055 \frac{b_n}{\delta} \left(\sin \frac{k - 2\,z}{P_t}\,x\,\pi + \sin \frac{k + 2\,z}{P_t}\,x\,\pi\right)\right\}. \tag{107}$$

Darin sind wieder lauter gleiche Funktionen enthalten, nur verschiedener Ordnung. Da aber die Ordnungszahl k sicher auch die Ordnungen $k' = k \pm 2\,z$ erreicht, können wir (107) in eine einzige Summe zusammenfassen:

$$B_x = B_{ln} \cdot \sum_k \left[B_k + 0 \cdot 055 \frac{b_n}{\delta} \left(B_{k+2z} + B_{k-2z}\right)\right] \cdot \sin \frac{k\,x\,\pi}{P_t}. \tag{108}$$

Es entsteht also eine genau gleiche Zerlegung wie für die mittlere Feldkurve nach (61), nur sind die Amplituden verändert. In welchem Maße diese Änderungen auftreten, werden wir dann beim Eingehen auf die beiden Maschinenarten untersuchen. Uns genügt jetzt zu erfahren, daß die Feldkurve auch mit Berücksichtigung der Nutung eines Teiles des magnetischen Kreises ihren harmonischen Charakter behält, und daß nur einzelne, den Nutenzahlen nahekommenden Oberwellen in ihren Amplituden stark, resonanzartig verändert werden.

Für „halbgeschlossene" Nuten ist abweichend von der Bezeichnung das Verhältnis der Schlitzweite s zur Nutung etwa $^1/_6$ und kleiner, so daß die Induktionsschwankung sicher nur sehr kleine Werte annehmen kann, da ja auch $\frac{s}{\delta}$ bedeutend kleiner wird. Wir vernachlässigen daher für halbgeschlossene Nuten die Induktionsschwankung in der Feldkurve überhaupt.

In der gegebenen Darstellung wurde die Veränderung des Nutenfeldes mit der Sättigung nicht berücksichtigt. Steigt nämlich die Zahninduktion sehr hoch, so wird die magnetische Leitfähigkeit des Eisens gering und ein großer Teil der Kraftlinien aus dem Zahneisen in die Nut gedrängt. Dadurch aber erscheint das durch die konforme Abbildung vermittelte Feld gestört. Leider besteht bisher noch keine bessere Methode, so daß wir diesen Nachteil wohl in Kauf nehmen müssen. Ins Praktische übersetzt bedeutet dies einfach, daß wir für höhere Luftspaltinduktionen zu hohe Induktionsschwankungen errechnen.

2. Die wirklichen Feldkurven der Nutpolmaschinen.

Das Erregerfeld quillt als starres Gleichfeld aus dem Läufer und es prägen sich demnach, wenn wir vorläufig noch einen glatten Ständer gegenüberstellen, die Nuten des Läufers als Senken und die Zähne als Erhebungen der Luftspaltinduktion ein, wie wir sie für offene Nuten, die im Läufer stets vorhanden sind, im vorigen Abschnitte ableiteten. Erinnern wir uns, daß wir bei der Betrachtung der Felderregerkurve der Nutpolmaschinen von dem Einfluß der Häufung des Strombelages in diskreten Nuten abgesehen hatten, um einen möglichst einfachen Ausdruck zur weiteren Rechnung zu erhalten. Auch dies müssen wir jetzt berücksichtigen.

Das bisher verwendete Koordinatensystem liegt am Läufer fest und hat seinen Ursprung in der Pollückenmitte. Weil die Erregerwicklung vollkommen symmetrische Spulen aufweisen muß, kann die Pollückenmitte nur mit einer Zahnmitte zusammenfallen, weshalb die Nutungsoberwelle B_{nut} nach (103) bereits richtig dargestellt ist. Für die Amplitude B_0 gilt die Beziehung (102), jedoch ist für Nutpolmaschinen zu beachten, daß ein Drittel der Polteilung in Polmitte keine Nuten aufweist, also auch keine Nutwellen. Die allgemeine Gleichung des Nutenfeldes ist nach (104) mit Einsetzung von (61) für die mittlere Feldkurve:

$$\frac{B_{nut}}{B_{ln}} = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \sum_k B_k \sin k \frac{x\pi}{P_t} \cos \frac{2x\pi}{t_n}. \tag{109}$$

Diese Nutenkurve, die nur für die beiden äußeren Drittel der Polteilung gilt, ist leicht harmonisch zu zerlegen, ihr λ-ter Koeffizient bestimmt sich durch die Integration:

$$a_\lambda = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{2}{P_t} \cdot \sum_k B_k \cdot \int_0^{P_t} \left(\sin k \frac{x\pi}{P_t} \cdot \cos \frac{2x\pi}{t_n}\right) \cdot \sin \lambda \frac{x\pi}{P_t} dx. \tag{110}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Integration abteilungsweise zwischen $0 \leqq x \leqq \frac{P_t}{3}$ und $\frac{2P_t}{3} \leqq x \leqq P_t$ zu erfolgen hat, weil nach oben in der Polmitte keine Nuten vorhanden sind. Es treten auch nur ungerade Sinusglieder auf, $\lambda = 1, 3, 5$, weil die Symmetriebedingungen der mittleren Feldkurve voll erhalten bleiben. Die mathematische Auswertung ist im Anhange erledigt, um hier nicht die Übersicht zu verlieren. Das Ergebnis ist, daß von allen Nutenoberwellen allein jene der Ordnungen $\lambda = 2z - 1$ und $\lambda = 2z + 1$ zu berücksichtigen sind, weil alle anderen verschwindend kleine Beträge gegenüber jenen beiden Wellen liefern.

Wir haben somit

$$\frac{B_{nut}}{B_{ln}} = a_{2z-1} \cdot \sin(2z-1)\frac{x\pi}{P_t} + a_{2z+1} \cdot \sin(2z+1)\frac{x\pi}{P_t} \tag{111}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_{2z-1} &= 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{1}{\pi} B_1 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 0{,}866 \frac{z-1}{2z-1}\right) \\ -a_{2z+1} &= 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{1}{\pi} B_1 \cdot \left(0{,}866 \frac{z+1}{2z+1} + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

nach Anhang, Gleichungen (53) und (54).

Beispiel.

Wir wollen gleich das Beispiel anschließen, um die Größenordnung der Amplituden kennen zu lernen. Es sei für die in Abschnitt A, 2 behandelte Nutpolmaschine des weiteren gegeben:

$$b_n = 4{,}2 \text{ cm}, \quad \delta = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Weil $z = 12$ ist, wird der prozentuelle Wert der Amplituden

$$\frac{a_{2z-1}}{B_1} = 5 \cdot 51\,\%, \quad \frac{a_{2z+1}}{B_1} = -5 \cdot 74\,\%.$$

Wie ein Vergleich mit Tabelle 4 zeigt, wo die B_k angegeben sind, fallen diese beiden Wellen in die Größenordnung der fünften Oberwelle des Feldes, ja übertreffen sie bei kleineren Sättigungen ganz bedeutend. Man muß also diese Rotornutungswellen sicher in Betracht ziehen.

Aus Bild 10 entnehmen wir, daß das Restfeld des Erregerstrombelages, das sich sägeförmig über den Nuten ausbildet, in der Zahnmitte durch 0 auf negative Werte übergeht, also dargestellt werden kann durch

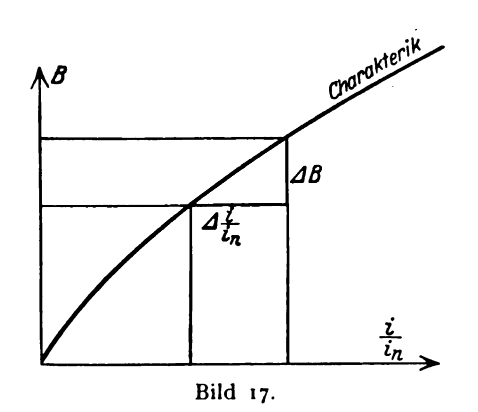


Bild 17.

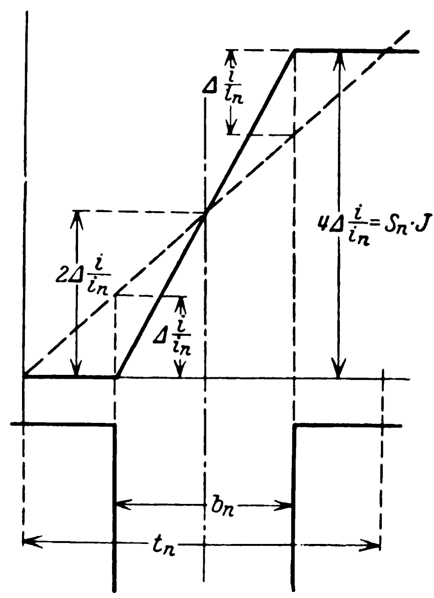


Bild 18. Die Erregerstromschwankung über einer Nut des Läufers.

$$B_{rest} = -B_0' \sin \frac{2\,x\,\pi}{t_n}, \tag{113}$$

wenn man die Sägekurve durch ein Sinusfeld gleicher Amplitude annähert. Die Amplitude der Induktionsschwankung durch die Stufen-Erregerkurve B_0' entsteht nicht etwa proportional der Ordinate der Restkurve von Bild 10b, denn dann enthielte sie nicht die Sättigungserscheinung des magnetischen Kreises. Sie ist vielmehr nach der Leerlaufcharakteristik für die Differenz der Erregerfeldstärken zu rechnen (siehe Bild 17) und nimmt demnach gegen die Polmitte hin ab. Die für die Feldschwankung in Betracht kommende Erregerstromstufe (siehe Bild 18) ist mit ihrem Höchstwerte, wenn $b_n \cong \frac{1}{2} t_n$ vorausgesetzt wird,

$$\Delta \frac{i}{i_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{i}{i_n}. \tag{114}$$

In der Pollücke besteht eine geringe Induktion, wir können dort für den Zusammenhang von Erregung und Induktion die Luftspaltcharakteristik nach (54) verwerten, so daß sich ergibt

$$\overline{B_0'} = 1{,}13\, B_{l_n} \Delta \frac{i}{i_n} = 0{,}28\, B_{l_n} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{i}{i_n}. \tag{115}$$

Um die Abnahme der Amplituden gegen die Polmitte hin mit einer einfachen Funktion anzugeben, wählen wir

$$B_0' = B_0' \cdot \cos^2 \frac{x\pi}{P_t}. \tag{116}$$

Die gegebene Funktion nimmt nur positive Werte an und erreicht für $x = 0$ und $x = P_t$ den Wert $+1$, während sie für $x = \frac{P_t}{2}$ auf Null sinkt, also ganz das verlangte Verhalten zeigt. Die Verbindung von (116) mit (115) und (113) liefert endlich

$$B_{rest} = -0{,}28 \frac{1}{\beta} B_{1n} \frac{i}{i_n} \cdot \sin 2z \frac{x\pi}{P_t} \cdot \cos^2 \frac{x\pi}{P_t}. \tag{117}$$

Zerlegen wir das Produkt der Winkelfunktionen nach

$$\left.\begin{aligned} \sin 2z \frac{x\pi}{P_t} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{2x\pi}{P_t}\right) = \frac{1}{2} \sin 2z \frac{x\pi}{P_t} + \frac{1}{4} \sin(2z+2) \frac{x\pi}{P_t} + \\ + \frac{1}{4} \sin(2z-2) \frac{x\pi}{P_t} \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

so haben wir damit schon die Fouriersche Analyse getroffen. Es tritt die Nutenwelle selbst mit dem Takte $2z$ und die beiden benachbarten Wellen $2z+2$ und $2z-2$ auf. Es wird also jetzt (117)

$$\frac{B_{rest}}{B_{1n}} = -0{,}14 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{i}{i_n} \left[\frac{1}{2} \sin(2z-2) \frac{x\pi}{P_t} + \sin 2z \frac{x\pi}{P_t} + \frac{1}{2} \sin(2z+2) \frac{x\pi}{P_t}\right]. \tag{119}$$

Auch hiefür wollen wir uns durch ein

Beispiel

sofort Überblick über die Größenordnung verschaffen. Mit $\beta = 8$ bei $z = 12$ und und einem gewählten $\frac{i}{i_n} = 2$ ist die Amplitude der Nutenwelle

$$-0{,}14 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = -0{,}035$$

oder bezogen auf die Grundwelle für

$$\frac{3{,}5}{1{,}5724} = 2{,}225\,\%$$

ist also nach Vergleich mit Tabelle 5 gerade in der Größenordnung der fünften Oberwelle. Die beiden benachbarten Wellen aus (119) haben nur die halbe Amplitude.

Fassen wir jetzt endgültig die mittlere Feldkurve mit der Nutungskurve (111) und der Restfeldkurve (119) zusammen, so ergibt sich als die wirkliche Feldkurve der Nutpolmaschinen der Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_x}{B_{1n}} = \sum_k B_k \sin k \frac{x\pi}{P_t} + \Big\{ -\frac{0{\cdot}07}{\beta} \frac{i}{i_n} \sin(2z-2) \frac{x\pi}{P_t} + \\ + \left[\frac{b_n}{\delta} \frac{0{\cdot}11}{\pi} B_1 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + 0{,}866 \frac{z-1}{2z-1}\right)\right] \sin(2z-1) \frac{x\pi}{P_t} - \frac{0{\cdot}14}{\beta} \frac{i}{i_n} \sin 2z \frac{x\pi}{P_t} - \\ - \left[\frac{b_n}{\delta} \frac{0{\cdot}11}{\pi} B_1 \left(0{,}866 \frac{z+1}{2z+1} + \frac{\pi}{6}\right)\right] \sin(2z+1) \frac{x\pi}{P_t} - \frac{0{\cdot}07}{\beta} \frac{i}{i_n} \sin(2z+2) \frac{x\pi}{P_t} \Big\} \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Berücksichtigt man aus der mittleren Feldkurve nur die ersten 3 Oberwellen, weil die höheren nichts Wesentliches mehr beitragen, so besteht die wirkliche Feldkurve aus den harmonischen Wellen der Ordnungen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ (2z-2),\ (2z-1),\ 2z,\ (2z+1),\ (2z+2). \tag{121}$$

Alle anderen Wellen sind klein dagegen und brauchen nicht in Rechnung gezogen zu werden. Diese Erkenntnis wird namentlich zur Bestimmung der Eisenverluste fruchtbar sein.

3. Die wirklichen Feldkurven in den Schenkelpolmaschinen.

Hatten wir bei den Nutpolmaschinen vom Einfluß der Ständerwicklung abgegesehen und nur die Läufernutung behandelt, so wollen wir bei den Schenkelpolmaschinen umgekehrt verfahren. Dort war die Ständernutung stets mit „halbgeschlossenen" Nuten ausgerüstet, hier sind oft noch aus den verschiedensten wirtschaftlichen wie mechanischen Erwägungen offene Nuten mit Holzkeilverschluß zu finden. Dort war die Läufernutung unbedingt notwendig und sehr grob, während hier seltener Nutungen des Läufers erscheinen und stets in gleicher Teilung wie im Ständer mit geringen Öffnungen.

Der Einfluß der Ständernutung ist genau der gleiche, wie wir ihn in Abschnitt 1 allgemein kennen lernten. Der einzige Unterschied ist die relative Bewegung von Feld und Nuten. Doch auch diese läßt sich in enge Grenzen fassen; denn bei jeder Bewegung um eine Nutteilung ist der alte Zustand völlig wiederhergestellt. Die beiden extremen Lagen sind: Nut in Polmitte, mit der größten Induktionssenke; Zahn in Polmitte, wobei die beiden benachbarten Nuten ein kleineres Maximum der Induktionssenkung aufweisen. Nachdem jedoch, wie die Feldkurven des Bildes 13 zeigen, die Unterschiede nicht groß sein können, wollen wir nur die durch (104) festgelegte Form der Nutungswelle verwenden und setzen dabei wieder offene Nuten voraus mit $b_n \cong \frac{1}{2} t_n$. Für „halbgeschlossene" Nuten vernachlässigen wir überhaupt deren Einfluß auf die mittlere Feldkurve der Maschine.

In der Beziehung (104) kommt auch der Luftspalt δ vor. Dieser ist bei Schenkelpolmaschinen jedoch veränderlich, und zwar nach dem Gesetze (63), das wir für unsere Betrachtungen zugrunde legten. Führen wir diese Beziehung in (104) ein, so ergibt sich

$$B_{nut} = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta_0} B_m \cos \frac{2 \mathfrak{z} x \pi}{P_t} \cdot \sin \frac{x \pi}{P_t}, \tag{122}$$

wenn wir die Zahl der Nuten im Ständer mit $\mathfrak{z}$ bezeichnen. Aus der mittleren Feldkurve B_m wollen wir nur die erste Welle $B_1 \sin \frac{x \pi}{P_t}$ herausgreifen, alle anderen liefern nur verschwindende Beträge. Daher ist

$$\frac{B_{nut}}{B_{ln}} = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta_0} \cdot B_1 \sin^2 \frac{x \pi}{P_t} \cos \frac{2 \mathfrak{z} x \pi}{P_t}. \tag{123}$$

Die Entwicklung des trigonometrischen Produktes ergibt

$$\frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2 x \pi}{P_t}\right) \cdot \cos 2 \mathfrak{z} \frac{x \pi}{P_t} = \frac{1}{2} \cos 2 \mathfrak{z} \frac{x \pi}{P_t} - \frac{1}{4} \cos (2 \mathfrak{z} - 2) \frac{x \pi}{P_t} - \frac{1}{4} \cos (2 \mathfrak{z} + 2) \frac{x \pi}{P_t}. \tag{124}$$

Das Nutenfeld besteht also im wesentlichen aus 3 Oberwellen, deren Interferenz gerade jene Schwebungskurve liefert, die den Bauch in Polmitte, im kleinsten Luftspalte δ_0 und ihren Knoten in der Pollücke im Luftspalt ∞ hat. Die Amplitude der Nutungswelle selbst ist

$$0 \cdot 055 \frac{b_n}{\delta_0} B_1,$$

jene der benachbarten Wellen je die Hälfte.

Die wirkliche Feldkurve der Schenkelpolmaschinen findet somit den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_x}{B_{ln}} = \sum B_k \sin k \frac{x \pi}{P_t} + 0 \cdot 055 \frac{b_n}{\delta_0} B_1 \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{2} \sin (2 \mathfrak{z} - 2) \frac{x \pi}{P_t} + \sin 2 \mathfrak{z} \frac{x \pi}{P_t} - \frac{1}{2} \sin (2 \mathfrak{z} + 2) \frac{x \pi}{P_t} \right] \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Es treten somit die beiden unmittelbar in der Ordnung benachbarten Oberwellen, die in der Nutpolmaschine nach (120) vorhanden sind, nicht auf. Berück-

sichtigt man nur die ersten 3 Wellen der mittleren Feldkurve, so besteht die wirkliche Feldkurve aus den harmonischen Wellen der Ordnungen

$$1,\ 3,\ 5\ (2\mathfrak{z}-2),\ 2\mathfrak{z},\ (2\mathfrak{z}+2). \tag{126}$$

Um eine Schätzung der Amplitude der Nutungswellen zu haben, wollen wir ein

Beispiel

anschließen. Für die bereits früher behandelte Schenkelpolmaschine sei noch gegeben:

$$b_n = 3\ \text{cm},\ \delta_0 = 2\ \text{cm},$$

so daß die prozentuelle Amplitude, bezogen auf B_1

$$5\cdot 5\frac{b_n}{\delta_0} = 5\cdot 5\cdot\frac{3}{2} = 8\cdot 25\%,$$

für die Nutungswelle selbst wird, sich also nach Tabelle 6 weit über die Amplitude der fünften Oberwelle hinaushebt.

Zusammenfassung.

Es wird für die Synchronmaschinen eine Normal-Leerlaufcharakteristik aufgestellt, welche einen sehr guten Mittelwert sowohl für Schenkelpol- als auch für Nutpolmaschinen darstellt und den Zusammenhang zwischen Ständerspannung und Erregerstrom typisiert. Der mathematische Ausdruck für die Leerlaufcharakteristik ist ein außerordentlich einfacher

$$\frac{E}{E_n} = 1{,}584\left(1 - e^{-\frac{i}{i_n}}\right)$$

und dürfte sich für viele Probleme als sehr fruchtbar erweisen. Die gegebene Normal-Leerlaufcharakteristik wird zur Berechnung der mittleren Feldkurven der beiden Maschinenarten verwendet, welche Kurven ungenutete Eisenkörper für Ständer und Läufer voraussetzen.. Bei der harmonischen Analyse zeigt sich die günstige Einwirkung des verlaufenden Luftspaltes bei den Schenkelpolmaschinen.

Endlich wird auch der Einfluß der Läufernutung in Nutpolmaschinen und jener der Ständernuten in Schenkelpolmaschinen untersucht. Die allgemeine Feldkurve wird damit für Nutpolmaschinen durch die harmonischen Wellen der Ordnungen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ (2z-2),\ (2z-1),\ 2z,\ (2z+1),\ (2z+2)$$

charakterisiert, während für Schenkelpolmaschinen die Wellen

$$1,\ 3,\ 5,\ (2\mathfrak{z}-2),\ (2\mathfrak{z}),\ (2\mathfrak{z}+2)$$

kennzeichnend sind, wenn z die Nutenzahl je Pol im Läufer und $\mathfrak{z}$ jene im Ständer angibt.

Anhang.

1. Auswertung des Integrals:

$$S = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1 + (D-1)\sin y}\sin k\,y\,d\,y \tag{1}$$

im Texte als Formel (74) genannt. Da sich eine geschlossene Integration nicht durchführen läßt, vielmehr Reihenentwicklungen nötig sein werden, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $(D-1) \gtrless 1$ besteht. Wir gehen zunächst auf den ersten Fall $(D-1) > 1$ ein:

Für sin k y läßt sich eine Entwicklung in eine Potenzreihe von sin y und cos y angeben[1].

$$\sin k\,y = \binom{k}{1}\sin y\cos^{k-1}y - \binom{k}{3}\sin^3 y\cos^{k-3}y + \ldots + (-1)^{\frac{k-1}{2}}\sin^k y\cos^0 y, \tag{2}$$

[1] Siehe auch Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, I. S. 55, 23. Aufl.

deren letztes Glied dadurch bestimmt ist, daß k nur ungerade ganzzahlig sein kann. Wir wollen (2) in Summenform anschreiben

$$\sin k y = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\nu} \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \sin^{2\nu+1} y \cos^{k-(2\nu+1)} y. \tag{3}$$

Ersetzt man nun dieses Glied in (1) durch die angegebene Summe, so wird

$$S = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\nu} \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2\nu+2} y \cdot \cos^{k-(2\nu+1)} y}{1 + a \sin y} d y. \tag{4}$$

Für die weitere Rechnung wollen wir noch wie in (4)

$$(D-1) = a \tag{5}$$

abkürzen. Die Transformation des Integranden in ein algebraisches Integral ist leicht möglich, wenn man die Veränderliche nach

$$\sin y = z, \quad \cos y = \sqrt{1-z^2}, \quad d y = \frac{d z}{\sqrt{1-z^2}} \tag{6}$$

wechselt, es wird nämlich

$$S = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\nu} \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \int_{\nu}^{1} \frac{z^{2\nu+2} \cdot (1-z^2)^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}}{1 + a z} \cdot \frac{d z}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{7}$$

Die allgemeine Entwicklung von $(1-z^2)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze lautet

$$(1-z^2)^n = 1 - \binom{n}{1} z^2 + \binom{n}{2} z^4 - \binom{n}{3} z^6 + \cdots = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{\lambda} \cdot \binom{n}{\lambda} \cdot z^{2\lambda}. \tag{8}$$

Daher ist der Zähler des Integranden aus (7) jetzt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} (-1)^{\lambda} \cdot \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot z^{2(\nu+\lambda+1)} \tag{9}$$

Die ausgeführte Division, die der Bruch in (7) andeutet, liefert

$$z^{2(\lambda+\nu+1)} : (a z + 1) = \frac{1}{a} \cdot z^{2(\nu+\lambda+1)-1} - \frac{1}{a^2} \cdot z^{2(\nu+\lambda+1)-2} + \cdots \frac{1}{a^{2(\nu+\lambda+1)-2}} z^2 +$$

$$+ \frac{1}{a^{2(\nu+\lambda+1)-1}} z - \frac{1}{a^{2(\nu+\lambda+1)}} + \frac{1}{a^{2(\nu+\lambda+1)}} \frac{1}{a z + 1}.$$

Um die weitere Rechnung einfacher zu gestalten, wollen wir die folgende Zusammenfassung dieses Summenausdruckes vornehmen

$$\frac{1}{a^{2(\nu+\lambda+1)}} \cdot \left\{ \frac{1}{1 + a z} - 1 + a z + \sum_{\sigma=1}^{\nu+\lambda} \left[(a z)^{2\sigma+1} - (a z)^{2\sigma} \right] \right\}, \tag{10}$$

die mit Berücksichtigung von (9) jetzt für den Bruch in (7) den Wert ergibt

$$\frac{1}{a^{2(\nu+1)}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{1}{a^{2\lambda}} \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{1}{1 + a z} - 1 + a z + \sum_{\sigma=1}^{\nu+\lambda} \left[(a z)^{2\sigma+1} - (a z)^{2\sigma} \right] \right\} \tag{11}$$

und endlich in (7) selbst eingeführt

$$S = \frac{1}{a^2} \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(-1)^\nu}{a^{2\nu}} \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} \frac{(-1)^\lambda}{a^{2\lambda}} \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dz}{(1+az)\sqrt{1-z^2}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + a \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + \sum_{\sigma=1}^{\nu+\lambda} \left[a^{2\sigma+1} \int_0^1 \frac{z^{2\sigma+1}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - a^{2\sigma} \int_0^1 \frac{z^{2\sigma}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} \right] \right\} \tag{12}$$

Die nunmehr auftretenden Integrale sind leicht zu lösen. Mit Ausnahme des ersten finden wir sie angegeben[1] als

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

$$\int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 1, \tag{14}$$

$$\int_0^1 \frac{z^{2\sigma+1}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2\sigma}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2\sigma+1)}, \tag{15}$$

$$\int_0^1 \frac{z^{2\sigma}\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots (2\sigma-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots\ldots 2\sigma} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{16}$$

Das erste Integral aus (12) bringen wir durch die Substitution

$$\frac{1}{1+az} = v; \qquad z = \frac{1-v}{av}; \qquad dz = \frac{-a}{(av)^2}\,dv \tag{17}$$

auf die Form

$$-\int_1^{\frac{1}{1+a}} \frac{dv}{\sqrt{(a^2-1)v^2+2v-1}} \tag{18}$$

denn die Grenzen sind nach

$$z = 0, \quad v = \frac{1}{1+0} = 1; \qquad z = 1, \quad v = \frac{1}{1+a} \tag{19}$$

zugeordnet. Beachten wir noch mit (5), daß nach Voraussetzung $a > 1$ sein soll, so wird der Koeffizient des quadratischen Gliedes positiv, und wir können direkt das Integral anschreiben[2]

$$\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \text{Area Cos} \left. \frac{1+(a^2-1)v}{\sqrt{1+(a^2-1)}} \right|_1^{\frac{1}{1+a}}. \tag{20}$$

Die Hyperbelfunktion tritt auf, weil

$$(a^2-1)\cdot(-1) - 1^2 = -a^2 < 0. \tag{21}$$

Das Argument der Hyperbelfunktion ist in den Grenzen:

$$v = \frac{1}{1+a} \qquad \text{Area Cos } 1 = 0, \tag{22}$$

$$v = 1 \qquad \text{Area Cos } a \tag{23}$$

und daher wird (20) bzw. das ursprüngliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+az)\sqrt{1-z^2}} = + \frac{\text{Area Cos } a}{\sqrt{a^2-1}}. \tag{24}$$

[1] In den Tafeln von Stampfer-Dolezal, 1912, S. 222, 21. Aufl.
[2] Nach Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch. 1, S. 74, Nr. 8, 23. Aufl.

Wir setzen nunmehr die Ergebnisse (13) bis (16) und (24) in die mehrfache Summe (12) ein und schreiben die ersten 3 Integrale, die ja vollkommen unabhängig von den Summierungen sind, voran, so daß die Form entsteht:

$$S = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\text{Area Cos}\, a}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{\pi}{2} + a\right] \cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\nu} \binom{k}{2\nu+1} \cdot \frac{1}{a^{2\nu}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} (-1)^{\lambda} \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot \frac{1}{a^{2\lambda}}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \cdot \left\{\sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu}}{a^{2\nu}} \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} \frac{(-1)^{\lambda}}{a^{2\lambda}} \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\sigma=1}^{\nu+\lambda} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2\sigma}{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2\sigma+1)} \cdot a^{2\nu+1} - \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2\sigma-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2\sigma} \frac{\pi}{2} a^{2\sigma}\right]\right\}. \tag{25}$$

Wir versuchen für einzelne Werte von k zu spezialisieren, zunächst für $k = 1$. Dafür ist

$$\frac{k-1}{2} = 0, \quad \text{daher } \nu = 0 \text{ als einziges Glied,}$$

$$\frac{k-(2\nu+1)}{2} = 0, \quad \text{daher } \lambda = 0 \text{ als einziges Glied.}$$

Es sind

$$\binom{k}{2\nu+1} = \binom{1}{1} = 1, \quad \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} = \binom{0}{0} = 1$$

und die Summe des ersten Gliedes liefert nur den Wert 1. Da $(\nu + \lambda) = 0$ bleibt, tritt von der σ-Summe überhaupt kein Glied auf. Wir haben

$$S_1 = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\text{Area Cos}\, a}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\pi}{2} + a\right]. \tag{26}$$

Für den Wert $k = 3$ ist die Zusammenstellung der Ordnungszahlen

$$\frac{k-1}{2} = 1, \qquad \text{daher} \qquad \nu = 0 \qquad \text{und} \qquad \nu = 1 \qquad \text{möglich,}$$

$$\frac{k-(2\nu+1)}{2} = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = 0, & \text{daher } \lambda = 0, \text{ (kein } \sigma\text{-Glied) und } \lambda = 1 \ (\sigma = 1) \\ 0 \text{ für } \nu = 1, & \text{daher } \lambda = 0, \text{ (mit } \sigma = 1). \end{cases}$$

Das erste Glied von (25) erhält von der Doppelsumme den Faktor

$$3 - \frac{4}{a^2},$$

während von der dreifachen Summe des zweiten Gliedes auftritt

$$\pi - \frac{8}{3} a$$

somit der Gesamtausdruck lautet

$$S_3 = \frac{1}{a^2}\left\{\left(3 - \frac{4}{a^2}\right)\left[\frac{\text{Area Cos}\, a}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\pi}{2} + a\right] + \pi - \frac{8}{3} a\right\}. \tag{27}$$

Endlich wollen wir noch den Ausdruck für $K = 5$ festlegen. Die Zusammenstellung der Ordnungszahlen ist

$$\frac{k-1}{2} = 2, \quad \text{daher treten } \nu = 0, \quad \nu = 1, \quad \nu = 2 \quad \text{auf.}$$

Für $\nu = 0$ ist $\frac{k-(2\nu+1)}{2} = 2$, daher $\lambda = 0$ (kein σ-Glied), $\lambda = 1$ ($\sigma = 1$),
$\lambda = 2$ ($\sigma = 1$, $\sigma = 2$),

Für $\nu = 1$ ist $\frac{k-(2\nu+1)}{2} = 1$, daher $\lambda = 0$ ($\sigma = 1$), $\lambda = 1$ ($\sigma = 1$, $\sigma = 2$).

Für $\nu = 2$ ist $\frac{k-(2\nu+1)}{2} = 0$, daher $\lambda = 0$ $(\sigma = 1, \sigma = 2)$.

Zum ersten Gliede in (25) tritt der Faktor

$$5 - \frac{20}{a^2} + \frac{16}{a^4},$$

während die dreifache Summe sich reduziert auf:

$$-\frac{24}{5}a + 2\pi + \frac{32}{3}\frac{1}{a} - 4\pi\frac{1}{a^2},$$

somit lautet der Gesamtausdruck

$$S_5 = \frac{1}{a^2}\left\{\left(5 - \frac{20}{a^2} + \frac{16}{a^4}\right)\left[\frac{\text{Area Cos } a}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\pi}{2} + a\right] - \frac{24}{5}a + 2\pi + \frac{32}{3}\frac{1}{a} - 4\pi\frac{1}{a^2}\right\}. \quad (28)$$

Nun sei der zweite Fall $(D-1) = a < 1$ betrachtet. Für $\sin ky$ wenden wir wieder die Entwicklung (2) an, halten auch den weiteren Weg wie beim ersten Falle bis zur Umschreibung (9). Führen wir diese für den Zähler in (7) ein, so ergibt sich

$$S = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^\nu \binom{k}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} (-1)^\lambda \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \int_0^1 \frac{z^{2(\nu+\lambda+1)} dz}{(1+az)\sqrt{1-z^2}}. \quad (29)$$

Jetzt dürfen wir aber nicht nach dem dort angegebenen Vorgange Zähler und Nenner des ersten Bruches ausdividieren, denn wir erhielten eine in a divergierende Reihe. Wir kehren daher den Dividenden um und bilden

$$1 : (1 + az) = 1 - az + (az)^2 - (az)^3 + \ldots.$$

Wir fassen die unendliche Reihe in zwei Summenausdrücke zusammen

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} \left[(az)^{2\sigma} - (az)^{2\sigma+1}\right] \quad (30)$$

und gewinnen damit aus (29)

$$S = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^\nu \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} (-1)^\lambda \cdot \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[a^{2\sigma} \int_0^1 \frac{z^{2(\nu+\lambda+\sigma+1)} dz}{\sqrt{1-z^2}} - a^{2\sigma+1} \int_0^1 \frac{z^{2(\nu+\lambda+\sigma+1)+1} dz}{\sqrt{1-z^2}}\right] \quad (31)$$

Die beiden Integrale sind analog (15) und (16) sofort anzugeben:

$$\int_0^1 \frac{z^{2(\nu+\lambda+\sigma+1)} dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+1]}{2\cdot 4\cdot 6\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+2]} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (32)$$

$$\int_0^1 \frac{z^{2(\nu+\lambda+\sigma+1)+1} dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+2]}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+3]} \quad (33)$$

und damit endgültig:

$$S = \sum_{\nu=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^\nu \cdot \binom{k}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\frac{k-(2\nu+1)}{2}} (-1)^\lambda \cdot \binom{\frac{k-(2\nu+1)}{2}}{\lambda} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+1]}{2\cdot 4\cdot 6\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+2]} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a^{2\sigma} - \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+2]}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots[2(\nu+\lambda+\sigma)+3]} \cdot a^{2\sigma+1}\right] \quad (34)$$

Gehen wir wieder auf die Spezialisierungen für bestimmte Werte von k ein. Zunächst sei der Ausdruck für $k = 1$ zu bestimmen. Hier gelten natürlich voll die Anschreibungen des ersten Falles $a > 1$ über die Ordnungszahlen ν und λ, während σ diesmal von beiden unabhängig läuft. Analog dort reduziert sich (34) auf

$$S_1 = \sum_1 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\sigma + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2\sigma + 2)} \cdot \frac{\pi}{2} a^{2\sigma} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2\sigma + 2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2\sigma + 3)} a^{2\sigma+1} \right], \tag{35}$$

wenn wir gleichzeitig definitionsweise die Abkürzung Σ_1 einführen.

Für $k = 3$ ergibt sich, falls wir wie in (35) die Abkürzung

$$\sum_3 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\sigma + 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2\sigma + 4)} \frac{\pi}{2} a^{2\sigma} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2\sigma + 4)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2\sigma + 5)} a^{2\sigma+1} \right] \tag{36}$$

schreiben, einfach

$$S_3 = 3 \sum_1 - 4 \sum_3. \tag{37}$$

Endlich wird für $k = 5$, wenn wir in Vorausnahme analog den früheren Definitionen ansetzen:

$$\sum_5 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\sigma + 5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2\sigma + 6)} \cdot \frac{\pi}{2} a^{2\sigma} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2\sigma + 6)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2\sigma + 7)} \cdot a^{2\sigma+1} \right], \tag{38}$$

der Summenausdruck (34) spezialisiert als

$$S_5 = 5 \sum_1 - 20 \sum_3 + 16 \sum_5. \tag{39}$$

Um für die numerische Rechnung vorzuarbeiten, wollen wir noch die ersten Glieder der unendlichen Summen anschreiben. Für Σ_1 ergibt sich auf diese Weise:

$$\sum_1 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^4 + \ldots \right] - \left[\frac{2}{3} a + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a^3 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} a^5 + \ldots \right], \tag{40}$$

während sich die Summe Σ_3 durch leichten Vergleich mit Σ_1 aus dieser Summe ableiten läßt nach

$$\sum_3 = \frac{1}{a^2} \left(\sum_1 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} a \right) \tag{41}$$

und sofort läßt sich analog die Summe Σ_5 anschreiben:

$$\sum_5 = \frac{1}{a^2} \left(\sum_3 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a \right), \tag{42}$$

so daß eigentlich überhaupt nur die erste Summe und diese je nach Konvergenz der Glieder verschieden weit zu rechnen ist.

2. Die Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten

$$a_\lambda = \frac{0 \cdot 1 1 b_n}{\delta} \sum_{k=1,3}^{\infty} B_k \frac{2}{P_t} \int_0^{P_t} \left(\sin k \frac{x\pi}{P_t} \cos 2z \frac{x\pi}{P_t} \right) \cdot \sin \lambda \frac{x\pi}{P_t} \, dx. \tag{43}$$

Wir zerlegen das erste Produkt in eine trigonometrische Summe

$$\frac{1}{2} \sin (k + 2z) \frac{x\pi}{P_t} + \frac{1}{2} \sin (k - 2z) \frac{x\pi}{P_t}$$

und haben das allgemeine Integral

$$\int \sin (k \pm 2z) \frac{x\pi}{P_t} \sin \lambda \frac{x\pi}{P_t} \, dx,$$

wobei jetzt zu beachten ist, daß nur in den Grenzen $0 \leqq x \leqq \frac{P_t}{3}$ und $\frac{2}{3} P_t \leqq x \leqq P_t$ integriert werden darf. Die weitere Zerlegung des vorstehenden trigonometrischen Produktes liefert

$$\frac{1}{2} \cos (k \pm 2z - \lambda) \frac{x\pi}{P_t} - \frac{1}{2} \cos (k \pm 2z + \lambda) \frac{x\pi}{P_t}$$

und damit das allgemeine Integral

$$\int \cos (k \pm 2z \pm \lambda) \frac{x\pi}{P_t} dx,$$

welches die Lösung

$$\frac{P_t}{\pi} \frac{\sin (k \pm 2z \pm \lambda) \frac{x\pi}{P_t}}{k \pm 2z \pm \lambda}$$

besitzt. Mit Berücksichtigung der oben genannten Grenzen wird daraus

$$\frac{P_t}{\pi} \cdot \frac{1}{k \pm 2z \pm \lambda} \left[\sin (k \pm \lambda \pm 2z) \frac{\pi}{3} - \sin (k \pm \lambda \pm 2z) \frac{2\pi}{3} \right], \tag{44}$$

weil für $x = 0$ und $x = P_t$ der Ausdruck wegfällt. Ziehen wir die Summe der Winkelfunktionen zusammen, so wird aus (44)

$$-\frac{2P_t}{\pi} \frac{\sin (k \pm \lambda \pm 2z) \frac{\pi}{6}}{k \pm \lambda \pm 2z} \cos (k \pm \lambda \pm 2z) \frac{\pi}{2}. \tag{45}$$

Es ergibt sich hier, daß λ nur ungerade sein kann. Denn für alle geraden Werte von λ wird die Zahlensumme $(k \pm \lambda \pm 2z)$ ungerade, weil k es ist, und für solche Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ verschwindet die cos-Funktion. Wird aber λ ungerade, so ist

$$\cos (k \pm \lambda \pm 2z) \pi = (-1)^{\frac{k \pm \lambda}{2} \pm z}$$

und daher der Ausdruck (45)

$$-(-1)^{\frac{k \pm \lambda}{2} \pm z} \cdot \frac{2P_t}{\pi} \cdot \frac{\sin (k \pm \lambda \pm 2z) \frac{\pi}{6}}{(k \pm \lambda \pm 2z)}. \tag{46}$$

Führen wir dies durch die Zerlegungen wieder zurück in (43) ein, so entsteht

$$\left. \begin{aligned} a_\lambda = 0{\cdot}11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} B_k \{ [\psi (k + \lambda + 2z) + \psi (k + \lambda - 2z)] - \\ - [\psi (k - \lambda + 2z) + \psi (k - \lambda - 2z)] \} \end{aligned} \right| \tag{47}$$

wobei die Schreibung

$$\psi (\nu) = (-1)^\nu \frac{\sin \nu \frac{\pi}{6}}{\nu}$$

eingeführt wurde.

Nehmen wir an, daß die Nutenzahl im Rotor je Polteilung durch 3 teilbar ist, also $z = 3\tau$, wobei τ jede beliebige ganze Zahl sein kann, so wird

$$\sin (k \pm \lambda \pm 2z) \frac{\pi}{6} = (-1)^\tau \sin (k \pm \lambda) \frac{\pi}{6} \tag{48}$$

und



$$[\psi(k \pm \lambda + 2z) + \psi(k \pm \lambda - 2z)] = (-1)^{\frac{k \pm \lambda}{2}} \cdot \sin(k \pm \lambda)\frac{\pi}{6} \cdot \frac{2(k \pm \lambda)}{(k \pm \lambda)^2 - 4z^2}. \quad (49)$$

Daher reduziert sich (47) auf

$$a_\lambda = 0 \cdot 11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} B_k \left\{ 2 \cdot (-1)^{\frac{k+\lambda}{2}} \cdot (k+\lambda) \cdot \frac{\sin(k+\lambda)\frac{\pi}{6}}{(k+\lambda)^2 - 4z^2} - 2 \cdot (-1)^{\frac{k-\lambda}{2}} \cdot (k-\lambda) \cdot \frac{\sin(k-\lambda)\frac{\pi}{6}}{(k-\lambda)^2 - 4z^2} \right\} \quad (50)$$

Der Ausdruck in der geschlungenen Klammer gibt nun den eigentlichen Wert der Amplitude a_λ an. Der Bau läßt deutlich erkennen, daß es sich um eine Resonanzerscheinung handelt.

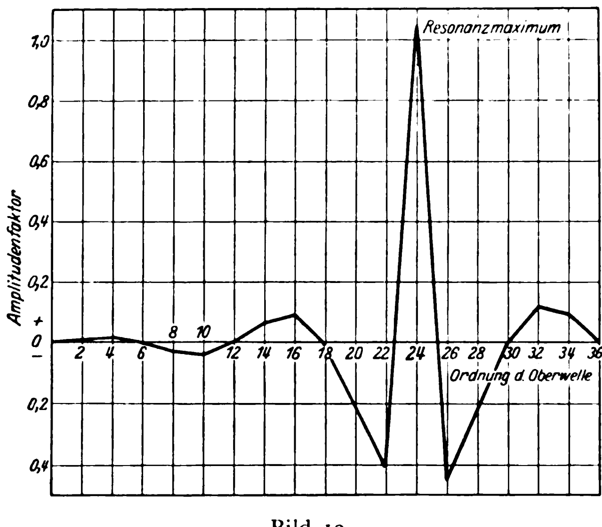


Bild 19.

Wir können den ersten oder zweiten Bestandteil der geschlungenen Klammer von (50) leicht in eine allgemeine Form schreiben

$$(-1)^{\nu} \cdot \frac{2\nu \sin \nu \frac{\pi}{6}}{\nu^2 - 4z^2}, \quad (51)$$

wobei $\nu = k \pm \lambda$ zu ersetzen ist, um zu spezialisieren. ν darf nur die geraden Zahlen durchlaufen, weil λ sowohl wie k ungerade sind. Rechnen wir den Wert (51) für ein bestimmtes z, etwa $z = 12$, so erhalten wir in Bild 19 den vollgezogenen gebrochenen Linienzug, der für $\nu = 2z = 24$ ein Maximum in bekannter Resonanzerscheinung erreicht. Der Wert dieser Ordinate ist nicht einfach aus (51) zu ersehen, sondern muß als unbestimmte Form gerechnet werden. Wir haben $z = 6 \cdot 2$, weshalb

$$\left. \frac{\sin \nu \frac{\pi}{6}}{\nu^2 - 4z^2} \right|_{\nu = 2z} = \frac{\sin 4\pi}{0} = \frac{0}{0}$$

wird. Wir differenzieren daher Zähler und Nenner nach ν und erhalten

$$\left. \frac{\frac{\pi}{6} \cos \nu \frac{\pi}{6}}{2\nu} \right|_{\nu = 2z} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{4z}$$

und damit wird (51) an der Stelle $\nu = 2z$

$$(-1)^{2z} \cdot 4z \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{4z} = \frac{\pi}{6}.$$

In Anwendung auf unseren Fall der Summe (50) ist zu bemerken, daß durch die Multiplikation mit den Feldwellenamplituden B_k der Linienzug des Bildes 19 vollkommen zerstört wird. Alle a_λ behalten sehr geringe, abwechselnd mit der Ordnung positive und negative Werte. Nur jene Koeffizienten, für welche $\lambda = 2z \pm 1$ ist, erreichen relativ sehr hohe Werte. Den Beweis liefert die Ausrechnung der Summe (50) für alle Zahlen λ bei irgendeiner Erregung $\frac{i}{i_n}$, für welche die B_k einzusetzen sind; hier jedoch wollen wir von einer Wiedergabe der umfangreichen Rechnung absehen. Wir brauchen bei Annahme der vorgehenden Behauptung somit von allen a_λ nur die folgenden beiden und diese wieder, nur mit $k = 1$ behaftet, zu berücksichtigen:

$$a_{2z-1} = 0{\cdot}11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot B_1 \cdot \left[\frac{\pi}{6} + 0{,}866 \frac{z-1}{2z-1}\right], \tag{53}$$

$$a_{2z+1} = 0{\cdot}11 \frac{b_n}{\delta} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot B_1 \cdot \left[0{,}866 \frac{z+1}{2z+1} + \frac{\pi}{6}\right], \tag{54}$$

denn für $\lambda = 2z - 1$ wird bei $k = 1$

$$\frac{2(k-\lambda)}{(k-\lambda)^2 - 4z^2} = \frac{z-1}{2z-1}, \qquad \sin(k-\lambda)\frac{\pi}{6} = -(-1)^z \sin\frac{\pi}{3}$$

und für $\lambda = 2z + 1$ bei $k = 1$ ganz ähnlich

$$\frac{2(k+\lambda)}{(k+\lambda)^2 - 4z^2} = \frac{z+1}{2z+1}, \qquad \sin(k+\lambda)\frac{\pi}{6} = +(-1)^z \cdot \sin\frac{\pi}{3},$$

während die beiden anderen Bestandteile aus (50) jeweils das Maximum nach (52) annehmen.



Nachtrag und Berichtigung.

In meiner Arbeit: „Das genaue Diagramm der kompensierten asynchronen Induktionsmaschine I" Arch. Elektrot. XVIII, Heft 4, habe ich einen Ausdruck angegeben, der den Punkt P_∞ bestimmt. Diese Formel für $\operatorname{tg}\gamma_\infty$ auf Seite 351 in Gleichung (6a) ist eine Näherungsformel. Eine exakte Rechnung ergibt

$$\operatorname{tg}\gamma_\infty = \frac{\tau + \sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}\varphi_e + \operatorname{tg}\varphi_0 \sin^2\alpha}.$$

Ich benütze ferner die Gelegenheit, einige Fehler auszumerzen. In Gleichung (3) und (9) muß es natürlich heißen:

$$2\pi\frac{u_p \cdot p}{60} \text{ statt } \frac{u_p \cdot p}{60}.$$

In Gleichung (8) muß im zweiten Glied stehen L_p statt Lp, in Gleichung (9a) ist im letzten Glied der Faktor p zu streichen.

H. Hemmeter.

Abgeschlossen am 14. November 1927.



Archiv für Elektrotechnik

XIX. Band. 3. Heft. 1928.

Funkenuntersuchungen mit dem Kathodenoszillographen[1].

Von

Rudolf Tamm.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

1. Einleitung.

Die Erforschung der Vorgänge im elektrischen Funken hat theoretisch und praktisch gleich großes Interesse. Besondere Bedeutung hat eine Bearbeitung dieses Gebietes gewonnen: Die Townsendsche Theorie[2].

Sie geht davon aus, daß der Durchschlag von Luft durch Stoßionisation zustande kommt. Die unter dem Einfluß eines Ionisators an der Kathode oder im Gas frei werdenden Elektronen fliegen auf die Anode zu. Haben sie eine gewisse Geschwindigkeit erreicht, so werden sie fähig, von neutralen Molekülen Elektronen abzuspalten. Nach jedem Stoß wandern zwei Elektronen weiter zur Anode, ein positives Ion zur Kathode. Zum Durchschlag kann es auf diese Weise jedoch noch nicht kommen, der Strom bleibt endlich, er kann nicht unendlich bzw. sehr groß werden. Dies kann erst geschehen, wenn auch die positiven Ionen ihrerseits wieder ionisieren, d. h. neue Elektronen und Ionen bilden. Townsend selbst und Schumann[3] zeigten, daß diese Theorie mit dem Experiment in gute Übereinstimmung gebracht werden kann. Die Townsendsche Theorie schien tatsächlich den Kern des Problems richtig zu treffen. Dennoch zeigte Rogowski, daß sie in der Wurzel kranken muß.

Rogowski[4] rechnete nach, welche Zeiten nach der Townsendschen Theorie nötig wären, um bei plötzlichem Anlegen der Spannung (Stoßbeanspruchung) zum Durchschlag zu führen. Er fand, daß die positiven Ionen viel zu langsam wandern. Allein um den durch Elektronenionisation hervorgerufenen Strom durch Hinzunahme der Ionisation der positiven Ionen zu verdoppeln, sind Zeiten von 10^{-4} bis 10^{-5} sec nötig, während frühere Messungen mit Stoßspannungen Zeiten von 10^{-6} bis 10^{-7} sec bis zum vollen Durchschlag erwarten ließen.

Toepler näherte sich dem Problem von der experimentellen Seite. Er hatte für Gleitfunken das Gesetz aufgestellt und durch viele Versuche bestätigt gefunden, daß der Funkenwiderstand umgekehrt proportional der durchgeflossenen Ladung sei. Dieses Gesetz wurde von ihm auch auf den räumlichen Funken ausgedehnt in der Form

$$R = \frac{k \cdot F}{Q}.$$

R = Widerstand des Funkens in jedem Augenblick,
F = Funkenlänge,
Q = die gesamte, bis zum betrachteten Augenblick durch den Funken geflossene Ladung.

---

[1] Dissertation, eingereicht am 13. 9. 1927 bei der Technischen Hochschule Aachen. Auszugsweise vorgetragen am 2. 7. 1927 auf der V.D.E-Tagung in Kiel.
[2] Marx, Hdb. d. Radiol. Bd. I: J. S. Townsend, Die Ionisation der Gase. Leipzig 1920.
[3] W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen. Berlin 1923.
[4] W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. XVI, 496, 1926.

Die Konstante k wurde von ihm selbst und anderen Experimentatoren bestimmt. Die angegebenen Werte schwankten im Verhältnis 1 : 5[1]. Es zeigte sich ferner, daß diese Konstante nicht nur von der Versuchsanordnung selbst, sondern auch von der Höhe der Spannung abhing[2]. Keineswegs können somit unsere Vorstellungen auf diesem Gebiet als befriedigend gelten.

Unter diesen Umständen war es wünschenswert, den Funken mit dem Kathodenoszillographen näher zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit will lediglich experimentelles Material bringen und dieses mit den bestehenden Theorien vergleichen.

Es wurde mehr Wert darauf gelegt, einen Überblick über das ganze Gebiet zu gewinnen, als durch zahlreiche Messungen sehr großer Genauigkeit ein Teilgebiet bis in alle Feinheiten zu erforschen.

2. Die Versuchsanordnung.

Die Untersuchungen wurden mit dem im Aachener Elektrotechnischen Institut entwickelten Kathodenoszillographen[3] durchgeführt. Mit diesem Oszillographen wurden bereits früher einige Funkenoszillogramme aufgenommen[4].

Die benutzte Funkenstreckenanordnung ist in Bild 1 schematisch wiedergegeben. Die Funkenstrecke befindet sich in einem großen Glasgefäß, das oben durch einen mit Picein aufgekitteten Eisendeckel vakuumdicht verschlossen ist. In diesem Deckel sind, mit Glas isoliert, zwei Spannungszuführungen. Außerdem ist auf den

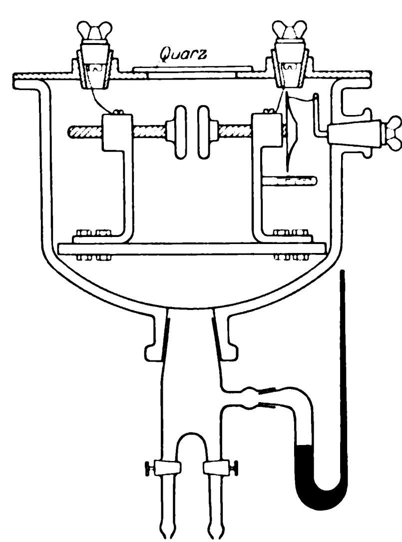


Bild 1. Glasglocke mit Funkenstrecke.

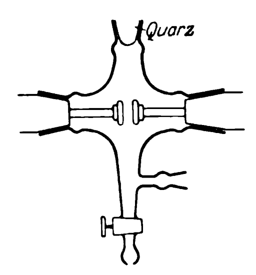


Bild 2. Kleines Prüfgefäß.

Deckel ein durchsichtiges Quarzfenster (Bergkristall) aufgekittet, durch das die Funkenstrecke von außen mit einer Quecksilberbogenlampe beleuchtet wurde. Die ganze Glocke konnte evakuiert und mit Gas gefüllt werden. Der Druck wurde an einem Quecksilbermanometer abgelesen. In der Glasglocke befand sich ein von außen ablesbares Thermometer. Der Elektrodenabstand wurde von außen durch Drehen eines Schliffes geändert, der jeweilige Abstand konnte auf ein hundertstel Millimeter abgelesen werden. Da das Auswechseln der Elektroden bei diesem Prüfgefäß einige Mühe bereitete (Abkitten der Eisenplatte), wurde für manche Versuche das in Bild 2 angegebene Glasgefäß benutzt. Die Elektroden konnten hier leicht ausgewechselt, jedoch nicht von außen verstellt werden. Die Beleuchtung durch den Quarztiegel war nicht so gut, wie durch das Quarzfenster bei der großen Glasglocke. Das Gefäß wurde hauptsächlich für orientierende Versuche verwandt. Für

[1] M. Toepler, Arch. f. Elektrot. XIV, 305, 1925. — Arch. f. Elektrot. XVII, 61, 1926. — O. Mayr, Arch. f. Elektrot. XVII, 52, 1926.

[2] H. Müller, Arch. f. Elektrot. XVIII, 328, 1927.

[3] W. Rogowski, E. Flegler, R. Tamm, Arch. f. Elektrot. XVIII, 513, 1927.

[4] W. Rogowski E. Flegler, R. Tamm, Arch. f. Elektrot. XVIII, 479, 1927.

Untersuchungen bei Atmosphärendruck wurden außerdem noch gewöhnliche Funkenstrecken benutzt.

Als Beobachtungsmethoden kommen zwei in Betracht: 1. die Betrachtung des Vorgangs auf dem Leuchtschirm, 2. die Aufzeichnung auf die photographische Schicht. Für quantitative Auswertungen kommt nur die photographische Aufzeichnung in Betracht. Es wurden Rollfilme verwandt, die es gestatteten, 8 Aufnahmen hintereinander zu machen. Versuchsreihen wurden so aufgenommen, daß bei gleicher Spulenstellung und Empfindlichkeit des Oszillographen die nötige Zahl von Aufnahmen in schneller Reihenfolge aufgenommen wurden (in ungefähr 10—30 Minuten). Es wurden bis zu drei Oszillogrammen übereinander geschrieben, so daß man bis zu 24 Kurven auf einem Filmstreifen erhielt. Es wurden nur Oszillogramme derselben Versuchsreihe miteinander verglichen, um von Temperatur, Barometerstand, Luftfeuchtigkeit usw. unabhängig zu sein. Parallel mit der photographischen Aufzeichnung ging die Leuchtschirm-Beobachtung, um festzustellen, ob der Vorgang immer in der gleichen Weise verlief, und um entscheiden zu können, ob das aufgenommene Oszillogramm dem Allgemeinfall entsprach.

Alle in die Kurvenblätter eingetragenen Punkte sind einmalige Aufnahmen und keine Mittelwerte aus vielen Oszillogrammen. Eine gewisse Mittelwertsbildung erfolgt durch die hindurchgelegte Kurve.

Wo nichts anderes gesagt ist, wurden die Elektroden mit einer Quecksilberbogenlampe beleuchtet. Im Verlauf einer Versuchsreihe wurden sie nicht poliert.

Die Zeiteichung geschah durch Aufnahme von Rechteckwanderwellen (Einschaltschwingung einer 60-m-Freileitung, Spannung am offenen Ende). Die Zeitablenkgeschwindigkeit ist bei Aufladung von Kondensatoren über Manganinwiderstände in einfachster Weise reproduzierbar.

3. Die Schaltung.

Sämtliche Versuche wurden bei Stoßbeanspruchung durchgeführt, d. h. die Spannung an der Funkenstrecke wurde möglichst schnell auf den vollen Wert gebracht. Bei allen Versuchen mit 5 kV war die Stoßwelle unendlich lang, d. h. wenn kein Durchschlag an der Funkenstrecke eintrat, sank die Spannung mit einer Zeitkonstante von etwa $^1/_5$ sec ab.

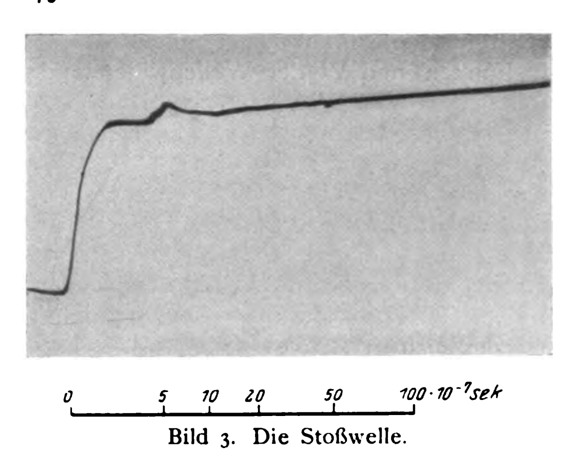


Bild 3. Die Stoßwelle.

Bild 3 zeigt das Oszillogramm einer solchen Stoßwelle, Bild 4 die zugehörige Schaltung. Wird der Schalter eingelegt, so zieht eine Wanderwelle von der halben Höhe der Schaltspannung in die 60-Meter-Freileitung ein (die andere Hälfte der Spannung liegt an den Widerständen am Anfang der Leitung). Am offenen Ende der Leitung wird die Spannung auf das Doppelte, d. h. auf die volle Schaltspannung



reflektiert. Es läuft eine Welle zurück, die die gesamte Leitung auf den vollen Wert der Spannung auflädt. Der Vorgang ist damit abgeschlossen. Am Ende der Leitung, an das unsere Funkenstrecke angeschlossen ist, springt die Spannung also auf U und bleibt dann konstant. (Das Oszillogramm ist nicht parallel zum Bildrand geschrieben, infolgedessen hat man den Eindruck, als ob die Spannung später noch allmählich anstiege, tatsächlich ist dies nicht der Fall.)

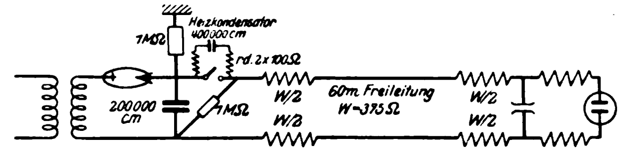


Bild 4. Die Schaltung.

Die wiedergegebene Stoßwelle ist nicht ganz so ideal, wie wir sie gerne haben möchten. Nach einer Zeit von $4 \cdot 10^{-7}$ sec erscheint eine Spannungserhöhung. Sie rührt von einer Inhomogenität am Ende der Leitung her, z. B. der Kapazität der Funkenstrecke selbst. Um diesen Einfluss möglichst herabzudrücken, ist die Funkenstrecke über Ohmsche Widerstände von der Größe des Wellenwiderstandes angeschlossen, die Ablenkplatten des Oszillographen sind ebenfalls über Ohmsche Widerstände an die Funkenstrecke angeschlossen. Jedoch ist der Kreis Funkenstrecke-Ablenkplatten mit Zuleitungen dadurch nicht schwingungsunfähig gemacht (bei der Kleinheit der Kapazität der Ablenkplatten wären dazu Widerstände von mehreren tausend Ohm notwendig). Die Schwingungsfähigkeit dieses Systems ist uns auch gar nicht unerwünscht, wir können daraus im Gegenteil wertvolle Schlüsse auf die Geschwindigkeit des Spannungszusammenbruchs an der Funkenstrecke selbst ziehen, Geschwindigkeiten, die sonst bei gegebener Zeitablenkung gar nicht mehr auswertbar wären. (vgl. S. 242 Bild 12 und 13).

Die angegebene Schaltung hat noch den Vorteil, daß man aus dem Spannungsoszillogramm sofort auch (bei Vernachlässigung der kleinen Kapazitäten) den im Funken fließenden Strom ablesen kann. Und zwar beträgt er

$$i = \frac{U - u}{2\,W}.$$

Dabei ist i der Strom, der durch den Funken fließt, U die Schaltspannung, u die Spannung am Funken und W der Wellenwiderstand. Für $U = 5$ kV und $W = 375$ Ohm erhält man also bei vollkommenem Kurzschluß ($u = 0$) einen maximalen Strom von 6,7 Ampere. In unseren Oszillogrammen sind also Spannungs- und Strommaßstab geradlinig.

Die Gleichspannung wurde durch Glühventilgleichrichtung hergestellt, die Primärspannung wurde dem Drehstromnetz entnommen. Die absolute Höhe der Stoßwelle spielt keine wesentliche Rolle, sie wird etwa 4700 Volt, also rund 5 kV betragen haben. Alle Auswertungen werden auf die Schlagweite bezogen, bei der ein Funke gerade noch auftritt. Im übrigen bietet das Oszillogramm selbst eine Handhabe für genauen Spannungsvergleich.

4. Der Spannungszusammenbruch im homogenen Feld bei Atmosphärendruck.

Bild 5 zeigt eine solche Aufnahme. Der Durchschlag trat gerade noch ein und zwar erfolgte er zwischen Messing—Plattenelektroden mit richtiger Randausbildung[1] (äußerer Durchmesser 34 mm), die Funkenstrecke wurde beleuchtet, die

[1] W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. XII, 1. 1923. — W. Rogowski und H. Rengier, Arch. f. Elektrot. XVI, 73. 1926.

Beobachtung auf dem Leuchtschirm zeigte, daß der Durchschlag stets in der gleichen Weise vor sich ging. (Bild 6 zeigt eine zweite Aufnahme, sie unterscheidet sich fast nicht von Bild 5.) Wie wir erwarten, steigt die Spannung an, bleibt eine gewisse Zeit konstant und bricht dann zusammen. Überraschend kommt uns die Art des Zusammenbruchs. Wir würden erwarten, daß er in mehr oder weniger gerundeter Form von U auf Null erfolgt. Im Bilde jedoch sehen wir, daß die Spannung zwar erst ganz normal zusammenbricht, dann jedoch

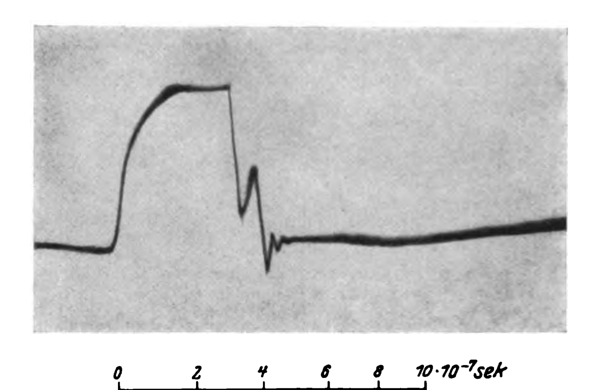


Bild 5. Funkenoszillogramm: 5 kV, atm. Druck, Messingplatten. a = 1,0 mm.

plötzlich stehen bleibt, ja sogar wieder ansteigt, um dann endlich auf Null zu gehen. Der ganze Vorgang braucht erheblich längere Zeit, als wir erwarten. Diese merkwürdige Art des Zusammenbruchs wollen wir hier nicht näher diskutieren, wir werden später darauf zurückkommen. Es sei jedoch gleich hier darauf hingewiesen, daß dieser Zusammenbruch in einer Stufe auch bei rund 10 kV auftritt, wie bereits

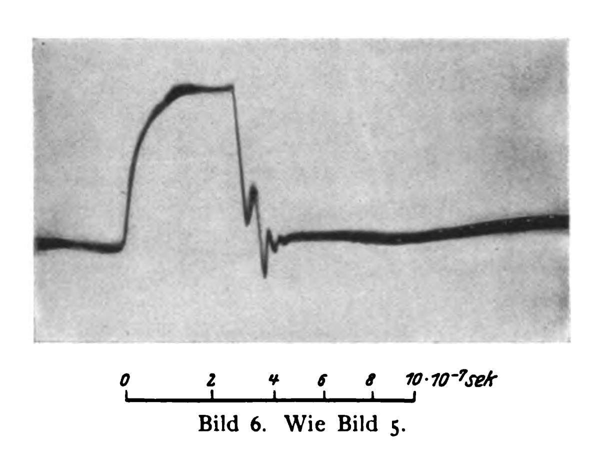


Bild 6. Wie Bild 5.

früher gezeigt wurde[1]. Es kann somit gesagt werden, daß unter den angegebenen Verhältnissen (Stoßspannungen 5 bis 10 kV) das Toeplersche Funkengesetz nicht anwendbar ist. Mit der Townsendschen Theorie läßt sich dieses Ergebnis nicht ohne weiteres in Beziehung setzen. Der Spannungszusammenbruch am Funken unter Annahme einer bestimmten Charakteristik des speisenden Kreises ist bisher noch nicht berechnet worden. Es dürfte dies auch nicht so leicht möglich sein, da die Vorgänge noch zu wenig bekannt sind.

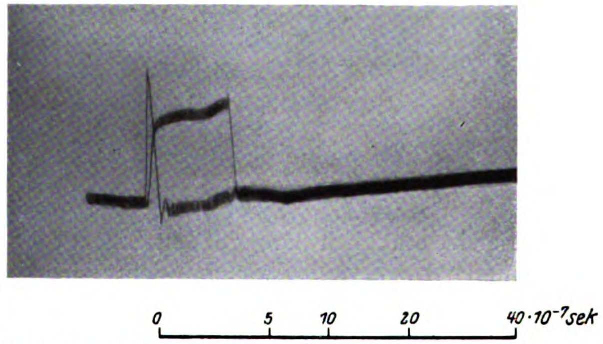
[1] W. Rogowski, E. Flegler, R. Tamm, Arch. f. Elektrot. XVIII, 479, 1927, Bild 43 und 44.

Was uns hier besonders interessiert, das ist die Frage nach der Verzögerung. Die Platten- und Kugelfunkenstrecke wird bei vielen schnell verlaufenden Vorgängen zum Messen der Spannung benutzt und es wird dabei häufig die Voraussetzung gemacht, daß die Verzögerung sehr klein ist. Man ist vielleicht geneigt, die Verzögerung in Bild 5 und 6 auf rund $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec zu schätzen. Hätten wir eine Stoß-



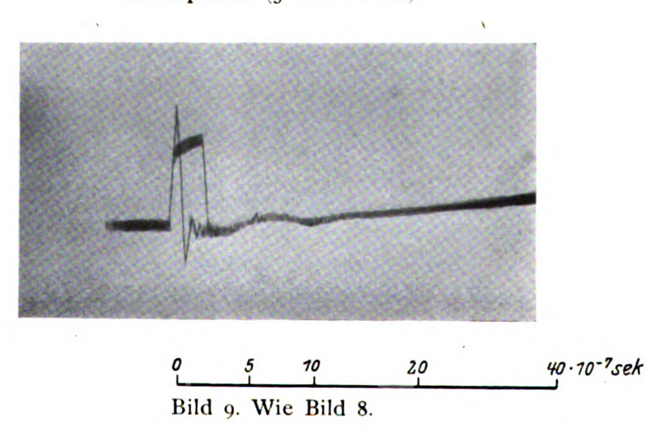
Bild 7. Verschiedene Stoßwellenformen.

welle nach Bild 7 a oder b, so wäre die Verzögerung völlig eindeutig definiert. Es ist die Zeit, die die Funkenstrecke ihre statische Durchschlagsspannung aushält, bis der Zusammenbruch einsetzt. In praxi gelingt es nicht, derartige Stoßwellen herzustellen. Würden wir die Spannung an der Funkenstrecke etwa nach einer e-Funkion



0 5 10 20 40·10⁻⁷sek

Bild 8. Nachweis der Funkenverzögerung. Funkenstrecke mit verschieden hohen Stoßwellen beansprucht (5 und 10 kV).



0 5 10 20 40·10⁻⁷sek

Bild 9. Wie Bild 8.

(7 c) anwachsen lassen, so wäre eine Bestimmung der Funkenverzögerung recht unsicher. Bei der tatsächlich benutzten Stoßwelle (7 d) könnte man ja die Verzögerung vom Punkte B ab rechnen. Aber wir können nicht nachweisen, daß hier tatsächlich schon die Durchschlagsspannung erreicht ist, vielleicht ist die Spannung noch ein Prozent oder ein Promille unter dem Durchschlagswert, vielleicht wird der volle Wert erst im Augenblick des Durchschlags selbst erreicht. Da also der Punkt B kein ansgezeichneter Punkt ist, wollen wir die Zeitzählung in dem Augenblick beginnen, in dem das erste Anzeichen der Wanderwelle am Oszillographen eintrifft. Es ist der wohldefinierte Punkt A.

Wenn es auch schwer fällt, die Verzögerung ohne Überspannung genau auszumessen, so soll doch experimentell festgestellt werden, ob es überhaupt eine Funkenverzögerung gibt. Bild 8 und 9 stellen den experimentellen Beweis für das Vorhandensein einer Funkenverzögerung dar. Die Funkenstrecke (Messingkugeln 20 mm Durchmesser) wurde so eingestellt, daß sie bei der normalen Stoßwelle gerade noch ansprach, und das zugehörige Oszillogramm aufgenommen. Die Einstellung der Funkenstrecke und alle Verhältnisse wurden dann unverändert gelassen. Nur die Widerstände am Anfang der Leitung wurden überbrückt. Es zieht dann eine Welle von der Höhe der vollen Schaltspannung ein. Sie wird am Ende auf 2 U reflektiert. Die Spannung an der Funkenstrecke will also sehr schnell auf 10 kV ansteigen (die Frontlänge beträgt wenige Meter). Während des Anstieges noch erfolgt jedoch der Durchschlag. Dieser Vorgang wurde ebenfalls aufgenommen. Beide

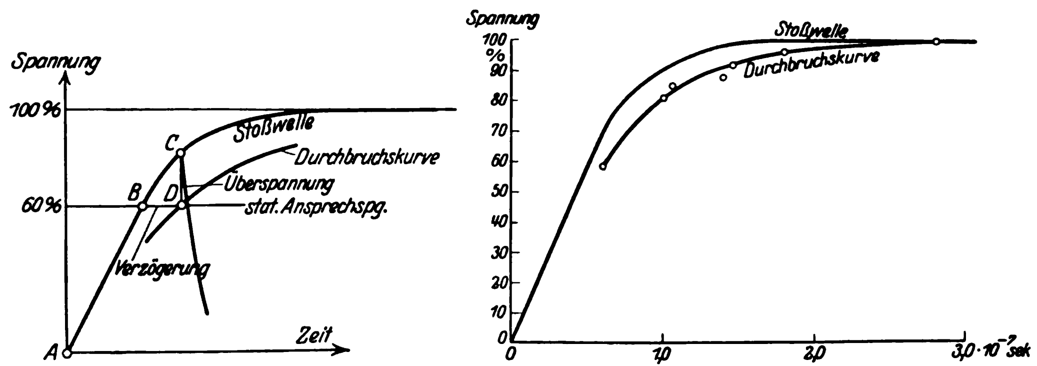


Bild 10. Definition der Durchbruchskurve.

Bild 11. Durchbruchskurve: Kupferplatten, 5 kV, atm. Druck.

Oszillogramme wurden vom Kathodenstrahl unmittelbar übereinander geschrieben. Wir sehen ganz deutlich, die steile Welle schließt in beiden Fällen ganz beträchtlich über den Durchschlagswert der 5-kV-Welle hinaus, die Funkenstrecke spricht also hier mit Verzögerung an. Allerdings ist die Verzögerungszeit sehr kurz. Die positiven Ionen können nach der Berechnung Rogowskis in dieser Zeit keine merklichen Wege zurückgelegt haben.

Es interessiert noch, einiges über die Größe der Verzögerung zu erfahren. Der Versuch wurde so durchgeführt, daß eine bestimmte Stoßwelle benutzt wurde. Die Elektroden wurden dann einander so lange genähert, bis der erste Durchschlag eintrat. Diese Entfernung wurde a_0 genannt, die Ansprechspannung 100%. Nähert man jetzt die Elektroden so weit, daß statisch z. B. bei 60% der Spannung der Durchschlag erfolgen würde, so müßte im verzögerungsfreien Fall der Zusammenbruch im Punkte B (Bild 10) erfolgen. Tatsächlich schließt die Spannung über B bis C hinaus und bricht dann erst zusammen. Die Strecke BD gibt also die Verzögerung an, DC die im Augenblick des Durchbruchs erreichte Überspannung. Führt man die Messung für verschiedene Schlagweiten durch und verbindet alle Punkte D miteinander, so erhält man die so definierte Durchbruchskurve. Die Ansprechspannung der Funkenstrecke wurde so ermittelt, daß die Schlagweite gemessen wurde; die Änderung der Durchbruchfeldsfeldstärke bei verschiedenen Schlagweiten wurde aus Schumann (a. a. O.) S. 25 bzw. 44 entnommen. Die statische Ansprechspannung beträgt dann:

$$U = \frac{a}{{}_0} \cdot \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_0} \cdot 100\%.$$

Bild 11 zeigt eine so gefundene Kurve für Kupferplattenelektroden; für Messingkugeln von 20 mm Durchmesser ergab sich qualitativ und quantitativ das gleiche. Da bei den Kugelelektroden der Abstand etwa $^1/_{20}$ des Durchmessers und weniger betrug, ist das Feld natürlich ebenfalls vollkommen homogen. Bei der

Leuchtschirmbeobachtung hatte man den Eindruck, als ob die Kugelfunkenstrecke nicht ganz so regelmäßig anspricht wie die Plattenfunkenstrecke. Es mag dies darauf zurückzuführen sein, daß Kugeln mit ihrem relativ kleinen homogenen Feld empfindlicher gegen Verschmutzung infolge Funkendurchgangs sind.

Es ist anzunehmen, daß die Verzögerung stark von der Steilheit der Stirn abhängt, und zwar nicht so sehr von der absoluten Steilheit ($d\mu/dt$), sondern vielmehr von der relativen ($^1/_\mu \cdot d\mu/dt$), die (abgesehen von einer Konstanten) angibt, um

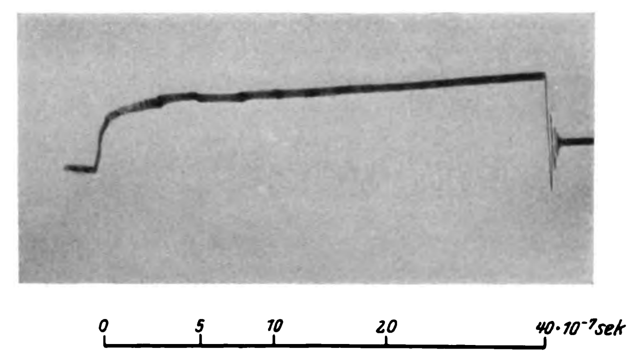


Bild 12. Funkenoszillogramm: 1,3 kV, Messingplatten, atm. Druck.

wieviel Prozent die Spannung z. B. in 10^{-8} sec ansteigt. Die Durchbruchskurve muß also bei kleinen Spannungswerten, wo die relative Steilheit am größten ist, sehr nahe an die Stoßwelle heranrücken, bei höheren Spannungen muß sie weiter abrücken, was auch tatsächlich der Fall ist. Auf Grund von Bild 11 können wir

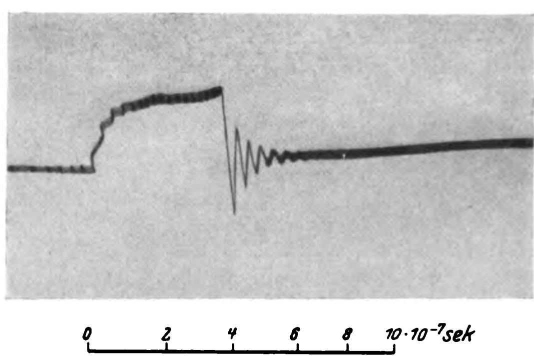


Bild 13. Wie Bild 12, jedoch Elektrodenabstand um rund 15% verkleinert.

aussagen, daß die Verzögerung bei plötzlicher Beanspruchung mit der statischen Spannung unter den angegebenen Verhältnissen bestimmt nicht kleiner als $0{,}4 \cdot 10^{-7}$ sec ist. Ob die Verzögerung im Grenzfall wesentlich größer werden kann, darüber kann nichts ausgesagt werden. Bei beleuchteter Plattenfunkenstrecke wurde bei 5 kV und Atmosphärendruck bei Hunderten von Durchschlägen nie beobachtet, daß der Zusammenbruch später als $5 \cdot 10^{-7}$ sec nach Beginn der Zeitzählung eingetreten ist[1].

Bild 12 und 13[2] zeigen Funkenoszillogramme bei rund 1,3 kV. In Bild 12 spricht die Funkenstrecke gerade noch an. Wir sehen hier eine ganz beträchtliche Verzögerung. In Bild 13 wurde der Elektrodenabstand um rund 15% gegenüber Bild 12 verkleinert. Beim Spannungszusammenbruch am Funken wird im Ablenkkreis eine Schwingung

[1] Es ist dabei allerdings zu berücksichtigen, daß die Stoßwelle nicht ganz ideal ist.

[2] Die Bilder 12, 13 und 26 zeigen eigenartige Verdickungen im Kurvenzug. Sie werden hervorgerufen durch Schwingungen im Zeitkreis, die jedoch hier nicht stören. Es handelt sich um ältere Aufnahmen, bei den neueren Oszillogrammen ist dieser Schönheitsfehler beseitigt.

von rund 20 Millionen Hertz angeregt. Daraus kann man schließen, daß die Spannung am Funken selbst mindestens in einem Viertel der Schwingungsdauer zusammenbricht; also in $1{,}25 \cdot 10^{-8}$ sec oder schneller. Betrachten wir jetzt noch einmal Bild 12, so sehen wir auch hier die angeregte Schwingung, also auch hier ist der Zusammenbruch in dieser sehr kurzen Zeit erfolgt. Wir können demnach in diesem Oszillogramm eine Zeit von $4 \cdot 10^{-6}$ sec übersehen und können noch genaue Angaben

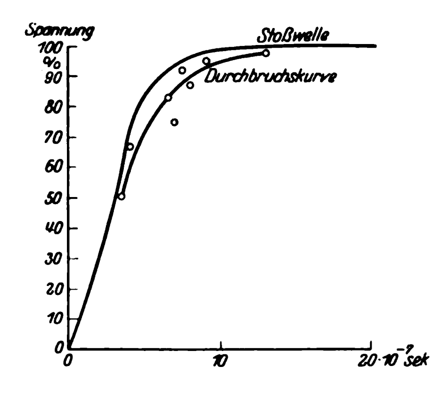
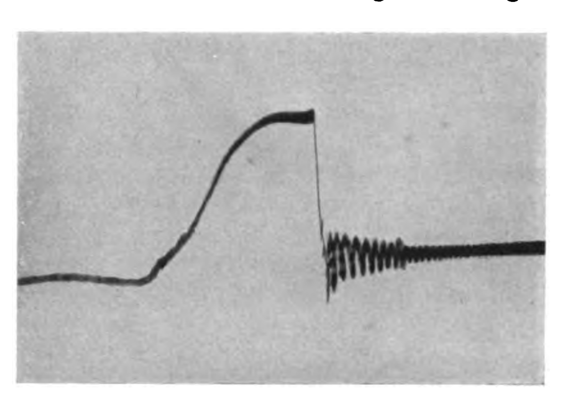


Bild 14. Durchbruchskurve: Messingplatten, 5 kV, atm. Druck.

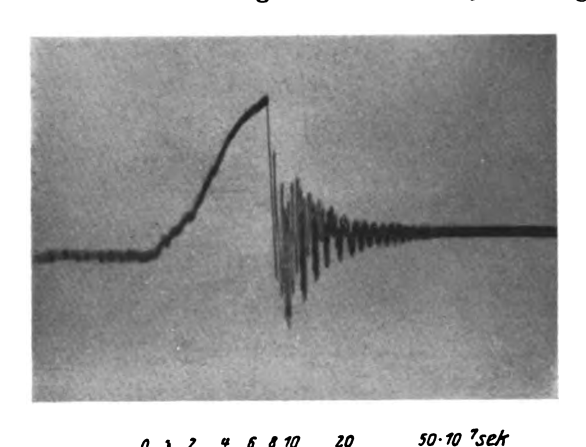


0 2 4 6 8 10 20 50·10⁻⁷ sek

Bild 15. Funkenoszillogramm: 5 kV, Messingplatten, atm. Druck, flacher Spannungsanstieg.

machen über Vorgänge, die sich am Ende dieser Zeit in wenigen Promille der Gesamtzeit abspielen.

Es wurden noch einige Versuche mit langsamerem Spannungsanstieg gemacht. Bild 14 zeigt die Auswertung für Messingplatten bei 5 kV. Die Front wurde durch Kapazitäten verflacht, an Stelle der Freileitung wurde ein rund 50 m langes Kabel (Gummi-



0 1 2 4 6 8 10 20 50·10⁻⁷ sek

Bild 16. Wie Bild 15, jedoch Elektrodenabstand um rund 30% verkleinert.

schlauchleitung) benutzt. Bild 15 und 16 zeigen entsprechende Oszillogramme. Es werden 2 Schwingungskreise angeregt: Der eine besteht aus den Kondensatoren zum Abflachen des Spannnungsanstiegs und den Zuleitungen (rund $4 \cdot 10^{6}$ Hertz), der andere aus der Kapazität der Ablenkplatten mit Zuleitungen rund $20 \cdot 10^{6}$ Hertz). In Bild 15 wird im wesentlichen nur die Grundwelle angeregt. In Bild 16 jedoch geht der Zusammenbruch der Spannung an der Funkenstrecke bedeutend schneller

vor sich, die Schwingung von 20 Millionen Hertz wird zu ganz erheblichen Amplituden erregt.

Bild 17 zeigt die Durchbruchskurve für etwa 1,2 kV. Das Ende des Kabels wurde hier mit einem entsprechend kleinen Widerstand überbrückt Die Verzögerung scheint hier größer zu sein als bei 5 kV. Bild 18 zeigt ein Oszillogramm dieser Versuchsreihe. Der Durchschlag ist intermittierend. Die Spannung bricht erst ganz normal

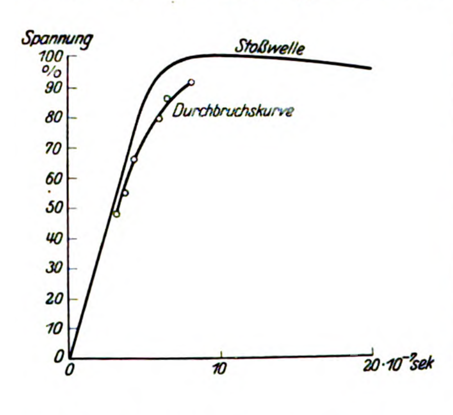
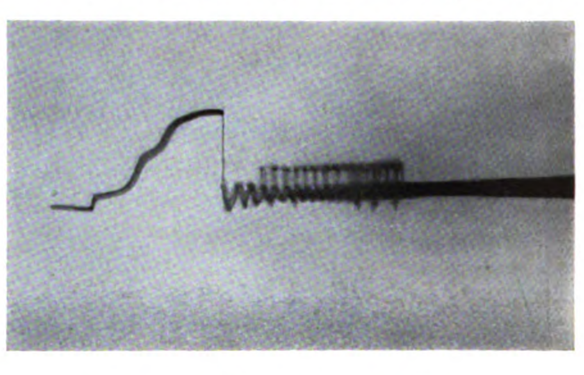


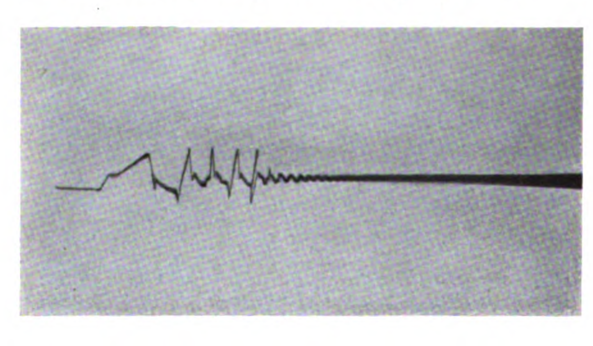
Bild 17. Durchbruchskurve: Messingplatten, 1,2 kV, atm. Druck.



0 2 4 6 8 10 20 50·10⁻⁷ sek

Bild 18. Funkenoszillogramm: 1,2 kV, intermittierender Durchschlag, Messingplatten, atm. Druck.

zusammen und bleibt eine bestimmte Zeit auf Null. Plötzlich jedoch reißt der Funke ab, die Spannung steigt auf einen ganz bestimmten Wert an, bricht dann zusammen, steigt wieder an und so fort, bis nach einer bestimmten Zeit der Durchschlag tatsächlich komplett ist. Alle Aufnahmen dieser Versuchsreihe zeigten dieses merkwürdige Verhalten. Bild 19 zeigt den Vorgang etwas deutlicher. Bei einer



0 2 4 6 8 10 20 50·10⁻⁷ sek

Bild 19. Wie Bild 18, jedoch wesentlich kleinerer Elektrodenabstand (rund 78% kleiner).

Wiederholung dieser Aufnahmen mehrere Tage später konnte der intermittierende Durchschlag nicht mehr festgestellt werden. Es steht nicht genau fest, ob er auf Verunreinigung der Elektroden zurückzuführen ist.

5. Einfluß der Verunreinigung.

Aktive (verzögerungsfreie) Elektroden.

Pedersen[1] gab eine Methode an, eine Funkenstrecke mit minimaler Verzögerung (ohne Beleuchtung) herzustellen. Er rauhte die Kathode mit feinem sauberen Kaborundpapier auf, so daß mikroskopisch kleine Spitzen entstanden.

[1] O. Pedersen, Ann. d. Physik, 71, 317, 1923.

Burawoy[1] wandte die gleiche Methode an und wies nach, daß dann die Verzögerung nicht nur minimal, sondern innerhalb seiner Meßgenauigkeit gleich Null sei.

Ich versuchte mit derartig bearbeiteten Elektroden die Durchbruchskurve ebenfalls aufzunehmen. Die Elektroden wurden unmittelbar vor Aufnahme eines Oszillogrammes aufgerauht. Die Funkenstrecke wurde nicht beleuchtet. Die Werte streuten sehr erheblich, z. Teil sprach die Funkenstrecke schon vor Erreichen ihrer statischen Spannung an. Ich führe es auf mangelhafte Nullpunktbestimmung zurück. Da mir keine optischen Hilfsmittel zur Verfügung standen (wie Pedersen), mußte ich den Nullpunkt durch Stromdurchgang feststellen (jeweils nach Aufnahme des Oszillogramms) Bei den kleinen Schlagweiten, die ich anwandte, spielt außerdem die Rauhigkeit der Elektroden, etwa auf der Oberfläche befindlicher Metallstaub eine Rolle. Ein aufgenommenes Oszillogramm aus dieser Versuchsreihe ist in Bild 20 wiedergegeben. In diesem Fall kann man ganz bestimmt sagen, daß eine Verzögerung vorhanden gewesen ist. Der kapazitive Spannungsbuckel ist über die Funkenstrecke hinweggegangen, der Durchschlag erfolgt bei einer Spannung, die kleiner als die maximale ist. (Das Oszillogramm ist auch hier schräg zum Bildrand geschrieben wie Bild 3.)

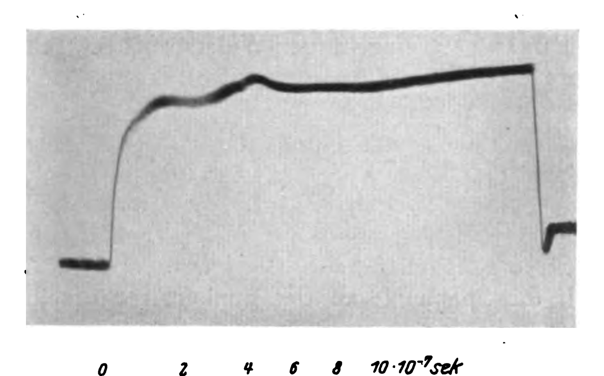


Bild 20. Funkenoszillogramm: 5 kV, „aktive Elektroden", atm. Druck.

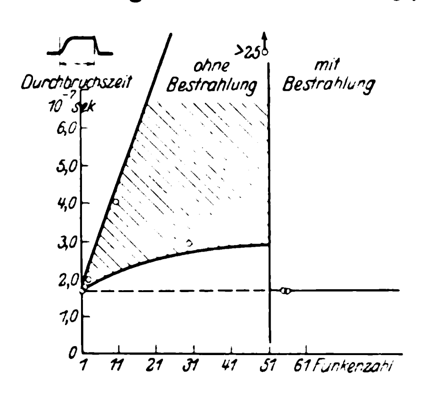


Bild 21. „Aktive Elektroden'", Einfluß der Verschmutzung infolge Funkendurchgangs auf die Verzögerung.

Um von der Nullpunktbestimmung frei zu werden, wurde folgender Versuch durchgeführt: Die Funkenstrecke wurde aktiv gemacht, es wurden ohne Beleuchtung der 1., 2., 3., 10., 30. und 50. Durchschlag aufgenommen. Dann wurde die Quecksilberbogenlampe angestellt und der 55. und 56. Durchschlag aufgenommen. Die zwischenliegenden Durchschläge wurden auf dem Leuchtschirm beobachtet. In Bild 21 sind die Ergebnisse mitgeteilt. Die eingetragenen Punkte sind aufgenommenen Oszillogrammen entnommen. Die schraffierte Fläche gibt das Gebiet an, in dem die auf dem Leuchtschirm beobachteten Zwischenpunkte etwa gelegen haben. Mit der Funkenzahl wächst die Verzögerung und gleichzeitig auch die Streuung. Bei Beleuchtung geht die Durchbruchszeit innerhalb der Meßgenauigkeit auf den Wert des ersten Durchschlags zurück und bleibt dauernd auf diesem Wert.

6. Vergleich mit anderen Meßergebnissen.

Die Ergebnisse seien mit den Messungen Pedersens[2] und Burawoys[3] verglichen.

Pedersen untersuchte die Funkenverzögerung mit Lichtenbergschen Figuren. Er benutzte eine konstante Stoßwelle und änderte den Elektrodenabstand seiner

[1] O. Burawoy, Arch. f. Elektrot. XVI, 186, 1926.
[2] O. Pedersen, a. a. O.
[3] O. Burawoy a. a. O.

Versuchsfunkenstrecke, so daß diese mit verschieden hoher Überspannung beansprucht wurde; genau das gleiche, was auch hier gemacht wurde. Die Höhe der Stoßwelle war jedoch um eine Größenordnung größer. Durch Reflexion erhielt Pedersen an der Funkenstrecke rund 43 kV. Er findet dabei, wenn er die Versuchsfunkenstrecke auf 40% der vollen Spannung einstellt, eine Verzögerung von rund $0{,}7 \cdot 10^{-7}$ sec, wenn er sie auf 50% einstellt rund $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit Bild 11, 14 und 17, so finden wir, daß sich die Werte zwar nicht widersprechen, direkt vergleichen kann man sie jedoch nicht, da Pedersen keine Angaben über die Steilheit der benutzten Stoßwelle macht und außerdem auch bei anderen Spannungen gemessen hat. Allerdings scheinen Pedersens Werte etwas hoch zu sein.

Burawoy untersuchte die Funkenverzögerung durch Messungen mit einem Lecherschen System und mit der Schleifenmethode. Er beansprucht seine Funkenstrecke mit sinusförmigen Spannungsstößen. Er findet selbst bei seinen kürzesten Stößen, bei denen der Spannungsanstieg von Null bis zum Maximum in $3{,}5 \cdot 10^{-9}$ sec vor sich geht, die gleiche Durchbruchsfeldstärke, wie bei statischer Beanspruchung. Die Meßpunkte liegen sowohl in dem von Pedersen untersuchten, als auch bis an den hier behandelten Bereich heran. Burawoy versucht den Widerspruch zwischen seinen Messungen und denen Pedersens durch die Anordnung Pedersens zu erklären.

Wegen der Verschiedenheit der Anordnung und Durchführung der Versuche ist es schwer, die Ergebnisse Pedersens und Burawoys mit den hier mitgeteilten zu vergleichen. Es kann jedoch soviel gesagt werden, daß bei beiden Methoden Voraussetzungen gemacht werden, die vielleicht noch nicht restlos geklärt sind. Der Oszillograph jedoch zeichnet direkt die Spannung auf, die jeweils an den Ablenkplatten herrscht, und somit auch die Spannung an der Funkenstrecke selbst, sofern man nur dafür sorgt, daß zwischen beiden keine Spannungsdifferenz herrscht, was bei den vorliegenden Oszillogrammen immer leicht möglich war.

Binder[1] erklärt den Widerpruch der Ergebnisse Pedersens und Burawoys durch die verschiedene Art der Anwendung von Funkenstrecken, indem er zwischen Meß- und Schutzfunkenstrecke unterscheidet[2]). Da bei den hier mitgeteilten Versuchen stets der Spannungszusammenbruch am Funken untersucht wird, ist die Funkenstrecke zur Gattung der „Schutzfunkenstrecken" zu rechnen, während Burawoy mit „Meßfunkenstrecken" (im Binderschen Sinn) arbeitet.

7. Der Durchbruch im inhomogenen Feld.

Schon andere Beobachter haben festgestellt, daß Spitzenfunkenstrecken erhebliche Verzögerungen aufweisen[3]. Stellt man die Funkenstrecke so ein, daß sie bei statischer Beanspruchung mit der gleichen Spannung gerade noch anspricht, so sieht man auf dem Leuchtschirm bei der langsamsten hier angewandten Zeitablenkung keinen Zusammenbruch, man kann dabei $20 \cdot 10^{-6}$ sec überblicken. Der Zusammenbruch erfolgt also noch später. Erst wenn man die Spitzen von 4,3 auf 2,55 mm zusammenschiebt, erhält man Bild 22. Der Spannungszusammenbruch ist ziemlich steil. Bild 23 zeigt, wie rapid die Verzögerung bei Beanspruchung mit Überspannung abnimmt. Der Versuch wurde so durchgeführt, daß die Stoßwelle in Höhe von rund 5 kV beibehalten wurde. Die Spitzen wurden einander genähert, a_0 ist der Abstand, bei der die Funkenstrecke gerade noch anspricht, a der jeweilige Abstand. Aus

[1] L. Binder, ETZ 47, 1511, 1926.

[2] Ansprechen der Meßfunkenstrecke gekennzeichnet durch Leuchterscheinung, Ansprechen der Schutzfunkenstrecke gekennzeichnet durch Spannungsabsenkung an den Elektroden.

[3] z. B. Peek, ETZ 37, 246. 1916. — Mc Eachron, Gen. El. Rev. XXVIII, 622, 1925. — Burawoy a. a. O.

der Kurve geht hervor, daß die Verzögerung bei Beanspruchung mit der statischen Durchschlagspannung ($a/a_0 = 100\%$) um Größenordnungen höher als 10^{-5} sec liegt.

Es sollte noch der Einfluß der Verunreinigung der Elektroden festgestellt werden. Zu diesem Zweck wurden ungebrauchte Nähnadeln auf eine Entfernung

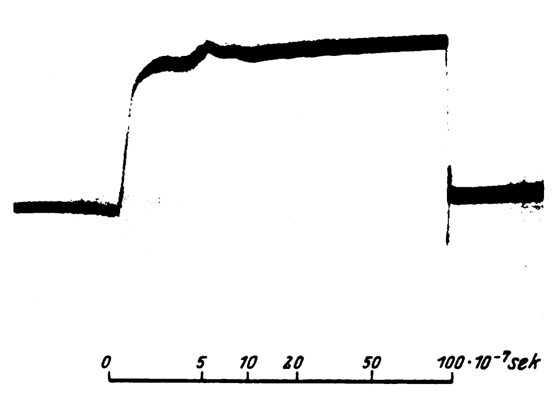


Bild 22. Funkenoszillogramm, Spitzenelektroden, atm. Druck, $a_0 = 4{,}3$ mm, $a = 2{,}55$ mm.

von 2 mm ($a/a_0 = 46{,}5\%$) eingestellt. Der erste Durchschlag gab eine Verzögerung von $3{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec, der zweite $7{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec. Wie man aus Bild 23 sieht, fällt der erste Wert ziemlich genau in die Kurve, die mit Nadeln aufgenommen wurde, die vielleicht 100 mal benutzt wurden. Der zweite Wert liegt im Bereich der Streuung. Ein Einfluß der Verunreinigung durch Funkendurchgang ist demnach nicht feststellbar.

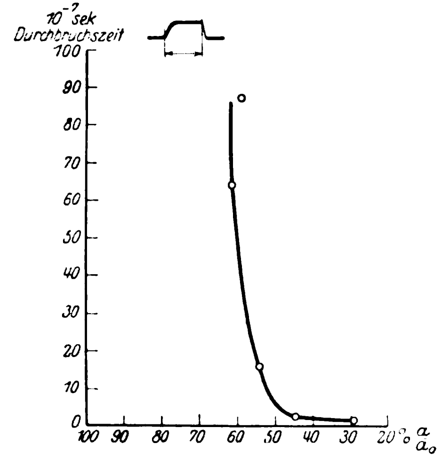


Bild 23. Durchbruchszeit als Funktion der Überspannung bei Spitzen, $a_0 = 4{,}3$ mm.

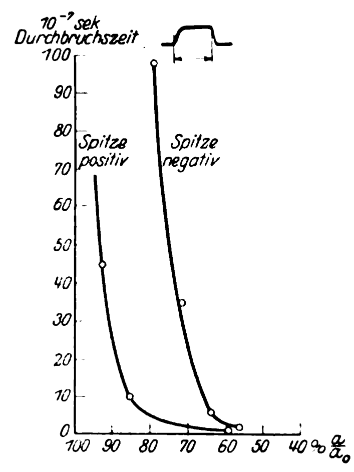


Bild 24. Durchbruchszeit im unsymmetrisch inhomogenen Feld (Spitze gegen Platte).

Es interessiert noch der Durchschlag im unsymmetrisch inhomogenen Feld. (Also Spitze gegen Platte bei verschiedener Polarität.) Es wurden benutzt Stahl-Nähnadel und Messingplatte. Der erste Funke setzte bei negativer Spitze bei $a_0 = 2{,}60$ mm, bei positiver Spitze bei $a_0 = 2{,}63$ mm ein, also praktisch bei dem gleichen Wert. Es ist anscheinend kein Polaritätsunterschied vorhanden. Und doch ist die Verzögerung in beiden Fällen wesentlich verschieden. Bild 24 zeigt die Verhältnisse bei Überspannung, d. h. wenn die Elektroden einander genähert werden.

Die positive Spitze gibt wesentlich geringere Verzögerungen. Um einen Überblick über Streuung und Einfluß der Bestrahlung zu gewinnen, wurden jeweils 6 Durchschläge aufgenommen bei positiver und negativer Spitze mit und ohne Bestrahlung. Der Elektrodenabstand blieb in allen Fällen der gleiche. Die Werte sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

Tabelle:

		Durchbruchszeit in 10^{-7} sec					
Spitze positiv	beleuchtet	2,5	2,0	2,5	2,9	1,2	3,0
	unbeleuchtet	> 170	19	5	6	8	15
Spitze negativ	beleuchtet	19	30	18	23	19	27
	unbeleuchtet	19	25	43	25	28	27

Es zeigt sich auch hier, daß bei positiver Spitze bei Beleuchtung die Verzögerung wesentlich kleiner ist als bei negativer Spitze. Mit Bestrahlung ist die Verzögerung bei positiver Spitze sehr viel kleiner als ohne Bestrahlung; ist die Spitze negativ, so hat die Bestrahlung keinen wesentlichen Einfluß. Es zeigt sich also ganz deutlich ein Polaritätseinfluß, der beweist, daß die Verzögerung nicht nur von der Form des Feldes und der Größe der Feldstärke, sondern auch von der Richtung abhängt.

Während diese Feststellung bei Atmosphärendruck ganz eindeutig und einwandfrei ist, läßt sich bei 200 mm Hg-Druck dieser Unterschied nicht feststellen. Die Verzögerung scheint zwar auch hier bei der positiven Spitze etwas größer zu sein als bei der negativen, doch liegen die Abweichungen im Bereich der Streuung. Auch scheint der Zusammenbruch bei positiver Spitze nicht so scharf einzusetzen. Der Übergang ist sanft abgerundet.

8. Die Wanderwellenstirn.

Es ist viel um Form und Steilheit der Wanderwelle gestritten worden. Die Angaben der Frontlänge schwanken sehr stark. Noch nie aber ist die Vermutung aufgetaucht, daß die Front (also der Spannungs-Zusammenbruch am Funken) eine Stufe besitzt, wie wir es in den mitgeteilten Oszillogrammen sehen. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich wohl so, daß alle Wanderwellenfronten durch Funken bei relativ langsamer Spannungssteigerung erzeugt werden, bzw. durch mechanisches Schalten, was damit identisch ist. Bei den aufgenommenen Oszillogrammen jedoch wurde die Funkenstrecke einer Stoßbeanspruchung ausgesetzt. Es ist durchaus denkbar, daß bei langsamer Spannungssteigerung die Verhältnisse anders liegen. Es ist selbstverständlich, daß die Front der Wanderwelle stark von der Anordnung im Entstehungspunkt abhängt, d. h. von der Schaltfunkenstrecke selbst und von der räumlichen Anordnung der Leitungen in ihrer Nähe. Geringe Änderung des Wellenwiderstandes der abgehenden Leitung kann erhebliche Verschleifung mit sich bringen. Der Nachweis einer extrem steilen Front beweist nur, daß sie möglich und unter bestimmten Verhältnissen beliebig reproduzierbar ist, nicht daß sie unter allen Umständen vorhanden sein muß. Bei der Anordnung Rogowski-Flegler-Tamms wurde „ein Stift in Quecksilber gestoßen". Der Durchschlag erfolgte also im inhomogenen Feld. Die Verzögerung ist in diesem Falle groß. Der Funke tritt bei einer gewissen Überspannung ein. Die Aufnahmen zeigen, daß in diesem Fall sehr steile Zusammenbrüche auftreten können.

Mit der Schleifenmethode sind bisher keine stufenweisen Zusammenbrüche gemessen worden. Allerdings kann auch die Schleifenmethode auf diese Fragen wohl keine Auskunft geben.



9. Der Durchschlag bei vermindertem Druck.

Wir vermindern gegenüber Bild 5 und 6 den Druck auf ungefähr ein Viertel und bringen den Elektrodenabstand ungefähr auf das Vierfache. Die Funkenstrecke spricht ohne erhebliche Überspannung an. Das aufgenommene Oszillogramm ist in Bild 25 wiedergegeben. Wenn wir früher im Zusammenbruch eine kleine Zacke gesehen haben, so finden wir jetzt eine breite Stufe. Wir sehen deutlich, der Zusammenbruch besteht aus zwei Phasen. Der erste Zusammenbruch erfolgt in etwa $0{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec, nun bleibt die Spannung praktisch konstant auf rund 2,5 kV, es

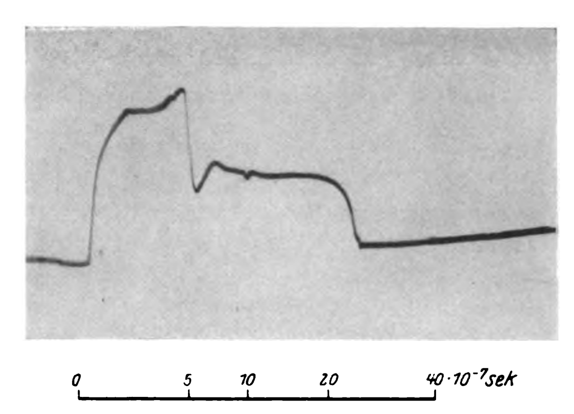


Bild 25. Funkenoszillogramm: Messingplatten, 5 kV, 185 mm Hg. a = 3,8 mm.

fließt also ein Strom von rund 3,3 Ampere. Der Funke verzehrt eine Leistung von über 8000 Watt und das die beträchtliche Zeit von rund $15 \cdot 10^{-7}$ sec lang. Dann geht die Spannung sanft gerundet, ziemlich langsam in rund $4 \cdot 10^{-7}$ sec auf Null.

Um diesem merkwürdigen Verhalten auf die Spur zu kommen, wurde der Druck weiter vermindert, die Stufe wird dann immer länger. Gleichzeitig mußte, um nicht zu große Schlagweiten zu erhalten, die Spannungshöhe der Stoßwelle

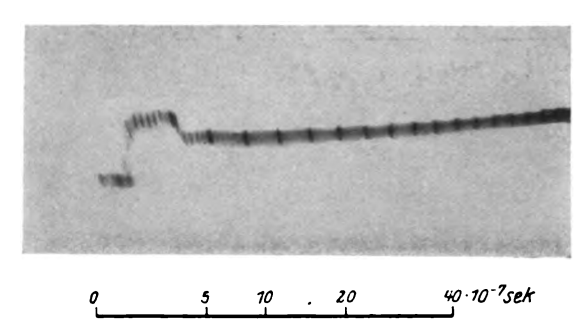


Bild 26. Funkenoszillogramm: 1,3 kV, Messingplatten, etwa 7 mm Hg.

herabgesetzt werden. Bei einem Druck von mehreren cm Hg und rund 1300 Volt Stoßhöhe erhält man keinen zweiten Zusammenbruch, die Stufe ist unendlich lang geworden. Die Leuchterscheinung beim Durchschlag ändert gleichfalls ihren Charakter: Man erhält keinen leuchtenden Funken, sondern Glimmlicht. Bild 26 zeigt ein solches Oszillogramm bei einem Druck von etwa 7 mm Hg (vgl. Fußnote Seite 242).

Es würde dies also bedeuten, daß auch bei normalem Druck bei Stoßbeanspruchung mit 5 bis 10 kV dem eigentlichen Durchschlag eine kurze Glimmentladung vorausgeht.



10. Einfluß der Charakteristik des speisenden Kreises.

Es war bereits früher darauf hingewiesen worden, daß Strom und Spannung der Funkenstrecke in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Und zwar war der hier benutzte speisende Kreis (Bild 27a) dadurch gekennzeichnet, daß der

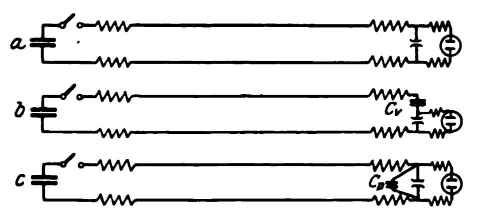


Bild 27. Schaltungen für verschiedene Strom-Spannungscharakteristiken.

Spannungsabfall an der Funkenstrecke proportional dem durch den Funken fließenden Strom war. Bei 6,7 Amp. lag keine Spannung mehr am Funken. Es interessiert natürlich auch das Verhalten des Funkens bei anderen Charakteristiken. Es wurden zwei Extremfälle untersucht: 1. Stromdrosselung (Bild 27b). Bei Ansprechen der

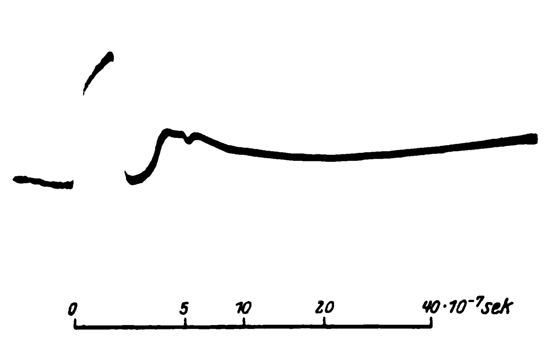


Bild 28. Funkenoszillogramm: 5 kV, 185 mm Hg, Stromdrosselung $C_v = 500$ cm.

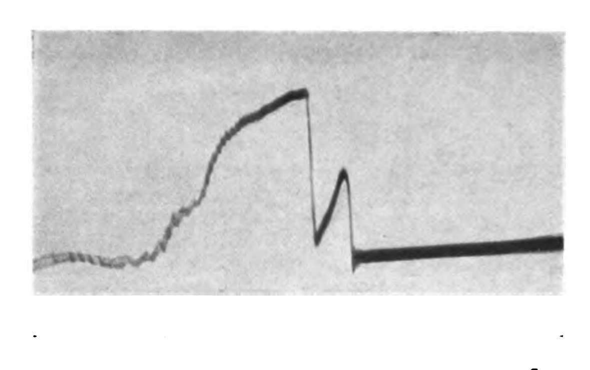


Bild 29. Funkenoszillogramm: 5 kV, 185 mm Hg, Stromvermehrung $C_p = 500$ cm.

Funkenstrecke nimmt der Vorschaltkondensator alle Spannung auf. Es kann während des ganzen Vorganges nur so viel Ladung durch den Funken fließen, wie der Vorschaltkondensator bei 5 kV aufnehmen kann. 2. Stromvermehrung (Bild 27c). Es liegt ein Kondensator parallel zur Funkenstrecke, die Zuleitungen sind kurz. Erfolgt der Durchschlag, so steht sehr schnell die gesamte Ladung des Kondensators zur Verfügung, der Strom kann dabei sehr groß werden.



Die Untersuchungen wurden bei 185 mm Hg-Druck durchgeführt, weil hier die Stufe deutlicher zutage tritt. Bild 25 zeigte den Zusammenbruch bei der normalen Stoßwelle.

Bild 28 zeigt die gleichen Verhältnisse bei Stromdrosselung (500 cm Kapazität). An der Verzögerung wird sich nicht viel geändert haben, denn solange kein Strom entnommen wird, sind beide Stoßwellen gleichwertig. Der erste Zusammenbruch erfolgt noch ganz normal. Die Stufe kann jedoch nicht mehr zur vollen Ausbildung gelangen. In dem Maße, in dem Strom durch den Funken fließt, wird die Spannung von ihm weggenommen. Es erfolgt kein ausgesprochener zweiter Zusammenbruch, die Spannung geht langsam auf Null.

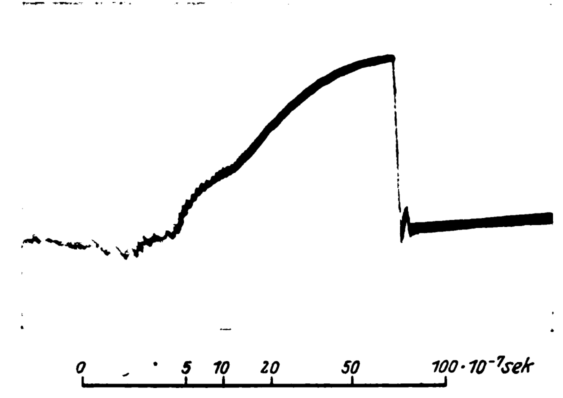


Bild 30. Funkenoszillogramm: 5 kV, 185 mm Hg, Stromvermehrung $C_p = 2000$ cm.

Bild 29 zeigt eine Aufnahme bei Stromvermehrung. Es liegt ein Kondensator von 500 cm parallel zur Funkenstrecke. Die Stoßwelle ändert jetzt natürlich ihre Form, sie wird flacher, die Kapazität lädt sich relativ langsam auf. Bild 30 zeigt eine andere Aufnahme mit einem Parallelkondensator von 2000 cm. Wir sehen, daß die Stufe etwas ihre Form ändert. Länge und Höhe der Stufe nehmen bei größeren Parallelkondensatoren ab, doch ist die Streuung der Werte sehr groß.

II. Einflüsse des Elektrodenmaterials.

Eine Funkenstrecke besteht aus zwei wesentlichen Bestandteilen, den Elektroden und dem Gas. Es sollte festgestellt werden, inwieweit die Elektroden den Funken selbst beeinflussen. Von ausschlaggebender Bedeutung ist dabei die Feststellung, ob das Material der Elektroden einen Einfluß hat.

Für Magnesiumelektroden wurde das Vorhandensein der Funkenverzögerung in der gleichen Weise wie in Bild 8 und 9 für Messingkugeln nachgewiesen. Es ergibt sich quantitativ das gleiche.

Im hom·genen Feld wurden untersucht: Messingplatte gegen Magnesiumplatte bei 750, 185 und 115 mm Hg, Zink gegen Messing bei 200 und 90 mm Hg, Quecksilber gegen Messing bei 750 mm Hg. Ein merklicher Polaritätsunterschied konnte dabei nicht festgestellt werden.

Im inhomogenen Feld wurden bei Atmosphärendruck untersucht: Magnesiumspitze gegen Messingplatte, Stahlspitze gegen Quecksilber und Stahlspitze gegen Schwefelsäure. Es zeigte sich die frühere Beobachtung: Die positive Spitze zeigt wesentlich geringere Verzögerung. Bei Stahlspitze gegen Schwefelsäure war die Entladung normal, wenn die Säureelektrode negativ war, sie erfolgte mit lebhafter Dampfentwicklung, wenn sie positiv war.

Es sollte noch festgestellt werden, welchen Einfluß die Temperatur der Elektrode auf die Form des Durchbruchs hat. Es wurde ein Wolframdraht einer

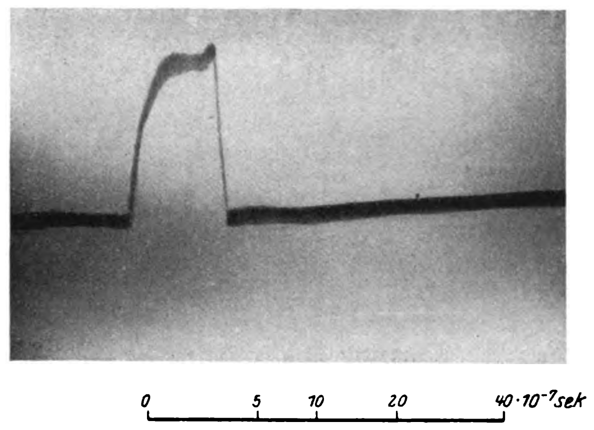


Messingplatte gegenübergestellt (Bild 31, also im Prinzip Spitze gegen Platte). Bei 150 mm Hg sprach die Funkenstrecke gerade noch an. Bei positiver Spitze war die Verzögerung etwas kleiner, der Zusammenbruch gerundeter, was mit den früheren Erfahrungen übereinstimmt. War der Glühdraht schwach rot, so trat der Durchbruch etwas früher ein, der Zusammenbruch erfolgte stark abgerundet in einer Stufe von rund $8 \cdot 10^{-7}$ sec. War der Draht hellrot oder gelb, so hatte der Zusammenbruch den gleichen Charakter. Ein Polaritätsunterschied konnte in keinem Fall festgestellt werden. Die Elektroden würden demnach keine andere Rolle spielen, als die Niveaulinien des elektrischen Feldes.

Bild 31. Anordnung der Glühelektrode.

12. Der Durchschlag von Gasen.

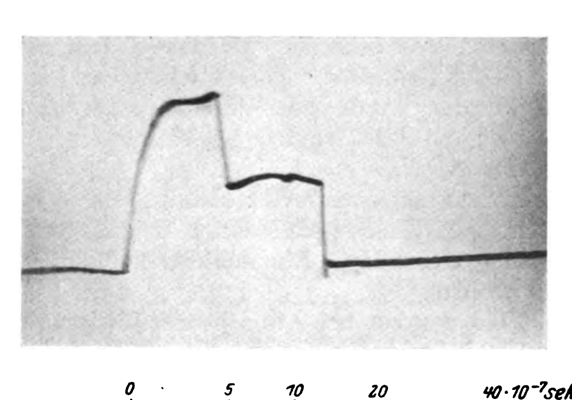
Es wurden einige orientierende Versuche mit verschiedenen Gasen gemacht. Und zwar wurden durchgeschlagen: Stickstoff, Kohlensäure, Wasserstoff und Leuchtgas. (Die Gase waren nicht besonders rein, sie wurden Flaschen entnommen.)



0 5 10 20 $40 \cdot 10^{-7}$ sek

Bild 32. Funkenoszillogramm: 5 kV, CO_2, 800 mm Hg, Messingplatten.

Stickstoff verhält sich im großen und ganzen so wie atmosphärische Luft, was bei dem starken Stickstoffgehalt der Luft nicht gerade verwunderlich ist. Die



0 5 10 20 $40 \cdot 10^{-7}$ sek

Bild 33. Funkenoszillogramm: 5 kV, H_2, 810 mm Hg, Messingplatten.

Bilder 32 und 33 zeigen je einen Durchschlag von Kohlensäure und Wasserstoff ungefähr bei atmosphärischem Druck (entsprechender Luftdurchschlag Bild 5 und 6); die Bilder 34, 35 und 36 Kohlensäure, Wasserstoff und Leuchtgas bei rund 185 mm Hg



(entsprechender Luftdurchschlag Bild 25). Die Funkenstrecke war jeweils so eingestellt, daß sie ohne erhebliche Überspannung ansprach. Wir sehen, daß Kohlensäure besonders wenig, Wasserstoff besonders stark zur Ausbildung der Stufe neigt. Leuchtgas steht zwischen Luft und Wasserstoff.

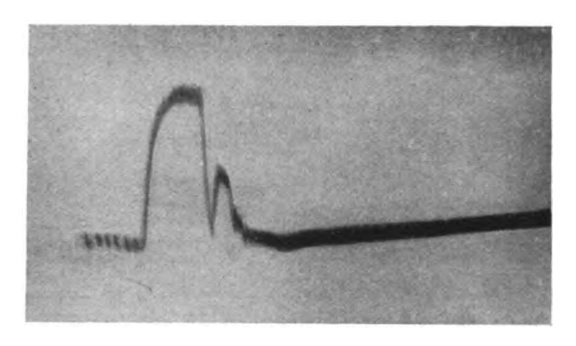


Bild 34. Funkenoszillogramm: 5 kV, CO_2, 188 mm Hg, Messingplatten.

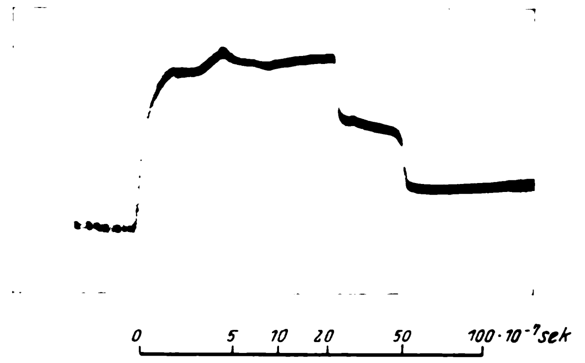


Bild 35. Funkenoszillogramm: 5 kV, H_2, 182 mm Hg, Messingplatten.

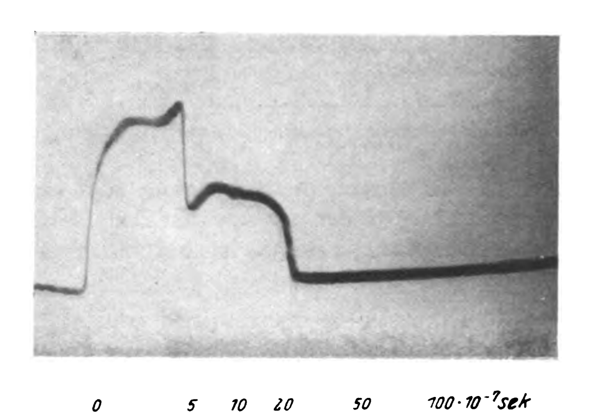


Bild 36. Funkenoszillogramm: 5 kV, Leuchtgas, 187 mm Hg, Messingplatten.

Außerdem wurde noch die Stufenbildung in Abhängigkeit von dem Mischungsverhältnis von Wasserstoff und Kohlensäure untersucht. Der Druck wurde konstant auf 302 mm Hg gehalten. Die Ergebnisse sind in Bild 37 wiedergegeben. Es wurden bei gleicher Zusammensetzung jeweils zwei Punkte aufgenommen, die Werte streuen

so stark, daß sich keine Kurve hindurchlegen läßt. Die Stufenlänge scheint stark von Zufälligkeiten oder jedenfalls vorläufig noch unbekannten Faktoren abzuhängen. Die Elektrodenstellung war so, daß der Funke gerade noch sicher jedesmal einsetzte.

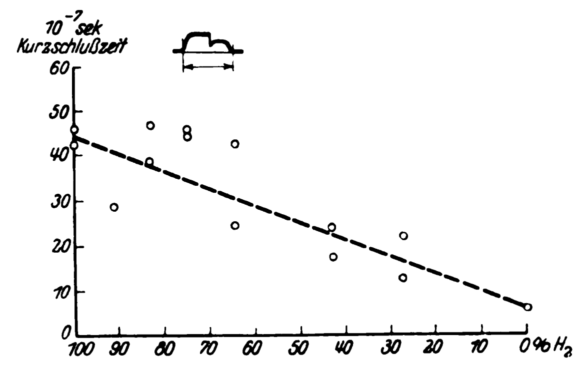


Bild 37. Gasgemisch: H_2 u. CO_2, 302 mm Hg.

13. Gleitfunken.

Zum Schluß seien noch einige Gleitfunken wiedergegeben. Oszillogramm Bild 38 wurde mit der Anordnung Bild 39 aufgenommen. Auf einem Glasrohr von 20 mm Durchmesser waren enganliegend zwei Aluminiumbänder 0,2 mm dick angebracht.

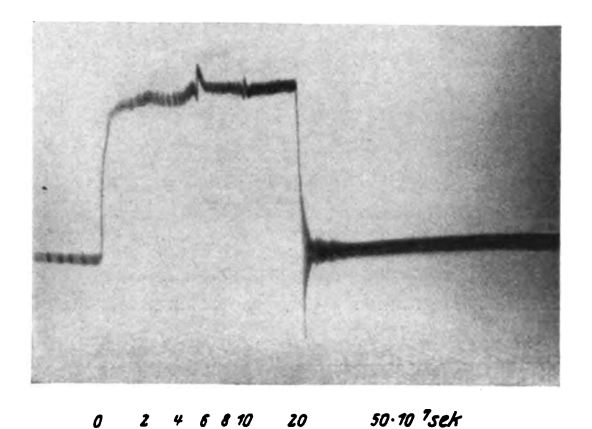


Bild 38. Gleitfunkenoszillogramm: 5 kV mit Anordnung Bild 39

Bei einem Abstand von 3,8 mm sprach die Anordnung zum erstenmal an. Die Verzögerung war dabei so groß, daß bei der langsamsten Zeitablenkung auf dem Leuchtschirm noch nichts zu sehen war. Bild 38 ist bei einem Abstand von 2,5 mm

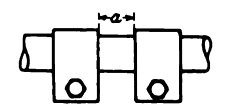


Bild 39. Gleitfunkenanordnung I.

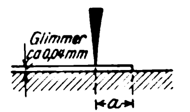


Bild 40. Gleitfunkenanordnung II.

aufgenommen. Die Leuchtschirmbeobachtung zeigte, daß die Streuung der Werte mit und ohne Beleuchtung sehr groß ist.

Mit Anordnung Bild 40 ergeben sich ganz entsprechende Oszillogramme. Es konnte auch hier festgestellt werden, daß die positive Spitze eine geringere Verzögerung hat. Der Gleitüberschlag ergibt also das gleiche Bild, wie der Durchschlag

von Luft im inhomogenen Feld. Das Dielektrikum wirkt dabei durch seine Dielektrizitätskonstante und durch Verschmutzung der Oberfläche in erster Linie feldverzerrend.

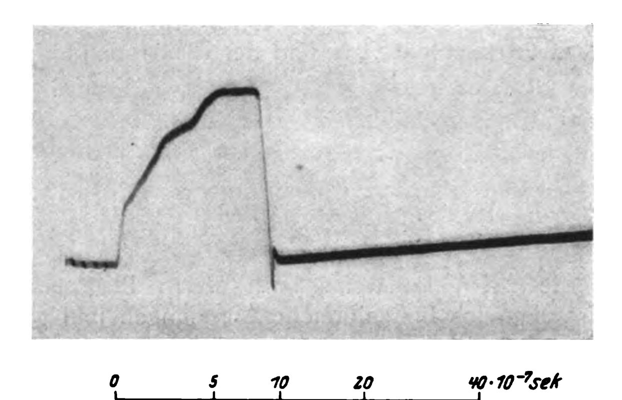


Bild 41. Gleitfunkenoszillogramm: 5 kV mit Anordnung Bild 42.

Bild 41 zeigt noch einen Durchschlag an einer Gleitfunkenstrecke mit großer Kapazität (Bild 42). Entsprechend der Kapazität wird die Front der Stoßwelle verflacht, bei einer bestimmten Spannung tritt jedoch eine stärkere Abflachung ein,

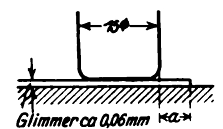


Bild 42. Gleitfunkenanordnung III.

man sieht einen Knick in der Kurve, weiter oben tritt nochmals eine Einbeulung auf. Es ist möglich, daß in diesen Punkten der unvollkommene Durchbruch einsetzt.

Der Durchbruch kann jedoch bei längerem Gleitwege auch weniger steil vor sich gehen, was bereits früher gezeigt wurde[1].

14. Zusammenfassung.

Die Versuche wurden mit Stoßbeanspruchung durchgeführt im allgemeinen mit rund 5 kV.

Beim Durchschlag im homogenen Feld geht der Spannungszusammenbruch am Funken in einer Stufe vor sich. Man kann zwei Phasen des Durchbruchs unterscheiden: 1. Übergang in die Glimmentladung (mehrere tausend Volt Entladungsspannung); 2. Übergang in die Funkenentladung (vollkommener Kurzschluß, Funkenspannung sehr klein). Das Toeplersche Funkengesetz gilt unter diesen Versuchsbedingungen nicht.

Das Vorhandensein einer Funkenverzögerung wird experimentell nachgewiesen. Eine Funkenstrecke wird mit verschieden steilen Wellen beansprucht. Die Durchbruchsspannung der steileren liegt höher.

„Aktive Elektroden" ohne Bestrahlung verhalten sich so wie gewöhnliche Elektroden mit Bestrahlung. Sie haben eine minimale Verzögerung.

Im inhomogenen Feld (Spitze gegen Spitze) ist die Verzögerung sehr groß, der Zusammenbruch steil. Im unsymmetrisch inhomogenen Feld (Spitze gegen Platte) ist die Verzögerung geringer, wenn die Spitze positiv ist.

[1] W. Rogowski, E. Flegler, R. Tamm, Arch. f. Elektrot. XVIII, 479, 1927, Bild 55.

Beim Durchschlag von Luft im homogenen Feld bei geringerem als Atmosphärendruck wächst die Stufe; bei einem Druck von mehreren Zentimetern Hg bleibt bei der hier benutzten Versuchsanordnung der zweite Zusammenbruch ganz aus (Leuchterscheinung: Glimmlicht).

Ein Einfluß des Elektrodenmaterials und der Elektrodentemperatur wurde nicht festgestellt.

Beim Durchschlag von verschiedenen Gasen wurde festgestellt, daß Wasserstoff besonders stark, Kohlensäure besonders wenig zur Stufenbildung neigt.

Gleitfunken haben den gleichen Charakter wie der Durchschlag im inhomogenen Feld.

Die Arbeit wurde auf Veranlassung von Herrn Professor Dr.-Ing. W. Rogowski durchgeführt, dem ich für zahlreiche Anregungen und gütige Förderung zu großem Dank verpflichtet bin.

Auch der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft, die die Arbeit in weitgehendem Maße unterstützte, sei an dieser Stelle bester Dank ausgesprochen.



Durchschlag von Glas in homogenen und nichthomogenen elektrischen Feldern.

Von

Lydia Inge und **Alexander Walther** in Leningrad.

Inhalt.

1. Problemstellung.
2. Der Randeffekt und seine Beseitigung.
3. Der Einfluß der Frequenz.
4. Die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Schichtdicke.
5. Die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Temperatur.
6. Der rein elektrische und der wärmeelektrische Durchschlag.

1. Problemstellung.

In unseren früheren Untersuchungen haben wir[1] gezeigt, daß bei den meisten homogenen festen Isolatoren bei hohen Temperaturen der Durchschlag als ein reiner Wärmevorgang betrachtet werden kann. Alle seine Gesetzmäßigkeiten lassen sich genau nach der Wärmetheorie berechnen. Weiterhin wurde von uns gefunden, daß sich bei dem Übergang zu den Zimmertemperaturen der Mechanismus des Durchschlages bei einer bestimmten Temperatur plötzlich änderte. Die Gesetzmäßigkeiten, denen er nun genügte, änderten sich vollkommen. So verschwand z. B. beinahe gänzlich die Temperaturabhängigkeit der Durchschlagspannung, die im Wärmegebiet scharf ausgeprägt war. Der Einfluß der Frequenz dagegen, der bei den hohen Temperaturen gänzlich fehlte (der Durchschlag wird hier durch die effektiven Werte der Spannungen bestimmt), trat bei den niedrigen Temperaturen scharf hervor. Die von uns gemessenen Werte der Durchschlagspannungen lagen für Gleichspannung in einigen Fällen 5—6mal höher als bei Wechselspannung von 50 Per/sec. Dieses Ergebnis steht entschieden im Widerspruch mit den Messungen von Rochow[2] und Mundel[3], bei denen diese Differenz nicht mehr als 40% betrug. Außerdem lagen die von Rochov bei Wechselspannung gefundenen Werte der Durchschlagspannungen bedeutend höher, als die von uns beobachteten. Diese Diskrepanz bewegte uns, das ganze Problem des Durchschlages von homogenen Isolatoren bei den niedrigen Temperaturen noch einmal eingehend zu studieren.

Der grundsätzliche Unterschied zwischen der Anordnung von Rochov und der unserigen lag darin, daß bei Rochov der Randeffekt sorgfältig beseitigt wurde, während er bei uns scharf ausgeprägt sein konnte. Die erste Aufgabe, die wir uns stellten, bestand deshalb darin, den Einfluß gerade dieses Randeffektes herauszustellen. Es wurden die Abhängigkeiten der Durchschlagspannung von der Schichtdecke, von der Frequenz und der Temperatur untersucht, die sich, je nach der Schärfe des Randeffektes, als sehr verschieden erwiesen. Es gelang dabei auch, den ziemlich rätselhaften Einfluß aufzuklären, den das Medium, in dem der Durchschlag ausgeführt wird, auf die Werte der Durchschlagspannungen ausübt.

2. Der Randeffekt und seine Beseitigung.

Es können drei Mittel vorgeschlagen werden, um den schädlichen Einfluß des Randeffektes zu beseitigen oder jedenfalls zu schwächen.

---

[1] Vgl. L. Inge, H. Semenoff und A. Walther, Durchschlag von festen Isolatoren. Arch. f. Elektrot. **17**, 453, 1927. — L. Inge und A. Walther, Durchschlag von Porzellan bei hohen Temperaturen. Ebenda **18**, 542, 1927.

[2] Rochow, Arch. f. Elektrot. **15**, 361, 1925.

[3] Mundel, ebenda **15**, 320, 1925.



1. Eine solche geometrische Gestaltung des Prüflings, daß die Ränder der Elektroden auf die dicksten Teile des Prüflings zu liegen kommen. Die Dicke dieser Teile kann so bemessen werden, daß an ihnen der Durchschlag nicht geschehen kann. Der Prüfling muß an einer von den dünneren Stellen durchgeschlagen werden, die weit von den Rändern der Elektroden entfernt sind und wo der schädliche Einfluß dieser Ränder vollkommen verschwindet. So verfuhr z. B. Moszizki[1], der seinen Prüflingen die Form von Röhren gab, die an einer Stelle dünn aufgeblasen oder abgedreht waren (Bild 1a); Rochow[2], der für seine Durchlagsversuche die Prüflinge als bikonkave Linsen gestaltete (Bild 1b). Auch wir machten bei einigen von unseren Versuchen an Glas von diesem Mittel Gebrauch. Bei diesen Experimenten wurden Glasröhren angewandt, die am Ende sphärisch aufgeblasen waren (Bild 1c). Sorgt man außerdem für ein gutes Anliegen der Elektroden (am besten werden sie durch Versilberung auf chemischem Wege hergestellt), so werden alle groben Inhomogenitäten des elektrischen Feldes jedenfalls vermieden. Nachteilig für diese Methoden ist dagegen, daß sie eine künstliche, in manchen Fällen recht mühsame Bearbeitung der Prüflinge erfordern.

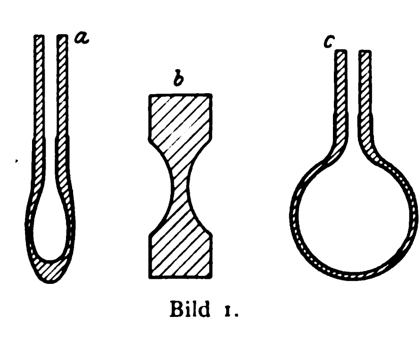


Bild 1.

2. Eine Einbettung des Prüflings und der Elektroden in ein Medium, das dieselbe Dielektrizitätskonstante besitzt wie die des Prüflings. Die Elektroden müssen dabei so geformt werden, daß sie an sich selbst ein möglichst homogenes Feld geben. Es sind uns keine Versuche bekannt, bei denen die Frage über die Anwendbarkeit einer solchen Methode systematisch untersucht wurde. Scheinbar stößt man dabei auf bedeutende Schwierigkeiten. Das erforderliche Medium muß nämlich nicht nur dieselbe Dielektrizitätskonstante wie der Prüfling, sondern auch eine geringe Leitfähigkeit und eine große elektrische Festigkeit besitzen. Einen solchen Stoff zu finden ist nicht leicht.

3. Eine Einbettung des Prüflings und der Elektroden in ein halbleitendes Medium, in dem wegen seiner bedeutenden Leitfähigkeit keine scharf ausgeprägte Inhomogenitäten des elektrischen Feldes vorhanden sein können. In manchen Fällen genügt es, selbst die Oberfläche des Prüflings in der Nähe der Ränder der Elektroden mit einer halbleitenden Schicht zu überdecken, um den Randeffekt bedeutend zu schwächen.

Auf dieses letzte Mittel stießen wir bei unseren Versuchen eher zufällig. Es stellte sich nämlich heraus, daß eine und dieselbe Art von Deckgläsern zwischen

Tabelle I.

Medium	ε	ϱ	Durchschlagspannung in kV		
			Gleich-spannung	Wechselsp. 50 per/sec max. Werte	Stoß-spannung
Pentan	1,8	$7,5 \times 10^{13}$	12,8	6,65	7,7
Benzin	1,9	$5,0 \times 10^{12}$	17,4	7,4	7,7
Transformatoröl	2,2	$2,4 \times 10^{12}$	16,9	7,4	7,9
Rizinusöl	4,4	$2,3 \times 10^{11}$	18,4	7,4	7,4
Xylol	2,35	$9,1 \times 10^{10}$	18,7	12,8	7,9
Xylol + 12% Azeton	3,1	$0,9 \times 10^{8}$	21,3	20,7	9,0

[1] Moszizki, ETZ 1904, H. 25, S. 527.
[2] Rochow, l. c.

flachen Elektroden bei Wechselspannung in verschiedenen Medien eine sehr verschiedene Durchschlagspannung aufweist. Die der Gleichspannung entsprechenden Werte sind einander bedeutend näher. Die für ein 0,075 mm dickes Deckglas gefundenen Werte sind in der Tabelle I angeführt.

Die in der zweiten Spalte angeführten Werte der Dielektrizitätskonstanten ε wurden von uns mittels einer Kapazitätsbrücke gemessen. Die dritte Spalte enthält die spezifischen Widerstände der entsprechenden Stoffe, die bei einer Feldstärke von 30 kV/cm mittels Gleichspannung ermittelt wurden. In den weiteren Spalten sind die entsprechenden Werte der Durchschlagspannungen in kV für Gleichspannung (vierte Spalte) und Wechselspannung von 50 Per/sec (fünfte Spalte) angeführt. Die sechste Spalte werden wir später besprechen. Die Schnelligkeit der Spannungsteigerung betrug 1,5 kV/min. Jede Zahl ist ein Mittelwert von mehreren Beobachtungen.

Die Werte der Durchschlagspannungen sowohl bei Gleich- als auch bei Wechselspannung wachsen vom Pentan ausgehend bis zum Xylol systematisch an. Durch den Einfluß der Dielektrizitätskonstante läßt sich dieses Anwachsen kaum erklären. Sie ist am größten bei dem Rizinusöl, nicht aber bei dem Xylol, in dem die Durchschlagspannungen am höchsten liegen. Am ehesten haben wir es hier mit einem Einfluß des spezifischen Widerstandes des Mediums zu tun, der sich auch tatsächlich stetig von Pentan bis zum Xylol vermindert. Besitzt das Medium eine bessere Leitfähigkeit, so wird der Randeffekt besser beseitigt und die Durchschlagspannungen liegen höher.

Diese Annahme wird noch dadurch bekräftigt, daß während in den schlecht leitenden Flüssigkeiten der Durchschlag immer an Rand der Elektroden geschieht, in dem durch Azeton verunreinigten Xylol die Glasplatte immer in der Mitte zwischen den Elektroden durchgeschlagen wird. Im letzten Fall muß also tatsächlich der Randeffekt so gut wie aufgehoben sein.

Wir behaupten keinesfalls, daß in Xylol die Inhomogenität des elektrischen Feldes an den Rändern der Elektroden tatsächlich gänzlich vernichtet wird. Wie wir aus dem Folgenden sehen werden, liegen dem Randdurchschlag und dem Durchschlag in der Mitte der Elektroden wahrscheinlich verschiedene Mechanismen zugrunde. Nimmt man ein gut leitendes Medium, so wird die Inhomogenität des Feldes an den Rändern bedeutend geschwächt. Dies hat ein Anwachsen der Durchschlagspannungen zur Folge, das so weit gehen kann, daß der neue Mechanismus in Spiel tritt. Da bei diesem neuen Mechanismus das Feld an den Rändern keine große Rolle mehr spielt, können wir dennoch von dem ganzen Vorgang als von einer Beseitigung des Randeffektes sprechen.

3. Der Einfluß der Frequenz.

Abgesehen davon, welch ein Mechanismus der Schwächung des Randeffektes zugrunde liegen könnte[1], läßt es sich behaupten, daß bei Wechselspannung die Durchschlagspannungen niedriger liegen müssen als bei Gleichspannung. Es sei A (Bild 2) der Prüfling, B die Elektroden, C das Medium. Weiterhin sei ϱ_1 der spezifische Widerstand des Prüflings, ε_1 deren Dielektrizitätskonstante. Die entsprechenden Werte für das Medium seien ϱ_2 und ε_2. In unserem Fall können wir annehmen, daß $\varrho_2 \gg \varrho_2$ ist $\left(\varrho_1, \text{ für unsere Deckgläser} \sim 10^{14} \frac{\Omega}{c}\right)$. Bei Gleichspannung werden wir nur mit Leitungsströmen zu tun haben, die bei $\varrho_2 < \varrho_1$ den Randeffekt vermindern werden. Wird Wechselspannung angewandt, so treten noch Kapazitätsströme hinzu, die bei großen Frequenzen die Leitungsströme bedeutend übertreffen können. In diesem letzten Fall wird der Randeffekt wieder seine volle Schärfe erhalten. Betrachten wir

[1] Man könnte z. B. annehmen, daß sich die Seitenflächen des Prüflings in der Nähe der Elektroden aufladen, wobei diese Ladungen ein Gegenfeld bilden, das die Feldstärke an den Rändern verringert.



die Tabelle I, so sehen wir tatsächlich, daß bei Wechselspannung die Durchschlagspannungen niedriger liegen als bei Gleichspannung. Bei den schlecht leitenden Flüssigkeiten (Pentan, Öl, Benzin) ist die Differenz am größten. Wahrscheinlich kommt es hier zu gar keiner Schwächung des Randeffektes. Im letzten Medium dagegen sind die Werte der Durchschlagspannungen bei Gleich- und Wechselspannung einander sehr nahe, so daß der Randeffekt hier als bedeutend geschwächt gelten kann[1].

Aus der eben angeführten Erklärung ließe es sich folgern, daß auch in den verhältnismäßig gut leitenden Medien bei hohen Frequenzen die Durchschlagspannungen ebenso klein sein müßten wie in den schlecht leitenden. Um diesen Schluß zu prüfen, verfuhren wir folgendermaßen; Wechselspannung von hoher Frequenz stand uns nicht zur Verfügung. Was aber bei dieser Frequenz nach der oben ausgeführten Theorie gefährlich ist, ist die Schnelligkeit des Anstieges der Spannung. Wir ersetzten deshalb Wechselspannung von verschiedener Frequenz durch verschieden steil ansteigende Spannungsstöße. Zwar konnte auch die Wiederholung der einzelnen Stöße, wie sie bei Wechselspannung geschieht, von Einfluß sein. Teilweise wurde die Frage jedenfalls durch unsere Problemstellung gelöst.

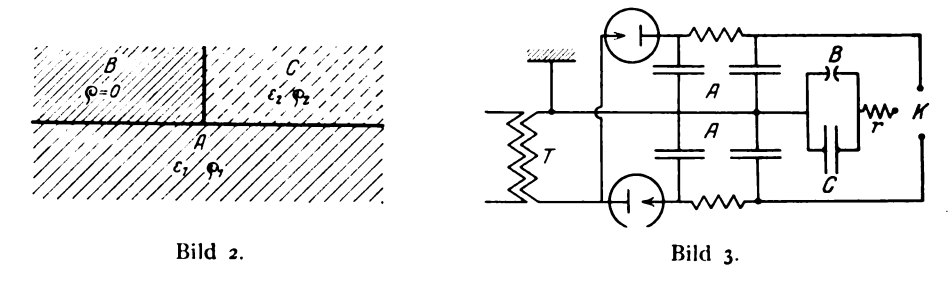


Bild 2. Bild 3.

Für die Herstellung der Stoßspannungen von beliebig steilem Anstieg machten wir von einem folgenden Schema Gebrauch; parallel zum Prüfling B (Bild 3) wurde ein Kondensator C geschaltet, der durch Widerstand r mittels des Umschalters K aufgeladen werden konnte. Als Spannungsquelle diente eine große Kapazität A, die durch den Transformator T und zwei Glühkathoden-Gleichrichter aufgeladen wurde. Die Kapazität C und der Widerstand R wurden immer so bemessen, daß die Aufladung aperiodisch vor sich ging. Außerdem wurde die Kapazität von C immer bedeutend kleiner genommen als diejenige von A, so daß man die Spannung an A nach der Einschaltung des Systems des Prüflings als unverändert schätzen konnte. Vorläufige Versuche mit Gleichspannung zeigten, daß die Größe des Widerstandes r an sich auf die Werte der Durchschlagspannungen keinen Einfluß ausübte.

Wie bekannt, geschieht die Aufladung des Kondensators nach dem Gesetz

$$V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{c\,r}}\right).$$

Die Steilheit des Anstiegs der Spannung wollen wir durch den Faktoren $\alpha = \frac{1}{c\,r}$ charakterisieren, den reziproken Wert des Zeitraums, der nötig ist, um die Kapazität bis auf 62% seines Endwertes zu laden. Bei unseren Versuchen betrug er $10^3 - 10^8$ sec^{-1}, während die Dauer des Stoßes selbst so lang bemessen wurde (etwa 0,1—1 sec), daß der Durchschlag, wenn er einmal während des Anstiegs der Spannung begonnen hatte, bis zum Ende gehen konnte.

[1] Bei den hohen, den Durchschlagsversuchen entsprechenden Spannungen ist Luft, wegen der Ionisation schon ein ziemlich guter Leiter. Es müßten also in Luft, den schädlichen Einfluß des Sprühens abgesehen, die Durchschlagspannungen in einigen Fällen höher liegen als in Öl, was auch tatsächlich beobachtet worden ist.

Die Schnelligkeit der Spannungssteigerung während des Durchschlagversuches betrug etwa 1,0—1,5 kV per Minute. Die Spannung wurde schrittweise vergrößert. Bei jeder Spannung wurde der größeren Zuverlässigkeit halber eine Reihe (5—10) von aufeinanderfolgenden Versuchen ausgeführt. Die Anzahl dieser wiederholten Proben, die bei konstanter Spannung ausgeführt wurden, hatte auf die Werte der Durchschlagspannungen keinen Einfluß. Wir machten von einer Wiederholung nur deshalb Gebrauch, weil bei ihr die Streuung der Resultate bedeutend kleiner wurde.

Der Maximalwert der angelegten Spannung V wurde aus der primären Spannung und dem Übersetzungsverhältnis des Transformators berechnet. In mehreren Fällen wurde sie auch unmittelbar mittels eines elektrostatischen Voltmeters und einer Prüffunkenstrecke nachgeprüft. Die Abwesenheit von etwaigen Überspannungen wurde ebenfalls mittels einer Prüffunkenstrecke festgestellt.

Die Versuche wurden mit Deckgläsern von 0,075 mm Dicke und 3×3 qcm Seitenfläche ausgeführt. Teilweise wurden diese Gläser chemisch versilbert, teilweise wurden unversilberte Gläser angewandt. Ein Unterschied ließ sich nicht feststellen.

Alle Versuche wurden bei genau denselben Bedingungen mehrmals (mindestens dreimal) wiederholt. Alle Werte, die im folgenden angeführt sein werden, sind daher Mittelwerte. Die Streuung der einzelnen Werte war ziemlich groß und betrug in einigen Fällen, besonders bei Stoßspannungen mit langsamem Anstieg bis zu 10%. Bei den schnell ansteigenden Stoßspannungen kann die mittlere Streuung zu 5% gesetzt werden.

Zuerst wurde eine Reihe von Versuchen mit schnell ansteigenden Stoßspannungen ($\alpha = 10^6$) in verschiedenen Medien ausgeführt. Die Resultate dieser Messungen sind in der sechsten Spalte der Tabelle I enthalten. Bei allen Stoffen außer dem verunreinigten Xylol, liegen die Werte der Durchschlagspannungen einander nahe und sind ungefähr denjenigen gleich, bei denen der Durchschlag bei Wechselspannung geschieht. Nur bei dem verunreinigten Xylol ist eine schwache Erhöhung der Durchschlagspannung vorhanden. Der hohe Wert, der der Gleich- und der Wechselspannung von 50 Per/sec entspricht, wird aber auch hier bei weitem nicht erreicht. Der Durchschlag geschieht bei diesen Stoßspannungen immer am Rand der Elektroden. Er ist gewöhnlich sehr heftig und der Prüfling fast immer zersplittert,

Tabelle II.

N	c	r	$\lg \frac{1}{cr}$	V_m kV
		Xylol + 12% Aceton		
1	100	300	7,48	8,5
2	1125	300	6,43	9,0
3	100	$4,8 \times 10^3$	6,25	9,2
4	1125	$4,8 \times 10^3$	5,22	11,5
5	100	$6,2 \times 10^4$	5,16	11,0
6	1125	$6,2 \times 10^4$	4,11	19,7
7	100	$7,0 \times 10^5$	4,11	20,5
8	100	$2,0 \times 10^6$	3,65	24,5
9	1125	$7,0 \times 10^5$	3,08	24,3
		Transformatoröl		
10	100	300	7,48	7,6
11	100	$4,8 \times 10^3$	6,25	8,0
12	1125	$4,8 \times 10^3$	5,22	8,2
13	100	$6,6 \times 10^4$	5,14	8,2
14	100	$1,1 \times 10^6$	3,91	8,6
15	1125	$1,1 \times 10^6$	2,86	11,4

während bei dem Durchschlag, der in der Mitte zwischen den Elektroden geschieht, die ganze Erscheinung bedeutend milder vor sich geht.

Bei den weiteren Versuchen, die in der Lösung von Xylol und Azeton, sowie im Transformatoröl ausgeführt wurden, wurde die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Steilheit des Anstieges systematisch untersucht (Tabelle II). Die Resultate der Messungen sind in der Tabelle II angeführt.

In der zweiten Spalte ist die Kapazität des Systems (Prüfling + parallel geschalteter Kondensator), in der dritten Spalte der vorgeschaltete Widerstand r, in der vierten der berechnete Wert von $\lg \frac{1}{c\,r} = \lg \alpha$, in der fünften die Durchschlagspannungen in kV angeführt. Dieselben Resultate sind graphisch auf Bild 4 abgebildet. Längs der Abszissenachse sind die Werte von lg. α, längs der Ordinatenachse die Durchschlagspannungen in kV aufgetragen. Die Kreise entsprechen den in Xylol, die Quadrate den in Öl gemessenen Werten. Bei großen α (schneller Spannungssteigerung) liegen sowohl im Xylol, als auch im Öl die Werte der Durchschlagspannungen nahe beieinander. Bei dem Übergang zu kleineren α beginnt der Anstieg der Durchschlagspannung zuerst im Xylol. Bei $\lg \alpha = 3{,}65$ erreichten sie einen hohen Wert, der bei weiterer Verminderung von α unverändert bleibt. Gleichzeitig damit ändert sich aueh der Charakter des Durchschlages. Während er bei den großen α immer am Rande der Elektroden geschieht, geht er bei denen durch Pfeile gekennzeichneten Werten in den mittleren Teil des Prüflings, zwischen die Elektroden über. Vergleicht man den hohen konstanten, den kleinen α entsprechenden Wert der Durchschlagspannungen mit demjenigen, der früher bei Gleichspannung und Wechselspannung gefunden wurde (Tabelle I), so sieht man, daß die den Stoßspannungen entsprechenden Werte um etwa 20% höher liegen. Dieser Unterschied muß wahrscheinlich dadurch erklärt werden, daß die Zeit, während der der Prüfling unter Spannung steht, für die Stoßspannung und die Gleichspannung sehr verschieden ist. Im ersten Fall beträgt sie etwa 1 sec, im zweiten, bei einer Spannungssteigerung von 1 kV/min, bedeutend mehr. Bei solch kurzen Beanspruchungen, wie sie den Stoßspannungen zukommen, können deshalb die Werte der Durchschlagspannungen etwas erhöht sein.

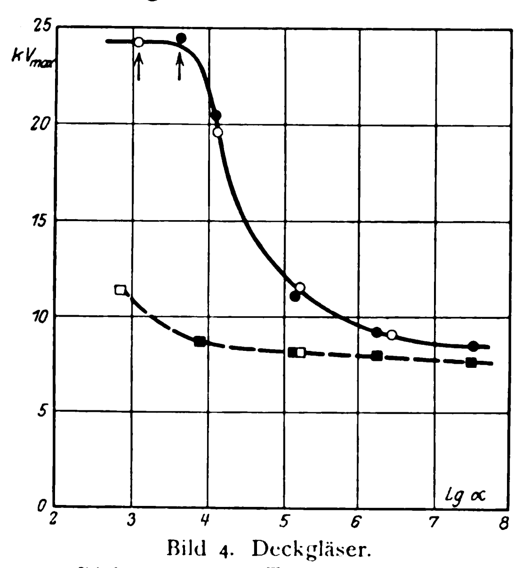


Bild 4. Deckgläser.
Dicke 0,075 mm, Temperatur 20° C.
○ ● Xylol + 12% Aceton. □ ■ Transformatoröl.

Im Öl beginnt der Anwuchs der Durchschlagspannungen bei bedeutend kleineren α. Wann hier der hohe konstante Wert erreicht wird, läßt sich nicht feststellen. Es ist von Interesse, diese Daten mit denen mit Wechselstrom ermittelten zu vergleichen. Im Xylol fanden wir für dieselben Gläser eine Durchschlagspannung von 20,7 kV, im Öl 7,4 kV. Für den Wechselstrom von 50 Per/sec kann man $\lg \alpha$ gleich 2,5 setzen. Das Bild 4 läßt sich entnehmen, daß im Xylol bei diesem α schon der hohe konstante Wert erreicht wird und folglich der Durchschlag bei Wechselspannung sehr hoch liegen muß, was tatsächlich auch zutrifft. Im Öl dagegen ist der Randeffekt noch nicht beseitigt, weshalb der Prüfling auch früh durchgeschlagen wird.

Das wir hier tatsächlich mit einem Einfluß der Schnelligkeit des Anstiegs der Spannung, nicht aber mit einem bloßen Einfluß des vorgeschalteten Widerstandes zu tun haben, wird durch folgende Umstände bekräftigt:

1. Die Größe des Widerstandes hat auf die Werte der Durchschlagspannungen bei Gleichspannung keinen merklichen Einfluß.

2. Der Wert der Durchschlagspannung wird durch das Produkt c r, nicht durch c und r einzeln bestimmt. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, in der Tabelle II die Nummern 4 und 5 oder 5 und 6 zu vergleichen.

Werden Vorsichtsmaßregeln genommen, um den Randeffekt selbst bei sehr schneller Spannungssteigerung zu beseitigen, so könnte man eine völlige Unabhängigkeit der Durchschlagspannungen von α erwarten. Um diese Behauptung zu prüfen, wurde von uns eine Reihe von Versuchen mit Glaskugeln ausgeführt (vgl. Bild 1 c). Diese Glaskugeln wurden von außen und innen versilbert, so daß der Rand der Elektroden auf den dicken Teil der Röhre zu liegen kam. Als Elektroden diente Quecksilber. Die Resultate der an Glaskugeln von 0,05 mm Wanddicke ausgeführten Messungen sind in der Tabelle III angeführt.

Tabelle III.

Glaskugeln Spannungsart	Dicke 0,05 mm Durchschlagspannung in kV
Gleichspannung	14,8
Wechselspannung von	14,8
50 Per/sec Maximalwert	
$\alpha = 2 \cdot 10^2$	14,0
$\alpha = 6{,}25 \cdot 10^4$	15,2
$\alpha = 1{,}07 \cdot 10^6$	14,2

Jede von den in der zweiten Spalte angeführten Zahlen ist ein Mittelwert von mehreren einzelnen Beobachtungen.

Tatsächlich läßt sich keine bestimmte Abhängigkeit der Durchschlagspannung von α feststellen. Der Unterschied zwischen den einzelnen Werten liegt innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtungen (mittlere Streuung bei großen α bis zu 20 %).

Es ist eine längst bekannte Tatsache, daß bei Wechselspannung von hoher Frequenz die Durchschlagspannungen bedeutend niedriger liegen als bei den niedrigen Frequenzen. Teilweise kann dieser Unterschied durch unsere Versuche geklärt werden. Bei hohen Frequenzen müssen nämlich sowohl der Randeffekt, als auch überhaupt alle Inhomogenitäten des Feldes bedeutend schärfer ausgeprägt sein als bei den niedrigen. Es ist dringend notwendig, bei Versuchen mit Hochfrequenz solche Inhomogenitäten peinlich zu vermeiden.

4. Die Abhängigkeit von der Schichtdicke und der Frequenz.

Die Frage über die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Schichtdicke ist eigentlich schon seit langem von Moszizki[1] gelöst worden. Er fand, daß bei der Beseitigung des Randeffektes die Durchschlagspannungen nicht nur erhöht wurden, sondern daß auch der ursprünglich parabolische Zusammenhang zwischen Schichtdicke und Durchschlagspannung $V^2 = \text{Const} \cdot d$ in eine Proportionalität zwischen V und d überging. Das Proportionalitätsgesetz ist somit für den Durchschlag bei beseitigtem Randeffekt, das Parabelgesetz, oder allgemeiner, das Potenzgesetz (diese Benennungen entnehmen wir Schwaiger) für den Randdurchschlag charakteristisch.

[1] Moszizki, Über Hochspannungskondensatoren. ETZ 1904.

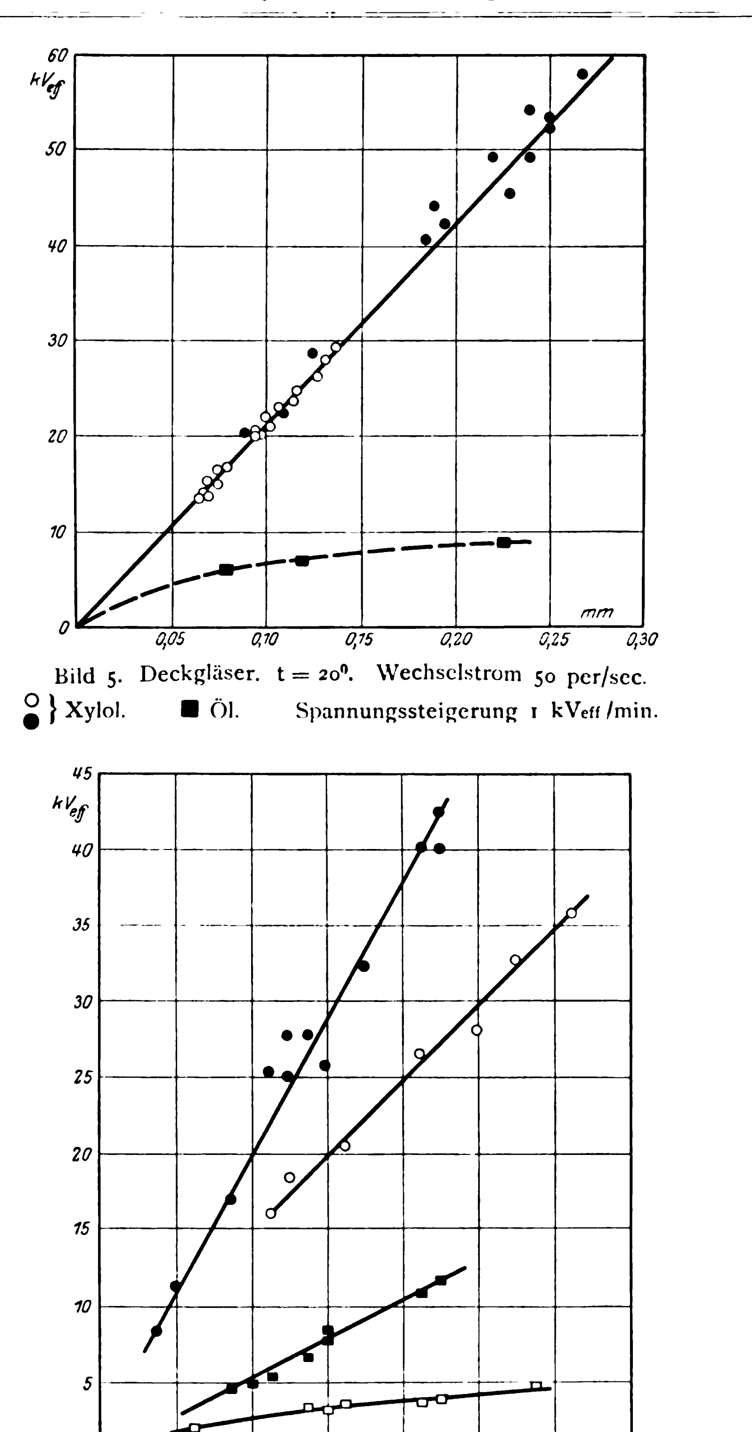


Bild 5. Deckgläser. t = 20°. Wechselstrom 50 per/sec.
○ ● } Xylol. ■ Öl. Spannungssteigerung 1 kVeff/min.

Bild 6. Glimmer.
● Gleichspannung ■ Wechselspannung } Xylol. ○ Gleichspannung □ Wechselspannung } Transformatoröl.

Die von uns an Deckgläsern gewonnenen Resultate bekräftigen diese Behauptung. Aus dem Bild 5 ist zu sehen, daß bei beseitigtem Randeffekt im Xylol bei

Wechselspannung von 50 Per/sec die Durchschlagspannung der Schichtdicke proportional anwächst, in dem Intervall der Dicken wenigstens (0,05—0,25 mm), dem unsere Messungen entsprechen[1]. Als Durchbruchfeldstärke ergibt sich für diese Glasart $2,1 \cdot 10^6$ $V_{eff/cm}$. Zum Vergleich ist unten (gestrichelte Kurve) auch die in

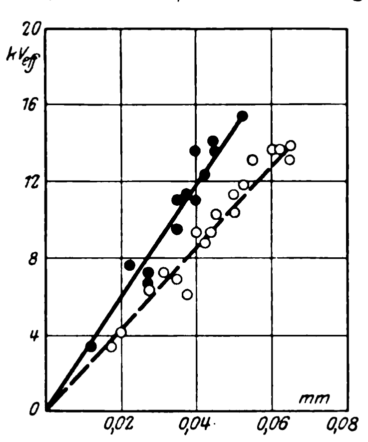


Bild 7. Glaskugeln. t = 20° C.
● Gleichspannung,
○ Wechselspannung von 50 per/sec.
Spannungssteigerung 1 kVeff./min.

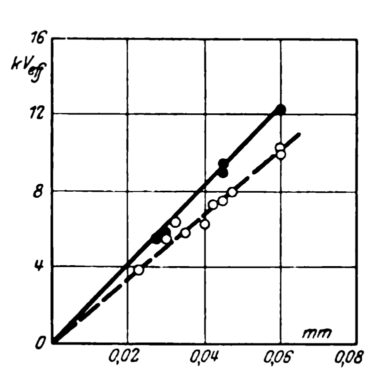


Bild 8. Glaskugeln. t = 60° C.
● Gleichspannung,
○ Wechselspannung,
Spannungssteigerung 1 kV/min.

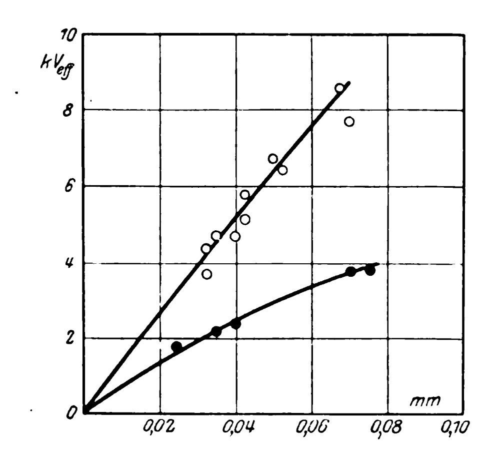


Bild 9. Glaskugeln. Wechselspannung 50 per/sec,
○ 100° C, ● 170° C, Spannungssteigerung 1 kV/min.

Öl gemessene Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Schichtdicke angeführt. Dieser letzten entspricht entschieden das Potenzgesetz. Zu ähnlichen Resultaten führten auch die an Glimmer ausgeführten Messungen. Sie sind in dem Bild 6 angeführt. Auch hier nähert sich bei dem Übergang von Öl zum Xylol die Abhängigkeit von der Schichtdicke dem Proportionalitätsgesetz sowohl für Gleichspannung (Kreise), als auch für Wechselspannung (Quadrate)[2].

Weitere Versuche wurden von uns an Glaskugeln aus gewöhnlichem Geräteglas ausgeführt. Die Kugeln waren von innen und außen versilbert. Als Elektroden

[1] Die schwarzen und weißen Kreise entsprechen denselben Deckgläsern, aber verschiedenen Anordnungen.

[2] Außerdem wurden noch einige Versuche an Porzellan und Steinsalz ausgeführt. Für Porzellan ergab sich eine konstante Durchbruchfeldstärke von etwa $2,0 \cdot 10^5$ Volt/cm; bei Steinsalz, dessen elektrische Festigkeit scheinbar ein großes theoretisches Interesse bietet, ist es uns nicht gelungen, größere Durchbruchfeldstärken als $7,5 \cdot 10^5$ Volt/cm zu beobachten.

diente Quecksilber. Die Schnelligkeit der Spannungssteigerung betrug 1,5 kV/min. Die Messungen wurden bei verschiedenen, zwischen 20° C und 205° C liegenden Temperaturen ausgeführt. Bei den niedrigeren (20—100° C) Temperaturen wurde sowohl Gleich- als auch Wechselspannung, bei den hohen (100—205° C) nur Wechselspannung angewandt. Die gemessenen Werte sind in den Bildern 7—9 aufgetragen.

Bei 20° C (Bild 7) wächst sowohl für Gleich- als auch für Wechselspannung die Durchschlagspannung der Schichtdicke proportional an. Die Kugeln werden bei gleichen maximalen Werten der Spannung durchgeschlagen (in dem Bild sind die effektiven Werte der Durchschlagspannungen aufgetragen). Der Wechselspannung entspricht eine Durchbruchfeldstärke von etwa $2,2 \cdot 10^6$ $V_{eff/cm}$. Bei 60° C (Bild 8) genügt die Abhängigkeit von der Schichtdicke wiederum dem Proportionalitätsgesetz. Von 100° an (Bild 9) läßt sich eine kleine Abweichung von dem Proportionalitätsgesetz merken. Bei 170° ist die Abweichung schon bedeutend. Der Übergang zum Potenzgesetz, der sich bei etwa 100° vollzieht, muß wahrscheinlich dadurch erklärt werden, daß von hier an ein fast reiner Wärmedurchschlag beginnt. Zu dieser Frage werden wir noch zurückkommen. Bei den niedrigen Temperaturen wird das Proportionalitätsgesetz jedenfalls gut erfüllt.

Alle sowohl von uns, als auch von Moszizki ausgeführten Messungen entsprechen verhältnismäßig kleinen Schichtdicken (bis zu 0,4 mm). Nach Schwaiger[1] kann aber bei Porzellan das Proportionalitätsgesetz bis zu Dicken von 10 mm verfolgt werden.

Nur eine Arbeit steht mit diesen Resultaten im entschiedenen Widerspruch, diejenige von Rochow[2]. Rochow gab bei seinen Versuchen den Prüflingen die Form von Bikonkav-Linsen. Als Elektroden diente Quecksilber, welches, um Luftblasen zu vermeiden, im Vakuum eingegossen war. Es gelangten von homogenen Stoffen Glas und Quarz, von den nichthomogenen Porzellan, Ebonit und einige weitere zur Untersuchung. Bei den meisten Stoffen wurde ein bedeutendes Abfallen der Durchbruchfeldstärke bei steigender Schichtdicke beobachtet, so z. B. bei Glas (vgl. Tabelle IV).

Tabelle IV.

d mm	E kV max/cm
0,032	4290
0,049	3860
0,102	3380
0,207	2640
0,262	2490

Bei einem Anwachsen der Schichtdicke von 0,05 bis 0,25 mm verkleinert sich die Durchbruchfeldstärke auf etwa 35%. Zwar ist die Änderung am bedeutendsten bei den kleinen Schichtdicken, aber auch bei den größeren scheint die Durchbruchfeldstärke keinem konstanten Wert zuzustreben. Für Porzellan ergab sich ungefähr derselbe Gang, die Durchschlagspannungen lagen aber bedeutend niedriger. Nur bei dem kristallinischen und dem Gerätequarz wurde eine beinahe konstante Durchbruchfeldstärke beobachtet.

Eine solch große Abweichung vom Proportionalitätsgesetz, wie sie bei Glas beobachtet wurde, kann durch eine zufällige Streuung der Resultate keinesfalls erklärt werden. Außerdem sind gerade die Messungen von Rochow die vertrauungswertesten, da bei ihnen alle möglichen Fehlerquellen bis aufs peinlichste beseitigt wurden.

[1] Schwaiger, Elektrische Festigkeitslehre. Berlin 1925, S. 36.
[2] Rochow, Arch. f. Elektrot. **15**, 361, 1925.

Da aber auch in diesem Fall die Abweichungen von der Proportionalität nicht sehr bedeutend sind, kann es jedenfalls behauptet werden, daß die Beseitigung des Randeffektes eine Annäherung an das Proportionalitätsgesetz mit sich führt.

Vergleichen wir die absoluten Werte der Durchbruchfeldstärken für einen und denselben Isolator, die von verschiedenen Beobachtern gefunden worden sind, so erweist sich die Übereinstimmung als ziemlich befriedigend.

Tabelle V.

Beobachter	Glas	Porzellan
Moszizki	$1{,}36 \times 10^6$	
Inge u. Walther	$2{,}15 \times 10^6$	$2{,}0 \times 10^5$ [2]
Rochow [1]	$2{,}4 \times 10^6$ bei $d = 0{,}1$ mm	$2{,}7 \times 10^5$ bei $d = 1{,}0$ mm
Weicker		$2{,}7 \times 10^5$

Zum Schluß muß hier noch die Arbeit von Mündel[3] erwähnt werden. Es läßt sich leider nicht angeben, in welchem Maße bei seinen Versuchen der Randeffekt beseitigt war. Auch liegen die von Mündel gefundenen Werte der Durchschlagspannungen bedeutend niedriger als die obigen. Da sich bei diesen Versuchen das Potenzgesetz als gerechtfertigt erwiesen hat, ist die Erniedrigung der Durchschlagspannungen am bedeutendsten für große Schichtdicken. So entspricht z. B. einer 0,4 mm dicken Glasplatte eine Durchbruchfeldstärke von 6×10^5 V/cm, während nach Moszizki derselben Schichtdicke der Prüfling bei einer Feldstärke von $1{,}92 \cdot 10^6$ V/cm durchschlagen wird. Teilweise kann dieser Unterschied dadurch erklärt werden, daß Mündel bei seinen Versuchen schon drinnen im Wärmegebiet war. Zu diesen Versuchen werden wir noch zurückkehren, wenn wir den Temperaturgang der Durchschlagspannung betrachten werden.

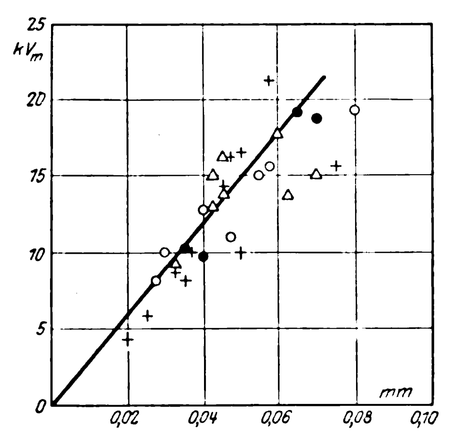


Bild 10. Glaskugeln. $t = 20^0$. Stoßspannungen.
○ $\alpha = 2 \cdot 10^2$, + $\alpha = 1{,}07 \cdot 10^6$
△ $\alpha = 6{,}25 \cdot 10^4$, ● $\alpha = 4 \cdot 10^3$.

Was die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Frequenz betrifft, so liegen die der Gleichspannung entsprechenden Werte gewöhnlich etwas höher als die der Wechselspannung entsprechenden. Rochow fand z. B. zwischen Gleichspannung und Wechselspannung von 50 Per/sec eine Differenz zwischen den Maximalwerten von etwa $20^0/_0$. Mündel gibt für dieselben Spannungsarten eine Differenz von weniger als $5^0/_0$ an. In unseren Versuchen geschah bei 20^0 bei den Glaskugeln der Durchschlag bei gleichen maximalen Werten der Gleichspannung und der Wechselspannung (vgl. Bild 7). Ob der Durchschlag durch die maximalen oder die effektiven Werte der Spannungen bestimmt wird, darüber läßt sich aus diesen Versuchen nichts schließen. Dies hängt, wie wir es im folgenden zeigen werden, davon ab, wie weit wir bei den Versuchen vom Wärmegebiet entfernt sind. Was den Rand-

[1] Die von Rochow angegebenen Maximalwerte der Spannungen sind von uns der Übersichtigkeit halber unter der Rücksichtsnahme des üblichen Scheitelfaktoren 1,41 zu den effektiven Werten reduziert.

[2] Porzellanplatten im Xylol gemessen.

[3] Mündel, Arch. f. Elektrot. **15**, 320, 1925.

durchschlag anlangt, so ist es von uns schon früher gezeigt worden, daß er von dem Maximalwert der angelegten Wechselspannung abhängt[1].

Aus der Tatsache, daß der Durchschlag bei Gleich- und bei Wechselspannung bei ungefähr denselben Werten der Spannungen geschieht, läßt es sich folgern, daß die Polarisationserscheinungen, die bei den niedrigen Spannungen in den Isolatoren eine solch große Rolle spielen, bei den hohen Spannungen nur von geringem Einfluß sind. Vielleicht läßt sich auf sie der Umstand zurückführen, daß die Durchschlagspannungen bei Gleichspannung um einige Prozente höher liegen als bei Wechselspannung.

Es war endlich von Interesse herauszustellen, welch eine Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Schichtdicke sich für die Stoßspannungen bei den Glaskugeln ergeben würde. Die gewonnenen Werte sind in Bild 10 eingetragen. Die geneigte Gerade entspricht der Abhängigkeit, die sich für Gleichspannung ergibt. Die den Stoßspannungen entsprechenden Werte legen sich regellos um diese Gerade, so daß auch für sie am ehesten das Proportionalitätsgesetz erfüllt wird. Wie es schon früher bemerkt wurde, ist außerdem für die Glaskugeln keine bedeutende Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Steilheit des Anstiegs der Spannung vorhanden.

5. Die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Temperatur.

Wir müssen hier wieder zwischen dem Randdurchschlag und dem Durchschlag bei beseitigtem Randeffekt unterscheiden. Der Randdurchschlag bei Wechselspannung

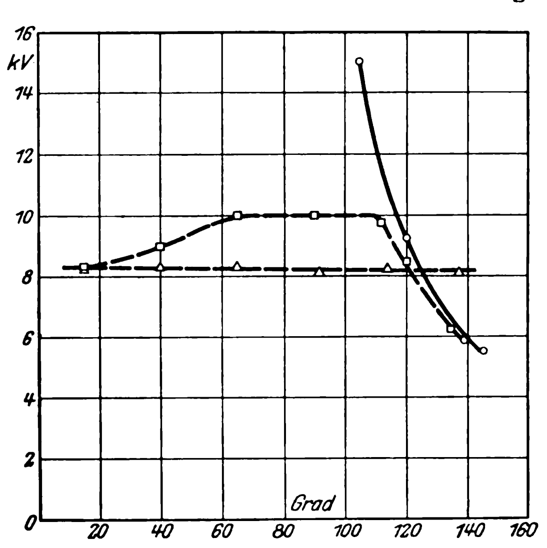


Bild 11. Deckgläser. Dicke 0,16 mm. In Öl.
○ Gleichspannung,
□ Wechselspannung in 50 per/sec,
△ Stoßspannungen von steilem Anstieg.

besitzt, wie wir es schon früher gezeigt haben[2], keinen bedeutenden Temperaturgang. So ändert sich z. B. für Glas bei gut ausgeprägtem Randeffekt von der Temperatur der flüssigen Luft an (—160°) bis zu 70—80° C die Durchschlagspannung nur unbedeutend. Für Steinsalz ist eine solche Unabhängigkeit von den Zimmertemperaturen an bis 200—250° C, für Glimmer selbst bis zu 350° C zu beobachten.

[1] Vgl. L. Inge, N. Semenoff und A. Walther, Arch. f. Elektrot. **17**, 1926, H. 5, S. 453.
[2] Vgl. L. Inge, N. Semenoff und A. Walther, l. c.

Unsere letzten Versuche zeitigten jedoch, daß man auch bei dem Randdurchschlag im Gebiet der niedrigen Temperaturen eine wenn auch geringe Temperaturabhängigkeit der Durchschlagspannung bekommen kann. Die Resultate dieser an 0,10 mm dicken Deckgläsern ausgeführten Messungen sind auf Bild 11 wiedergegeben. Die Versuche wurden in Öl zwischen flachen Elektroden ausgeführt, so daß der Randeffekt ziemlich scharf ausgeprägt sein mußte. Die Kreise entsprechen der Gleichspannung, die Quadrate Wechselspannung von 50 Per/sec, die Dreiecke Stoßspannungen von steilem Anstieg $\left(\alpha = 10^5 \frac{1}{\sec}\right)$. Es sind die maximalen Werte der Durchschlagspannungen angegeben. Der steile Abfall der Kurven rechts entspricht dem Übergang zum reinen Wärmedurchschlag. Die den Stoßspannungen entsprechenden Werte ändern sich bei Temperaturerhöhung so gut wie gar nicht. Merkwürdig ist, daß die Gerade der Stoßspannungen selbst in dem Wärmegebiet verfolgt werden kann. Bei nicht zu hohen Temperaturen hat nämlich der Prüfling während des verhältnismäßig kurzen Stoßes nicht Zeit, durchgeschmolzen zu werden, und der Durchschlag geschieht nach demselben Mechanismus und bei derselben Spannung wie bei den niedrigen Temperaturen. Wir haben hier ein Beispiel dafür, daß die Temperatur den Mechanismus des Durchschlages eines gegebenen Stoffes keineswegs eindeutig bestimmt. Je nachdem, wie die Spannung angelegt wird, können wir verschiedene Arten von Durchschlägen haben.

Bei Wechselspannung von 50 Per/sec wird vor dem Übergang zum Wärmedurchschlag zuerst eine Erhöhung der Durchschlagspannung beobachtet. Diese Erhöhung kann wahrscheinlich dadurch erklärt werden, daß sich bei dem Erwärmen die Eigenschaften des Mediums verändern. Das Öl wird besser leitend, der Randeffekt wird in einem volleren Maße beseitigt und die Durchschlagspannungen wachsen an.

In einigen Fällen kann folglich eine Temperaturabhängigkeit der Durchschlagspannung durch den Einfluß des Mediums hervorgetäuscht werden.

Bei Gleichspannung, bei der der Randeffekt beinahe beseitigt ist, läßt sich ein Temperaturgang der Durchschlagspannung und folglich der Wärmedurchschlag bis zu bedeutend niedrigeren Temperaturen verfolgen als bei der Wechselspannung.

Für den Randdurchschlag ist folglich die Temperaturunabhängigkeit charakteristisch. Der Übergang zum Wärmedurchschlag mit seinem bedeutenden Temperaturgang ist ungemein scharf[1]. Es genügt meistens schon eine Temperaturänderung von $5-10^0$, um von der einen Art des Durchschlages zur anderen Art überzugehen.

Bei geschwächtem Randeffekt gestaltet sich der Temperaturgang der Durchschlagspannung wesentlich anders. In einigen Fällen wird freilich auch hier im Bereich der Zimmertemperaturen kein Temperaturgang der Durchschlagspannung beobachtet. So fand z. B. Rochow für Jenaer Flintglas (Schott 0118) zwischen -18^0 C und $+90^0$ C keine Änderung der Durchschlagspannung. Bei anderen Gläsern jedoch, wie bei denen von uns untersuchten Zeißschen Deckgläsern, läßt sich schon von den Zimmertemperaturen an eine Temperaturabhängigkeit der Durchschlagspannung feststellen. Auf dem Bild 12 sind die Resultate der Messungen an solchen 0,08 mm dicken Deckgläsern mit Gleichspannung in Xylol angeführt. Schon von $50-60^0$ an beginnt der für den reinen Wärmedurchschlag charakteristische steile Abfall der Durchschlagspannung. Von 50^0 C herab scheint dagegen der Durchschlag nicht mehr rein thermisch zu sein. Wir haben es hier wahrscheinlich mit dem wärmeelektrischen Durchschlag von Rogowski zu tun. Jedenfalls geht bei geschwächtem Randeffekt der Wärmedurchschlag in den elektrischen ganz allmählich über, eine scharfe Grenze zwischen beiden existiert nicht. Die gestrichelte Gerade unten entspricht den Werten

[1] Wie es von uns schon früher gezeigt wurde, liegt bei dem Wärmedurchschlag die durchgeschlagene Stelle meistens in der Mitte des Prüflings, bei dem Randdurchschlag, wie es der Namen selbst zeigt, am Rande der Elektroden. Nach diesem Merkmal läßt es sich bequem unterscheiden, ob wir es mit einem Wärmedurchschlag zu tun haben oder nicht.



der Durchschlagspannungen, die man bei scharf ausgeprägtem Randeffekt mit Stoßspannungen von steilem Anstieg bekommt.

Auch bei den Glaskugeln wurde von uns ein ähnlicher Temperaturgang beobachtet. Er ist im Bild 13 angeführt, wobei den Kreisen die mit Gleichspannung gemessenen, den Dreiecken die mit Wechselspannung von 50 Per/sec gemessenen Werte der Durchschlagspannungen entsprechen. Die Durchschlagspannungen sind überall in ihren effektiven Werten angegeben. Die Schichtdicke beträgt 0,05 mm. Der steile Abfall beginnt hier schon bei 20° C. Bemerkenswert ist, daß während

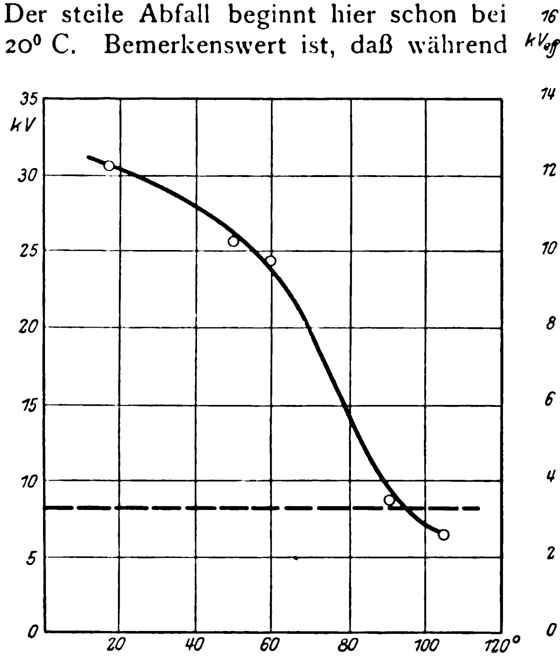


Bild 12. Deckgläser. Dicke 0,10 mm. Gleichspannung. Spannungssteigerung 1 kV/min.

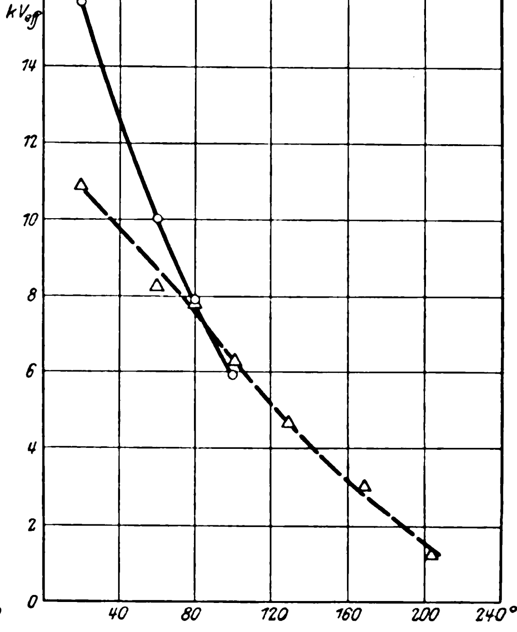


Bild 13. Glaskugeln. Dicke 0,05 mm. ○ Gleichspannung, △ Wechselspannung von 50 per/sec, Spannungssteigernng 1 kV/min.

bei der Zimmertemperatur der Prüfling bei ungefähr denselben maximalen Werten der Gleichspannung und der Wechselspannung durchgeschlagen wird, von 80° an die effektiven Werte der Durchschlagspannungen zusammenfallen.

Zu ähnlichen Resultaten wie wir kam bei seinen Messungen auch Mündel. Die von ihm angeführten Kurven sind den unsrigen der Form nach äußerst ähnlich (vgl. z. B. Bild 26 von Mündel mit dem Bild 12 in unserem Aufsatz, sowie die Bilder 14 u. 13). Nur liegen die von ihm ermittelten Werte der Durchschlagspannungen bedeutend niedriger als die unsrigen.

Was die Resultate von Rochow betrifft, der keinen Temperaturgang der Durchschlagspannung entdecken konnte, so widersprechen sie den unsrigen keineswegs. Sowohl die Versuche von Mündel, als auch unsere (vgl. Bild 12) zeigen, daß die Kurve, die die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Temperatur wiedergibt, bei niedrigeren Temperaturen langsamer anzusteigen beginnt und zu einer wagrechten Geraden strebt. Die Temperatur, bei der der Wendepunkt der Kurve liegt, hängt von dem spezifischen Widerstand des Stoffes ab. Ist dieser Widerstand klein, so können wir selbst bei den Zimmertemperaturen einen Wärmedurchschlag haben, und werden einen Temperaturgang bekommen, der demjenigen auf dem Bild 13 abgebildeten ähnlich ist. Besitzt dagegen der Stoff einen großen spezifischen Widerstand, so kann der Wendepunkt bei 100° C und höher liegen, wie es auch Rochow beobachtet hatte.

Besprechung der Resultate.

6. Der rein elektrische und der wärmeelektrische Durchschlag.

1. Einen reinen Wärmedurchschlag werden wir einen solchen nennen, der durch das Labilwerden des im Inneren des Isolators herrschenden thermischen Gleichgewichts bedingt wird. Die Erwärmung des Isolators selbst wird durch die Stromwärmeverluste verursacht, zu denen bei Wechselspannung noch die dielektrischen Verluste hinzukommen[1]. Als charakteristisches Merkmal des Wärmedurchschlages kann seine große Temperaturabhängigkeit dienen. Dabei muß die Durchschlagspannung ungefähr denselben Temperaturgang besitzen wie die Quadratwurzel aus dem spezifischen Widerstand des Isolators. Was die Abhängigkeit von der Schichtdicke betrifft, so sind hier zwei extreme Fälle möglich: a) der Isolator ist vollkommen homogen und wird vom elektrischen Strom gleichmäßig durchflossen (der Fall von Rogowski). Für die Abhängigkeit von der Schichtdicke ergibt sich in diesem Fall ein Potenzgesetz, das bei kleinen Dicken in die Parabel $V^2 = \mathrm{Const} \cdot d$ übergeht. b) Der Isolator besitzt grobe Inhomogenitäten. Der elektrische Strom konzentriert sich auf einige fadenförmige Wege, die die verhältnismäßig gut leitenden Inhomogenitäten einschließen. Erwärmt werden nur diese Fäden, die übrigen Teile des Isolators bleiben kalt (die Wärmetheorie von Wagner in ihrer ursprünglichen Form). Für diesen Fall wurde von Wagner eine Proportionalität zwischen der Durchschlagspannung und der Schichtdicke berechnet. Die neuesten Untersuchungen[2] zeigen freilich, daß wir auch hier zu einem Potenzgesetz kommen, das aber vom Proportionalitätsgesetz weniger abweicht als das dem Fall a) entsprechende.

2. Rein elektrisch werden wir den Durchschlag dann nennen, wenn er durch ein Labilwerden des elektrischen Gleichgewichts des Isolators bedingt wird. Dieses Labilwerden kann entweder durch ein Zerreißen des Kristallgitters des Stoffes durch elektrische Kräfte verursacht sein[3], oder ihm kann eine Art Stoßspannung zugrunde liegen, wie es A. Joffe und seine Mitarbeiter für sehr dünne Schichten von Isolatoren bewiesen haben. Wichtig ist, daß in diesem Fall nicht die Erwärmung, sondern das elektrische Feld an sich zerstörend wirkt. Charakteristisch für diesen Durchschlag sind: a) eine geringe Abhängigkeit von der Temperatur; b) eine sehr starke Beeinflussung durch die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes. Im homogenen elektrischen Feld läßt es sich erwarten, daß die Durchschlagspannung der Schichtdicke proportional anwachsen wird.

3. Der wärmeelektrische Durchschlag bildet den Übergang vom reinen Wärmedurchschlag zum rein elektrischen Durchschlage. Wir haben bei der Behandlung des Wärmedurchschlages angenommen, daß die Stromwärme gleich $\frac{V^2}{R}$ gesetzt werden kann, wo R der Ohmsche Widerstand des Isolators und V die angelegte Spannung sind. Damit der Durchschlag bei V geschehe, ist es nur nötig, daß R einen genügend kleinen Wert besitzt. Ein kleiner Wert von R kann aber nicht nur durch eine hohe Temperatur, sondern auch durch die unmittelbare Einwirkung des elektrischen Feldes bedingt werden.

Einer bestimmten großen Feldstärke kann deshalb ein Widerstand entsprechen, der bedeutend kleiner ist als der bei niedrigen Feldstärken gemessene. Dementsprechend müssen auch die Durchschlagspannungen niedriger liegen, als wie wenn sie nach der reinen Wärmetheorie berechnet wären.

---

[1]) Den neuesten Arbeiten entsprechend können auch die dielektrischen Verluste größtenteils auf eigenartige Stromwärmeverluste zurückgeführt werden (vgl. K. Sinelnikow und Anton Walther, Zeitschr. f. Phys. 1926).

[2] Vgl. z. B. Dreifus, E. u. M. 1926, S. 133.

[3] Diese Möglichkeit ist ausführlich von Rogowski, Arch. f. Elektrot., **18**, 123, 1927, behandelt worden.



Mathematisch ist das Problem des wärmeelektrischen Durchschlages von W. Rogowski[1] behandelt worden. Bei der Annahme, daß sich der Widerstand des Isolators nach der Formel:

$$R = R_0 \left(1 - \frac{E}{E_0}\right) e^{-aT} \tag{2}$$

ändert (E_0 ein kritischer Wert der Spannung, bei dem der Widerstand des Isolators zu Null wird), bekommt Rogowski für dünne Platten den Ausdruck

$$V_{we} = E_0 d \left(1 - \frac{2}{3} \frac{E_0^2 d^2}{V_w^2}\right). \tag{3}$$

Hier ist V_{we} der Wert der Durchschlagspannung bei der wärmeelektrischen Auffassung, V_w derselbe Wert bei der reinen Wärmeauffassung, d die Dicke der Platte. Der Ausdruck (3) enthält sowohl die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Dicke der Prüflinge, als auch durch den Faktoren V_w den Temperaturgang der Durchschlagspannung. E_0 kann als von der Temperatur unabhängig betrachtet werden. Bei dünnen Platten und niedrigen Temperaturen kann der zweite Summand in den Klammern $\frac{2}{3} \frac{E_0^2 d^2}{V_w^2}$ gegenüber der Einheit vernachlässigt werden. Die Durchschlagspannung wächst nach dem Proportionalitätsgesetz an und ist temperaturunabhängig. Gehen wir nun zu größeren Dicken und höheren Temperaturen über, so wächst dieser zweite Summand. Das Proportionalitätsgesetz geht in ein Potenzgesetz über. Gleichzeitig damit beginnt die Durchschlagspannung auch von der Temperatur abzuhängen.

Bei dem wärmeelektrischen Durchschlag können wir folglich drei Gebiete unterscheiden, die folgende Merkmale besitzen:

1. Durchschlagspannung der Dicke proportional, kein Temperaturgang (fast rein elektrischer Durchschlag).

2. Übergangsgebiet, schwach ausgeprägtes Potenzgesetz, unbedeutende Temperaturabhängigkeit.

3. Potenzgesetz; bedeutender Temperaturgang den Durchschlagspannung (fast reiner Wärmedurchschlag).

Vergrößern wir die Dicke der Platte, oder erhöhen die Temperatur, so gehen wir allmählich aus dem ersten Gebiet in das dritte über.

Wenn wir uns zu den experimentellen Ergebnissen wenden, so sehen wir sofort, daß der Randdurchschlag, besonders derjenige mit Stoßspannungen ausgeführte, dem rein elektrischen Durchschlag am nächsten steht. Beide Merkmale des rein elektrischen Durchschlages, nämlich die Unabhängigkeit von der Temperatur und große Beeinflussung durch die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes sind bei ihm am schärfsten ausgeprägt. Das Potenzgesetz, dem der Randdurchschlag folgt, muß, wie es schon erwähnt wurde, dadurch erklärt werden, daß im Fall von ebenen Elektroden der Randeffekt relativ um so schärfer ausgeprägt ist, je weiter die Platten voneinander entfernt sind, d. h. je dicker man den Prüfling nimmt. Diese Behauptung läßt sich unschwer an einem Maxwellschen ebenen Kondensator rechnerisch nachprüfen.

Beim beseitigten oder geschwächten Randeffekt ist im Fall von höheren Temperaturen der Durchschlag entschieden rein thermisch (vgl. Bild 11—13). Darauf deutet sowohl die Temperaturabhängigkeit und die Abhängigkeit von der Dicke des Prüflings (Bild 9), als auch der Umstand, daß der Durchschlag durch die effektiven Werte der Spannungen bestimmt wird. Von etwa 60—80° an und herunter zu den

[1] W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. 13, 1924, S. 168.

Zimmertemperaturen haben wir es scheinbar mit einem wärmeelektrischen Durchschlag zu tun, bei dem aber noch der thermische Teil gut ausgeprägt ist, wie es der bedeutende Temperaturgang beweist. Merkwürdig ist, daß trotz dieses thermischen Charakters des Durchschlages die Abhängigkeit von der Dicke des Prüflings durch das Proportionalitätsgesetz ausgedrückt wird (vgl. Bild 7 und 8). Man könnte versuchen, diesen Umstand dadurch zu erklären, daß bei den niedrigen Temperaturen alle Inhomogenitäten des Stoffes besonders scharf hervortreten und der Wärmedurchschlag nach der Theorie von Wagner behandelt werden muß, die ja auch tatsächlich zum Proportionalitätsgesetz führt. Solch grobe Inhomogenitäten wie sie Wagner voraussetzt, sind aber in dünnen Glasplatten höchst unwahrscheinlich.

Diese Ergebnisse stehen mit den von Rogowski für den wärmeelektrischen Durchschlag berechneten Formeln in einigem Widerspruch. Dieser Widerspruch zeugt ganz entschieden nicht gegen die wärmeelektrische Auffassung in ihrem ganzen. Er zeigt nur, daß bei dem wärmeelektrischen Durchschlage in einigen Fällen die Verhältnisse bedeutend komplizierter sind als man es ursprünglich annehmen konnte.

Die Ergebnisse, zu denen wir bei unseren Untersuchungen gelangten, sind in dem Bild 14 zusammengefaßt, in der der ungefährige Temperaturgang der Durchschlagspannung irgendeines Isolators abgebildet ist. Wir haben bei

a) mit einem reinen Wärmedurchschlag,

b) mit einem rein elektrischen Durchschlag im inhomogenen Felde (Stoßspannungen),

c) mit einem rein elektrischen Durchschlage im homogenen Feld oder ihm sehr nahen wärmeelektrischen Durchschlag (Rochow),

d) mit dem eigentlichen wärmeelektrischen Durchschlag zu tun.

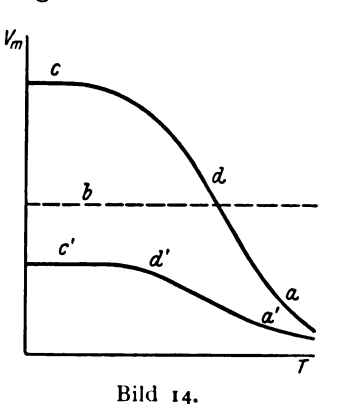


Bild 14.

Ob dem Isolator höhere Werte der Durchschlagspannungen bei stoßartiger oder dauernder Belastung zukommen, hängt sowohl vom Stoff selbst, als auch von der Temperatur und dem Grad der Homogenität des elektrischen Feldes ab. Sind die dielektrischen Verluste (Leitungswärme mit eingerechnet) groß, so entsprechen den Stoßspannungen höhere Werte als gewöhnlicher Gleich- oder Wechselspannung. Als ein Beispiel dafür kann Glas bei hohen Temperaturen dienen. Bei niedrigen Temperaturen wird ein an sich homogener Isolator bei Stoßspannungen ebenso hoch oder früher durchgeschlagen werden, als bei dauernder Belastung. Bei den inhomogenen Isolatoren werden die Verhältnisse komplizierter. Bei solchen Stoffen sind die der dauernden Belastung entsprechenden Werte bedeutend erniedrigt (Kurve a' d' c'). So kommt z. B. dem Porzellan im besten Fall eine Durchbruchfeldstärke von etwa 300 kV_{eff}/cm zu, dem Pertinax eine solche von 350 kV_{eff}/cm[1], dem mit Öl durchtränkten Kabelpapier etwa 400 kV_{eff}/cm, während bei Glas die Durchbruchfeldstärke bis zu 2200 kV_{eff}/cm anwachsen kann. Da die den Stoßspannungen entsprechenden Werte nicht unbedingt auch erniedrigt sein müssen, so kann es bei solchen inhomogenen Stoffen vorkommen, daß die den Stoßspannungen entsprechenden Werte am höchsten liegen (Gerade b). Dies ist auch tatsächlich von Grünwald für Pertinaxplatten[1], sowie von Peek[2] für eine Reihe von technischen Isolierstoffen beobachtet worden. Auch bei dem mit Öl durchtränkten Kabelpapier bekommt man bei den Stoßspannungen die höchsten Werte, wie es die in unserem Laboratorium von Herrn Dmitriev ausgeführten Messungen zeigen.

[1] Vgl. Grünwald, ETZ 1927, Heft 4.

Zusammenfassung.

1. Es wird der Einfluß untersucht, den das flüssige Medium, in welches der Prüfling eingebettet ist, auf die Werte der Durchschlagspannungen ausüben kann. Dabei stellt es sich heraus, daß:

a) Im inhomogenen elektrischen Felde bei schlecht leitendem Medium die den Wechsel- und Stoßspannungen entsprechenden Werte bedeutend niedriger liegen als bei Gleichspannung, wobei durch den Einfluß des Mediums eine Frequenzabhängigkeit vorgetäuscht werden kann.

b) Bei einem verhältnismäßig gut leitendem Medium alle Inhomogenitäten des elektrischen Feldes bedeutend geschwächt werden. In diesen Bedingungen kommen den Durchschlagspannungen bei Gleich- und Wechselspannungen von niedriger Frequenz ungefähr dieselben Werte zu. Bei Stoßspannungen von steilem Anstieg liegen auch hier die Durchschlagspannungen ziemlich niedrig.

2. Die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Schichtdicke bei Glas und Glimmer wird ausführlich untersucht. Die Messungen führen zu folgenden Resultaten:

a) Im homogenen elektrischen Feld wächst bei beliebiger Spannungsart die Durchschlagspannung der Schichtdicke proportional an. Bei Glas wird diese Regel ganz genau erfüllt, im Glimmer sind einige unbedeutende Abweichungen vorhanden.

b) Im inhomogenen elektrischen Felde wird die Abhängigkeit der Durchschlagspannung von der Schichtdicke durch das Potenzgesetz wiedergegeben.

3. Im inhomogenen elektrischen Felde ist in Glas bei den Stoßspannungen kein Temperaturgang der Durchschlagspannung vorhanden. Bei Wechselspannung ist er auch nur gering. Im homogenen elektrischen Felde dagegen läßt sich bei dauernder Belastung, schon bei den Zimmertemperaturen eine bedeutende Temperaturabhängigkeit merken.

4. Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß wir im inhomogenen elektrischen Felde bei Stoßspannungen mit einem rein elektrischen Durchschlage zu tun haben, während alle die im homogenen Polfeld bei dauernder Belastung beobachteten Gesetzmäßigkeiten ziemlich genau durch die wärmeelektrische Theorie von Rogowski erklärt werden können.

Dem Assistent-Direktor des Laboratoriums Herrn N. Semenoff sind wir für sein freundliches Entgegenkommen mit aufrichtigstem Dank verpflichtet.

Leningrad, Mai 1927. Physikalisch-Technisches Laboratorium.

[1] Grünwald, ebenda.
[2] Peek, Dielectric Phenomena in high voltage engeniring, 1915.



Drehzahl- und Phasenregelung von Asynchronmotoren mittels Frequenzumformer.

Von

G. Bolz.

I. Allgemeine Übersicht und Klassifizierung des zu betrachtenden Gebietes.

1. Geschichtlicher Überblick.

Jede Arbeitsmaschine, gleich welcher Art, schreibt bekanntlich ihrem Antriebsmotor bestimmte Bedingungen vor, welche im wesentlichen durch das Verhalten der Geschwindigkeit bei verschiedener Belastung gekennzeichnet werden. Man unterscheidet dementsprechend Motoren mit Haupt- und Nebenschlußcharakteristik.

Während der Hauptstrommotor nur für einige spezielle Antriebe auf Grund seiner stark abfallenden Geschwindigkeit bei Belastung geeignet erscheint, wie Bahn- und Hebezeugbetriebe, findet der Nebenschlußmotor für die größere Zahl von Arbeitsmaschinen, welche eine von der Belastung wenig abhängige Geschwindigkeit verlangen, eine ausgiebigere Verwendung.

Mit der stets fortschreitenden Entwicklung der einzelnen Industriezweige, mit den immer größer werdenden Anforderungen, welche die große Reihe von Arbeitsmaschinen, beispielsweise die verschiedenen Arten von Werkzeugmaschinen, die Textil- und Papiermaschinen, außerdem noch an eine feinstufige Regulierung der Geschwindigkeit stellten, trat das Bedürfnis nach solchen in weiten Grenzen verlustlos regelbaren Motoren immer mehr hervor.

Alle diese Forderungen erfüllte der Gleichstromnebenschlußmotor in befriedigender Weise, da bei ihm eine feinstufige und praktisch verlustlose Regelung durch Änderung des Feldstromes möglich war. Die einzige hierbei zu Anfang auftretende Schwierigkeit, bei starker Feldschwächung noch ein stabiles Arbeiten zu erreichen, lernte man an Hand eingehender theoretischer Untersuchungen durch geschickte Dimensionierung bald beherrschen[1].

Mit der fast allgemeinen Einführung des Drehstromes zur Speisung der Netze mußte man zunächst auf verschiedene der erwähnten Vorteile verzichten. Der Asynchronmotor, welcher auf Grund seiner einfachen Bauart und Bedienungsweise zum großen Teil die Einführung des Drehstromes veranlaßt hatte, war zwar in bezug auf seine Eigenschaften als Nebenschlußmotor den Anforderungen gewachsen, ermöglichte jedoch keine einfache verlustlose Regelung und zeigte ferner noch den Nachteil eines verhältnismäßig großen Blindstromverbrauches, wodurch die volle Ausnützung der elektrischen Kraftanlagen unmöglich gemacht wurde.

Die Schöpfer des Asynchronmotors hatten bereits die erwähnten Nachteile erkannt und die Mittel zur Abhilfe angegeben. Schon Görges und später Heyland zeigten, wie durch Einschalten eines Kollektors im Sekundärkreis die Phasenverschiebung des Primärstromes kompensiert werden kann. Auf den gleichen Grundgedanken aufbauend gab Osnos[2] einen praktisch vervollkommneten Motor zu demselben Zwecke an, der nach ihm als „Osnos-Motor" benannt ist. In diesen Untersuchungen waren, wenn auch noch nicht klar erkannt und hervortretend, die Grundgedanken zur verlustlosen Regelung der Drehzahl durch Bürstenverschiebung bereits enthalten, die allerdings erst etwa 12 Jahre später in dem läufergespeisten Drehstromnebenschlußmotor von Schrage praktisch verwirklicht wurden. Es sei noch erwähnt, daß neben Schrage, dem patentrechtlich die Erfindung zugeschrieben

[1] Vgl. Arnold und la Cour, Die Gleichstrommaschine Bd. I, Kap. 25.
[2] ETZ 1902, S. 919.



wird, auch Buff, Richter und Rüdenberg an der Entwicklung des läufergespeisten Drehstromnebenschlußmotors besonderen Anteil genommen haben.

Von Eichberg wurde bereis früher ein ständergespeister Motor angegeben[1], dessen Drehzahl durch stufenweise Änderung der dem Läufer aufgedrückten Spannung geregelt werden konnte. Dieser Motor ist schon eingehend in der Arnoldschen Literatur behandelt[2].

Der oben erwähnte läufergespeiste Drehstromnebenschlußmotor wurde von Schrage in einem Aufsatz der ETZ 1914 betrachtet[3]. Auf dem Boden der Arnoldschen Theorie sind dort die Kreisdiagramme für verschiedene Bürstenstellungen abgeleitet und an Hand von Meßresultaten die Übereinstimmung von Theorie und Versuch geprüft. Dieser Motor wird in Deutschland in einer den Siemens-Schuckert-Werken geschützten Ausführung mit doppeltem Bürstensatz gebaut und findet heute zum Antrieb von Werkzeugmaschinen, von Papier- und Textilmaschinen ausgiebig Verwendung.

Über die Theorie aller erwähnten Motoren findet sich Eingehendes in dem Buch von Schenkel über Wechselstrom-Kommutatormaschinen. In diesem Buch ist das ganze Gebiet der Ein- und Mehrphasenkommutatormaschinen behandelt. Es erübrigt sich daher, hier Näheres darüber zu sagen.

Zur Orientierung über das genauer zu behandelnde Gebiet geben wir zunächst einen allgemeinen Überblick und nehmen gleichzeitig die Grundgedanken heraus, welche wir später zur Entwicklung der Diagramme verwerten. Das charakteristische Merkmal der zu betrachtenden Maschinen und Maschinensätze besteht, wie bereits angedeutet, darin, daß dem sekundären Stromkreis durch einen Kommutator eine allgemein sowohl drehzahl- als phasenregelnde Spannung aufgedrückt wird. Diese Spannung kann nun entweder in einer und derselben Maschine durch ein einziges Drehfeld erzeugt werden, oder bei größeren Maschineneinheiten durch eine zweite Maschine geschaffen werden, die wir allgemein als Hintermaschine bezeichnen wollen. Wir können demnach 2 große Gruppen unterscheiden:

1. Maschinen mit gemeinsamer Erregung,
2. Maschinen mit getrennter Erregung.

Zur ersten Gruppe gehören die bereits angegebenen ständer- und läufergespeisten Drehstrom-Nebenschlußmotoren und deren Sonderfälle, der ständergespeiste Heyland-Motor und der läufergespeiste Osnos-Motor. Bei den beiden letzteren ist nur eine Änderung der Phase des Primärstromes beabsichtigt.

Diese Klasse von Maschinen soll aus bereits genannten Gründen nicht mehr ausführlich betrachtet werden; es sollen vielmehr nur diejenigen Merkmale herausgegriffen werden, welche zum besseren Verständnis der zweiten Gruppe notwendig sind. Die Kollektorwicklung des läufergespeisten Drehstrom-Nebenschlußmotors arbeitet in ähnlicher Weise wie der später betrachtete, kompensierte Frequenzwandler, der gleichfalls vom Läufer aus erregt wird. Dieser Motor wird im folgenden Abschnitt etwas näher betrachtet.

2. Der läufergespeiste Drehstrom-Nebenschlußmotor.

Das Schaltbild dieses Motors in der bereits erwähnten Ausführung mit doppeltem Bürstensatz zeigt Bild 1. Beide Bürstenbolzen sind auf dem Kollektor beweglich; die Grenzstellung ist bei reiner Drehzahlregelung dadurch gegeben, daß die Verbindungslinie gleichphasiger Bürsten mit der Achse der zugehörigen Ständerwicklung zusammenfällt. In diesem Falle sind also die im Sekundärkreis auftretenden Spannungen gleichphasig, so daß eine senkrechte Komponente zur Phasenkompensierung nicht vorhanden ist.

[1] ETZ 1910, S. 749, 785, 794.
[2] Arnold, Die Wechselstromtechnik V_2 S. 67—162.
[3] ETZ 1914, S. 89.



Es sind nun 2 Hauptstellungen der Bürsten gegenüber der zugehörigen Ständerwicklung denkbar, wie aus Bild 2a und 3a zu ersehen ist. Im ersten Falle sind die Bürsten so gestellt, daß das beim Schalten auf das Netz entstehende Drehfeld in den beiden sekundären Wicklungen entgegengesetzte, im zweiten Fall gleichgerichtete Spannungen induziert. Die Durchströmungsrichtung der Kollektorwicklung ist also in bezug auf die im Ständer liegende sekundäre Arbeitswicklung im ersten Fall negativ, im zweiten Fall positiv unter Voraussetzung allerseits positiver (rechtsgängiger) Wicklungen.

Jede der drei Wicklungen erzeugt eine mit genügender Annäherung als sinusförmig anzunehmende Stromverteilung, da auch die dreiphasig gespeiste Kollektorwicklung mit Doppelbürstensatz in Durchmesserstellung durch eine gleichwertige Drehstromspulenwicklung in ihrer magnetischen Wirkung ersetzt werden kann[1]. Ferner wissen wir, daß zur Erzielung des größtmöglichen Drehmomentes von Mehrphasen-Kommutatormaschinen das Maximum des umlaufenden Drehfeldes mit dem größten Wert der in gleicher Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit umlaufenden Ströme zusammenfallen muß, eine Bedingung, die wir hier für die vorliegenden Betrachtungen mit genügender Annäherung als erfüllt ansehen können[2]. Da nun unter Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes die Durchflutung der primären Läuferwicklung entgegengesetzte Richtung hat als diejenige der Sekundärwicklung, und da ferner die relative Richtung der Durchflutung der an der Bohrung liegenden Kollektorwicklung in oben angegebener Weise durch die Bürstenstellung gegeben ist, so läßt sich für eine gewünschte Drehrichtung an Hand des Biot-Savartschen Gesetzes die relative Lage der drei umlaufenden Stromwellen gegen das Drehfeld in der in den Bildern 2b und 3b ersichtlichen Weise aufzeichnen. In Bild 2b und 3b ist Linkslauf des Motors, vom Kollektor aus gesehen, angenommen. Dabei ist zu beachten, daß der läufergespeiste Motor gegen sein Drehfeld läuft. Da die beim Einschalten entstehenden sekundären Ströme den Ständer im Sinne des Feldes mitzunehmen suchen, so bewegt sich, da der Ständer fest ist, der Läufer im umgekehrten Sinne, also gegen das Drehfeld.

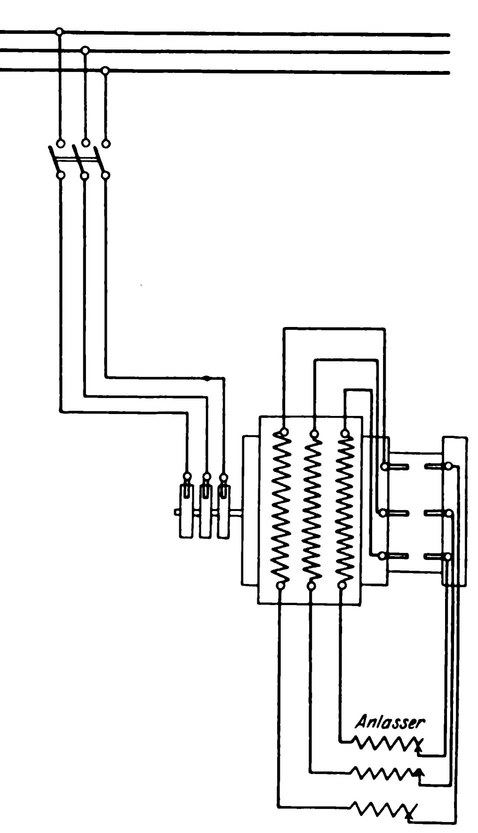
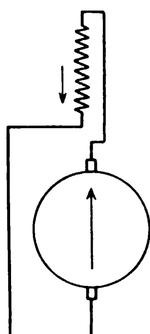


Bild 1.
Schaltbild eines Drehstromnebenschlußmotors.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse beim Einschalten in der ersten Hauptstellung der Bürsten nach Bild 2a. Es entsteht hierbei durch die Differenz zwischen der sekundären Stillstandspannung und der kleineren Kollektorspannung ein Strom, der zusammen mit dem von den Schleifringen aus erregten Drehfeld ein Drehmoment zustande bringt, welches den Motor entgegen der Richtung des Feldes in Drehung bringt. Nun bleibt, da das Drehfeld von den rotierenden Schleifringen

[1] Vgl. Richter, Ankerwicklungen, S. 166.
[2] Vgl. Schenkel, Kommutatormaschinen, S. 76.

aus erregt wird, die Geschwindigkeit zwischen den Läuferdrähten und dem Feld stets konstant; damit besitzt auch die an den Bürsten bei fester Bürstenstellung abgegriffene effektive Spannung einen konstanten Wert. Der Kommutator wirkt nur als Frequenzwandler, der die in den Läuferdrähten induzierte Spannung voller Frequenz durch die entgegen dem Drehfeld erfolgende mechanische Drehung auf Schlupffrequenz im Sekundärkreis kommutiert.



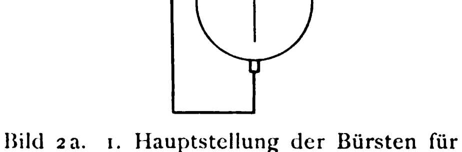


Bild 2a. 1. Hauptstellung der Bürsten für Untersynchronismus.

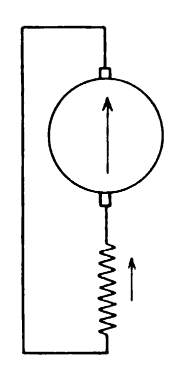


Bild 3a. 2. Hauptstellung der Bürsten für Übersynchronismus.

Während nun bei Bewegung des Läufers die Relativgeschwindigkeit des Feldes gegen den Raum abnimmt und damit die effektive Spannung der Sekundärwicklung kleiner wird, bleibt die Kollektorspannung konstant, und der Motor nimmt in der ersten Hauptstellung eine Drehzahl an, bei der im Leerlauf beide Spannungen sich gegenseitig aufheben. Damit kann durch verschiedene Kollektorspannungen im untersynchronen Bereich jede gewünschte Leerlaufdrehzahl eingestellt werden. Stehen beide Bürsten auf einer Lamelle, so wird dem Sekundärkreis keine Spannung aufgedrückt und der Motor läuft als gewöhnlicher schleifringgespeister Asynchronmotor.

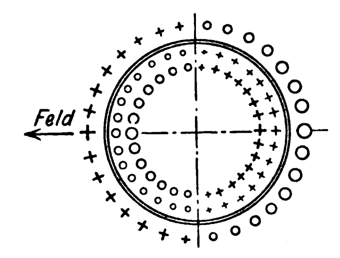


Bild 2b.
Stromverteilung bei Untersynchronismus.

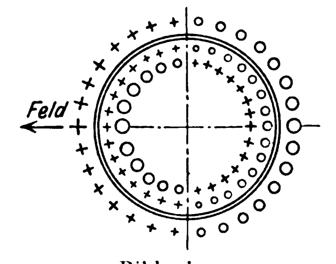


Bild 3b.
Stromverteilung bei Übersynchronismus.

Drehrichtung des Läufers von der Kollektorseite aus: links.
Bei Untersynchronismus: Stromverteilungen und Feld im Raum: rechts (mit Schlupffrequenz).
Bei Übersynchronismus: Stromverteilungen und Feld im Raum: links (mit Schlupffrequenz).

Wir betrachten nun, was eintritt, wenn der entsprechend der ersten Hauptstellung untersynchron leerlaufende Motor belastet wird. Die Drehzahl fällt wie beim Asynchronmotor etwas ab, die hierdurch größer werdende Schlupfspannung der Sekundärwicklung überwiegt und bringt einen ihr gleichphasigen Strom hervor, welcher zusammen mit dem Drehfeld ein Drehmoment zustande bringt. Die Sekundärwicklung gibt demnach die dem Schlupfbetrag entsprechende Drehfeldleistung an die Kollektorwicklung ab, deren Ströme mit dem Drehfeld ein zusätzliches motorisches Moment entwickeln, wodurch dem Netz die Schlupfenergie zurückgewonnen wird.

Wir stellen nun die Bürsten in die zweite Hauptstellung nach Bild 3a. Da hierbei beim Einschalten die Spannungen im Sekundärkreis sich addieren, läuft der Motor mit stärkerem Strome an als zuvor und findet untersynchron nirgends Gleichgewicht. Beim Durchgang durch den Synchronismus kehrt jetzt die Phase der sekundären Schlupfspannung mit der Umkehr der Relativrichtung des Drehfeldes im Raume um, während jedoch die relative Richtung der Kollektorspannung gleichbleibt. Denn denken wir uns das langsam mit Schlupffrequenz räumlich rotierende Feld einen Moment lang zwischen zwei Bürsten stehend, so ist es für die Richtung der Spannung zwischen zwei Bürsten ganz gleich, in welchem Sinne das bisher stehend gedachte Feld gegen die Bürsten im Raume sich dreht, da ja die relative Schnittrichtung zwischen Leiter und Drehfeld stets durch die volle Netzfrequenz gegeben ist. Beim Durchgang durch den Synchronismus ändert sich lediglich die Phasenfolge der Ströme an den Kollektorbürsten, damit die umlaufenden Ströme der Kollektorwicklung wiederum mit gleicher Relativgeschwindigkeit wie diejenigen der sekundären Wicklung im Raume rotieren. Der Motor findet also in dieser Bürstenstellung erst Gleichgewicht im übersynchronen Bereich, wenn die der Phase nach gegen den Stillstand geänderte Schlupfspannung der sekundären Wicklung der festen Kollektorspannung entgegengesetzt gleich ist. Bei Belastung fällt nun die Drehzahl wieder ab, der Motor nähert sich dem Synchronismus, die Schlupfspannung wird kleiner, die feste Kollektorspannung überwiegt, der Sekundärstrom erhält also gleiche Phase mit der Kollektorspannung. Die Kollektorwicklung gibt jetzt generatorisch die Schlupfleistung des Drehfeldes an die sekundäre Wicklung ab; der Motor wird von zwei Seiten gespeist, eine Erscheinung, welche wir später wieder vorfinden. Der Sinn der Übertragung der Schlupfleistung hat sich gegen früher geändert, die umlaufenden Ströme der Kollektor- und Sekundärwicklung haben jetzt wesentlich gleiche Richtung.

Aus dem Gesagten wollen wir zusammenfassend für den Fall des Stillstandes festhalten, daß bei Untersynchronismus die Spannungen des Sekundärkreises entgegen-, bei Übersynchronismus dagegen gleichgerichtet sind, und daß im Untersynchronismus die Kollektorwicklung motorisch die Schlupfleistung aufnimmt und diese im Übersynchronismus generatorisch abgibt. Diese Ergebnisse wollen wir bei den späteren Betrachtungen wieder verwenden.

II. Frequenzwandler ohne Ständerwicklung in Kupplung mit einem Asynchronmotor.

3. Aufbau und Schaltung der Maschinen.

Wir gehen jetzt dazu über die zweite Klasse von Maschinen genauer zu betrachten, bei welchen die drehzahl- und phasenregelnde Spannung in einer besonderen Maschine erzeugt wird.

Als Hintermaschine verwenden wir für diesen Fall zunächst den bereits von le Blanc vorgeschlagenen Frequenzwandler, den wir uns mit einem asynchronen Vordermotor starr gekuppelt denken. Das Grundschaltbild eines derartigen Maschinensatzes zeigt das Bild 4. Der Frequenzwandler erhält im Läufer nur eine einzige Wicklung, welche als geschlossene Gleichstromwicklung ausgeführt ist und auf der einen Seite an einen Kollektor angeschlossen wird. Die Wicklung ist an entsprechenden, um 120 elektrische Grade versetzten Stellen angezapft. Die Anzapfstellen werden zu drei Schleifringen geführt, welche gewöhnlich über einen Transformator ans Netz angeschlossen werden.

Beim Schalten auf das Netz entsteht im Frequenzwandler ein Drehfeld, dessen Amplitude unter Vernachlässigung des Wirkwiderstandes der Kollektorwicklung durch die Größe der an die Schleifringe gelegten Spannung gegeben ist. Damit der Frequenzwandler auf Schlupffrequenz kommutiert, muß die Schaltung so



getroffen werden, daß dieses Drehfeld entgegen der Drehrichtung des Maschinensatzes rotiert. Bei Synchronismus steht dann das Feld der Hintermaschine im Raume still, da es ja von den rotierenden Anzapfstellen der Wicklung aus ebensoweit zurückgetragen wird, als diese selbst sich in räumlich umgekehrter Richtung bewegen. Die Kollektorseite ist über drei im zweipoligen Schema um 120° versetzte Bürsten mit den Schleifringen des Vordermotors verbunden. Der Ständer bestehe vorläufig noch aus einem einfachen Eisenring zum Rückschluß der magnetischen Feldlinien. Offenbar hängt auch hier die Phase der dem Vordermotor aufgedrückten Kollektorspannung von der Einstellung der Bürsten ab, so daß wir durch Verdrehung der Bürsten jede gewünschte Phasenlage der Spannung der Hintermaschine erhalten können. Wir untersuchen im folgenden Abschnitt die Verhältnisse, die sich im Vordermotor ergeben, wenn wir einen nach Größe und Phase feste Spannung in den Läuferkreis des Hauptmotors einschalten.

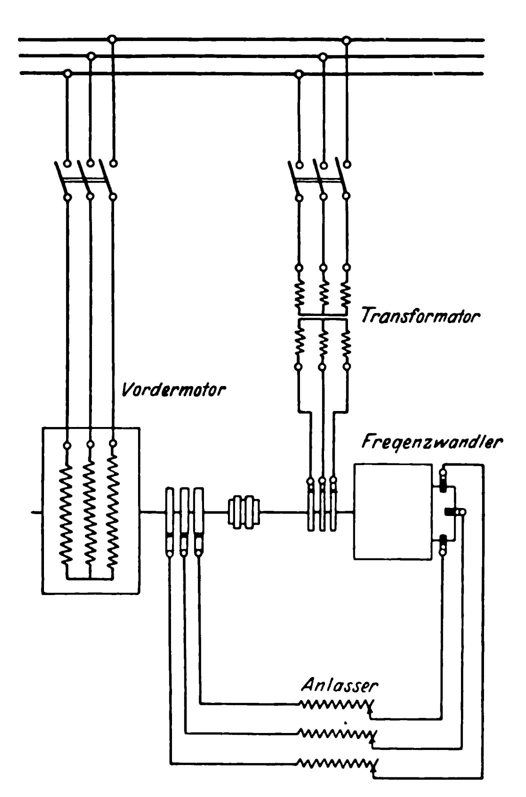


Bild 4. Asynchronmotor mit direkt gekuppeltem Frequenzwandler.

4. Diagramme unter Vernachlässigung der Streuung.

Wir vernachlässigen für die folgenden Betrachtungen vorläufig die Streuung des Vordermotors und schneiden aus den komplizierten Erscheinungen das Wesentliche heraus.

Wir stellen uns vor, daß das unter Vernachlässigung des Ständerwiderstandes durch die Ständerspannung vorgeschriebene, konstante Drehfeld in gleicher Stärke beide Wicklungen des Vordermotors durchdringt und bei beiderseits gleicher, in Reihe geschalteter Windungszahl bei Stillstand vollkommen gleiche Spannungen in beiden Wicklungen erzeugt. Unter diesen Voraussetzungen gilt das Diagramm des Bildes 5. Die Klemmenspannung des Netzes P_1 schreibt das Drehfeld Φ und den zu dessen Erzeugung notwendigen Magnetisierungsstrom J_m vor. Die in beiden Wicklungen erzeugte elektromotorische Kraft bleibt nun gegen das Drehfeld um 90° in der Phase zurück. Das Diagramm gilt auch dann noch, wenn der Motor sich dreht, nur ist die sekundäre elektromotorische Kraft E_{20} um den Betrag s der Schlüpfung kleiner geworden, während ihre relative Phase gegen die übrigen Größen des Diagramms geblieben ist. Denn da ja das Diagramm vom Raume aus aufgestellt ist und der Motor sich mit n-Umdrehungen pro Sekunde dreht, erscheint uns, vom Raume aus beobachtet, die sekundäre Schlupfspannung von gleicher Frequenz als die primäre Klemmenspannung. Der sekundäre Strom J_2 erhält nun mit der Schlupfspannung $E_{20} \cdot s$ gleiche Phase und es besteht im Läuferkreis die hier noch algebraisch zu lesende Gleichgewichtsbedingung:

$$E_{20} \cdot s + (-J_2 \cdot R) = 0, \tag{1}$$

worin R den Wirkwiderstand pro Phase des Läufers bedeutet. Die Phase des Primärstromes ergibt sich in bekannter Weise aus Leerlauf- und Sekundärstrom. Ist das Übersetzungsverhältnis nicht gleich 1, so müssen wir statt der Ströme selbst die Stromwindungen pro Pol betrachten.

Wir fragen jetzt, auf welchem Wege wir mit Hilfe unseres Frequenzwandlers die Phase des primären Stromes derart verändern können, daß der Strom mit der Netzspannung phasengleich wird. Offenbar müssen wir hierzu die Phase des Sekundärstromes durch eine von unserem Frequenzwandler erzeugte Spannung um den Winkel φ' gegen die Drehung der Zeitlinie herumdrehen. Soll hierbei eine Drehzahländerung des Satzes nicht auftreten, so muß diese Spannung auf der Schlupfspannung des Vordermotors senkrecht stehen, wie in Bild 6a gezeichnet ist. Man erkennt aus dem Diagramm des Bildes 6a, daß Phasengleichheit zwischen Primärstrom und Netzspannung eintritt, wenn man in den Sekundärkreis eine um 90° der Schlupfspannung zeitlich voreilende Spannung K einschaltet vom Betrage:



$$K = E_{20} \cdot s \cdot \mathrm{tg}\, \varphi', \qquad (2)$$

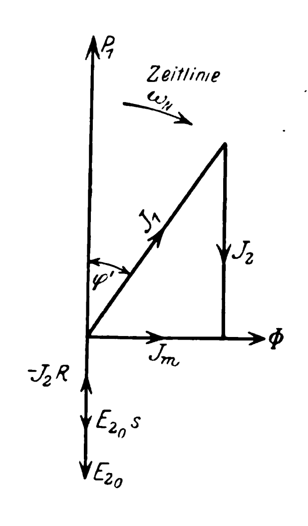


Bild 5.
Diagramm des Asynchronmotors unter Vernachlässigung der Streuung.

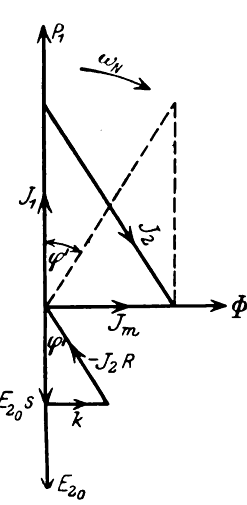


Bild 6a. Diagramm für $\cos\varphi = 1$.

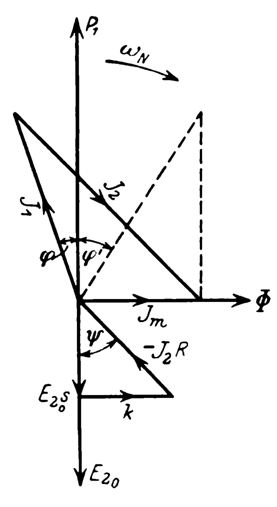


Bild 6b. Diagramm für Voreilung von J_1.

- - - - - - - vor der Kompensation.
———— nach der Kompensation.

wie aus dem Spannungsdreieck abzulesen ist. Die jetzt geometrisch zu lesende Gleichgewichtsbedingung der sekundären Spannungen lautet hier:

$$E_{20} \cdot s + K + (-J_2 \cdot R) = 0. \qquad (3)$$

Soll der Primärstrom auf einen der Netzspannung voreilenden Winkel φ verschoben werden, so ergibt sich in gleicher Weise nach dem Diagramm des Bildes 6b:

$$K = E_{20} \cdot s \cdot \mathrm{tg}\, \psi, \qquad (4)$$

worin ψ der Winkel zwischen Schlupfspannung des Läuferfeldes und Läuferstrom bedeutet. Die geringe Vergrößerung des Schlupfes infolge der Erhöhung des sekundären Wirkwiderstandes durch das Einschalten des Frequenzwandlers kann hierbei durch entsprechende Erhöhung des Schlupfes noch in Rechnung gestellt werden.

Diese oben aufgestellten beiden Beziehungen können mit praktisch genügender Genauigkeit zur Bestimmung der Spannung eines fremderregten Phasenschiebers benutzt werden, durch welchen die Phase des Primärstromes auf Phasengleichheit

[1] Vgl. Rüdenberg, E. K. u. B. S. 425 u. 469. Die Diagramme verwende ich zur Ermittlung der Beziehung zwischen der räumlichen Bürstenstellung und der Lage des Spannungsvektors K der Hintermaschine im Zeitdiagramm.

oder auf Voreilung mit der Netzspannung gebracht werden soll[1]. Die Gleichungen versagen jedoch im Fall einer reinen asynchronen Blindleistungsmaschine und werden später durch eine ebenso einfache Beziehung ersetzt, welche stets verwendbar ist.

Wir gehen nun nach dieser speziellen Betrachtung zur Lösung des allgemeinen Problems über, für eine beliebige Einstellung der Bürsten der Hintermaschine die Verhältnisse zu untersuchen. Die Phase der Schlupfspannung des Vordermotors gegen diejenige des Vektors K der Hintermaschine hängt offenbar von der gegenseitigen Lage der Anzapfstellen der beiden rotierenden Wicklungen und ferner von der Stellung der Bürsten ab. Durch Verdrehung der Anzapfstellen oder durch Verschieben der Bürsten kann damit jede gewünschte Phasenlage erhalten werden. Wir verändern zunächst die Bürsten der Hintermaschine, da hierdurch eine feinstufige und praktisch gut ausführbare Einstellung möglich ist[1].

Als Nullstellung der Bürstenbrücke soll diejenige Lage bezeichnet werden, in welcher der betrachtete Maschinensatz bei Leerlauf seine größte untersynchrone Drehzahl annimmt. In diesem Fall sind nach unseren früheren Überlegungen die Spannungen im Sekundärkreis bei Stillstand von entgegengesetzter Richtung, so daß das Aggregat auf eine solche Drehzahl hochlaufen wird, bei welcher die beiden Spannungen sich gegenseitig aufheben und der Strom im Sekundärkreis bei Leerlauf gleich Null geworden ist. Die Verhältnisse liegen also ähnlich wie früher bei dem läufergespeisten Drehstrom-Nebenschlußmotor, da wir auch hier zwei Hauptstellungen der Bürsten unterscheiden können. Bei Drehung der Bürsten um 180 elektrische Grade gegen die experimentell festgelegte Nullstellung strebt also der Maschinensatz seiner größten übersynchronen Leerlaufdrehzahl zu. Die Grenzdrehzahlen sind hier durch die einfache Beziehung:

$$E_{20} \cdot s = \pm K; \quad s = \pm \frac{K}{E_{20}} \tag{5}$$

gegeben, worin K die Kollektorspannung und E_{20} die Stillstandspannung des Vordermotors pro Phase bedeuten. s bedeutet hierin die Schlüpfung des Maschinensatzes gegen das Drehfeld des Vordermotors und zwar setzen wir s positiv bei untersynchronem Lauf des Satzes. Die Beziehung zwischen der Leerlaufdrehzahl und der Kollektorspannung der Hintermaschine ist also hier durch eine Gerade gegeben[2].

Da nun die sekundäre Schlupfspannung bei Leerlauf entgegengesetzte Phase besitzt wie die primäre Netzspannung, so fällt die von uns für den Spannungsvektor K der Hintermaschine gewählte Nullage im Zeitdiagramm mit der positiven Richtung der Netzspannung P_1 zusammen. Wir messen also die Phase der Kollektorspannung K gegen die Netzspannung durch den Winkel δ, welcher räumlich mit dem in elektrischen Graden gemessenen Verschiebungswinkel der Bürsten aus der gewählten Nullstellung identisch ist. Dabei fehlt uns noch die etwas schwierige Verbindung der räumlichen Bürstenverschiebung mit der Drehung des Vektors K im Zeitdiagramm. Wir haben nun früher erkannt, daß wir durch Einschaltung einer um 90^0 der Schlupfspannung des Vordermotors zeitlich voreilenden Kollektorspannung eine rein phasenkompensierende Wirkung erhalten, wodurch der Leistungsfaktor des Vordermotors verbessert wird. Stellen wir also die Bürsten gegen die genau festgelegte Nullage im Sinne der Drehung des Drehfeldes der Hintermaschine um 90 elektrische Grade voraus, also gegen die Drehrichtung des Satzes um 90^0 zurück, so kommen wir von dem Gebiet untersynchroner Drehzahlregelung ($\delta = 0$) auf reine Phasenkompensierung und durch Weiterdrehen im selben Sinn in das Gebiet der übersynchronen Drehzahlregelung ($\delta = \pi$). Bei einer Stellung der Bürsten entsprechend 270 elektrischen Graden haben wir reine Gegenkompensation, also

[1] Bei der in Abschnitt 9 besprochenen kompensierten Hintermaschine wird die richtige Phase mittels einer verstellbaren Kupplung eingestellt.

[2] Vgl. Schenkel, S. 212.



eine Anordnung, welche im Netz vorhandene überschüssige Blindleistung aufzunehmen imstande ist und zur Spannungshaltung des Netzes bei stark voreilender Belastung dienen kann. Bei weiterer Verschiebung der Bürsten erreichen wir wieder das Gebiet der untersynchronen Drehzahlregelung, bis wir bei $\delta = 2\pi$ die gleichen Verhältnisse vorfinden, als zu Anfang bei $\delta = 0$. Damit sind die Grundlagen geschaffen, auf denen wir die im folgenden Abschnitt gegebene Ableitung der Ortsdiagramme für beliebige Stellung der Bürsten aufbauen können.

5. Ableitung der allgemeinen Ortsdiagramme.

Durch die im vorigen Abschnitt angestellten Betrachtungen am streuungslosen Vordermotor haben wir aus den ganzen Erscheinungen das Wesentliche herausgeschnitten. Während wir dort bei den einfacheren Vorgängen gleich mit dem aus der gemeinsamen Wirkung der Ständer- und Läuferdurchflutung resultierenden Drehfeld gerechnet haben, greifen wir jetzt bei den schwierigeren Problemen, bei denen wir auch die Streuung berücksichtigen müssen, auf die Komponenten zurück und rechnen auch teilweise mit fiktiven Feldern, die durch die Einzelwellen des Primär- und Sekundärstromes erzeugt werden.

Die vorliegende Aufgabe der Ermittlung der Kreisdiagramme für verschiedene Bürstenstellungen ist in anderer Weise auch von Th. Schmitz behandelt worden[1]. Bei Aufstellung der in diesem Abschnitt angegebenen Beziehungen zu Anfang 1924 waren mir die Ergebnisse von Schmitz nicht bekannt. Der genannte Verfasser hat erst in seinem zweiten Aufsatz über den Osnosmotor den Wert für den Durchmesser des Mittelpunktskreises angegeben. Die Einführung der fiktiven Felder habe ich von Thomälen übernommen, der auf diesem Weg eine Parametergleichung für die Mittelpunktskoordinaten gewonnen hat, wie später ersichtlich wird.

Wir vernachlässigen allerseits den Wirkwiderstand derjenigen Wicklungen, welche direkt am Netz liegen. Damit sind die magnetischen Felder, welche mit diesen Wicklungen verkettet sind, bei allen Belastungen gleich groß und durch die angelegten Spannungen gegeben. Eine Einführung des Ständerwiderstandes würde das Problem wesentlich komplizieren und die Durchsicht erschweren. Diese Aufgabe ist unter Berücksichtigung des Ständerwiderstandes des Vordermotors auch von Dreyfus behandelt worden[2]. Der Fehler, den wir durch diese Vernachlässigung begehen, ist jedoch nicht bedeutend. Außerdem gewinnen hierdurch unsere Überlegungen wesentlich an Durchsicht und Klarheit und führen zu einem sehr einfachen Schlußergebnis. Auch Schrage hat in seiner bereits erwähnten Arbeit über den läufergespeisten Drehstrom-Nebenschlußmotor den Widerstand der Primärwicklung berücksichtigt und dabei eine leider für die Praxis nur sehr schwer verwendbare Schlußformel erhalten.

Ferner rechnen wir sowohl im Vordermotor als in der Hintermaschine mit sinusförmigen Stromverteilungen. Wir verweisen in diesem Punkt auf den Aufsatz von Schenkel[3] über die Streuungsberechnung von Wechselstrommaschinen, in welchem gezeigt wurde, wie man die wirklich vorhandenen Drehfelder im Vordermotor durch gleichwertige sinusförmige Drehfelder ersetzen kann. In dem mehrfach erwähnten Buch über Kommutatormaschinen hat Schenkel ferner den Beweis geliefert, daß auch mit gleicher Berechtigung wie bei normaler Drehstromspulenwicklung das Feld einer dreiphasig gespeisten Kollektorwicklung mit genügender Annäherung durch ein Sinusfeld ersetzt werden kann[4].

[1] Vgl. hierzu die Aufsätze von Schmitz, Elektrotechnik und Maschinenbau 1923, S. 744 und E. u. M. 1924, S. 601.

[2] Vgl. Arch. f. Elektrot. 1924, S. 507 - 520.

[3] Vgl. Elektrotechnik und Maschinenbau 1909, S. 201.

[4] Vgl. S. 67—68.



Streng genommen müßten wir ja eigentlich auf eine Analyse dieser Felder durch Zerlegung der entsprechenden Wechselfelder der drei Phasen in invers- und gleichlaufende Drehfelder eingehen und dabei für die erste Annäherung überall die Grundwellen herausschälen. Die erste Betrachtungsweise nach der von Schenkel angegebenen Methode wollen wir jedoch der Einfachheit halber hier vorziehen. Es sei hier noch erwähnt, daß auch Rüdenberg in seinem Buch über Schaltvorgänge[1] nachdrücklich hervorhebt, daß eine harmonische Analyse in vielen Fällen keinen tieferen Einblick in die physikalische Erkenntnis vermittelt. Die Sättigung des Eisens wollen wir vorläufig ganz außer Betracht lassen. Wir setzen also auch die fiktiven Felder und Spannungen den erzeugenden Strömen proportional. Es wird sich am Schluß ergeben, daß ein Fehler durch diese Annahme in das Endergebnis nicht hereinkommt. Die Streuung des Vordermotors betrachten wir als eine durch einfache Messung zu bestimmende Größe und sehen mit Heyland, Ossanna, Petersen und Thomälen von einer rechnerischen Erfassung in der üblichen Weise durch Bestimmung der Nuten- und Stirnstreufelder für die folgenden Überlegungen vollständig ab. Wir schließen uns in den jetzigen Betrachtungen in der Hauptsache den Anschauungen Thomälens an, nach welchen die Streuung bestimmt wird als relativer Verlust an Flußverkettung durch die sogenannten Streufaktoren[2]. Allerdings sind, wie Thomälen auch angegeben hat, diese Streufaktoren infolge der Sättigung der Zahnstege von der Belastung etwas abhängig, wodurch strenggenommen schon die Gültigkeit des Heylanddiagrammes beeinträchtigt wird. Dieser Umstand ist jedoch für unsere folgenden Betrachtungen nicht von besonderer Wichtigkeit, da wir bei den weiteren Überlegungen nur den primären Streufaktor benötigen, so daß also der Fehler sich nicht vergrößert. Ferner schreiben wir auch dem sekundären Streufluß wesentlich gleiche Phase mit dem Primärstrom zu, indem wir den Vordermotor auffassen als allgemeinen Transformator und dessen elektrische und magnetische Verhältnisse auf die bekannte Ersatzschaltung zurückführen[3]. Unter Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes geht diese Ersatzschaltung einfach in eine Reihenschaltung der primären und sekundären Wicklungen über, wie später in Abschnitt 7 noch etwas näher gezeigt wird.

Wir betrachten jetzt den Vordermotor bei einer beliebigen Belastung, bei welcher unter dem Einfluß der Hintermaschine das Aggregat die Schlüpfung $+ s$ gegen das Drehfeld des Hauptmotors besitzen soll. In der Hintermaschine liegt die Läuferwicklung über die Schleifringe am Netz und erregt ein konstantes Drehfeld, welches gegen die Läuferdrähte mit voller, gegen den Raum mit Schlupffrequenz sich bewegt, entgegen der Drehung des ganzen Satzes. Wir zeichnen das Spannungsdiagramm für den Primär- und Sekundärkreis des Vordermotors bei gegebener Belastung, bei welcher im Primärkreis der Strom J_1, im Sekundärkreis der Strom J_2 auftritt. Es seien L_1 und L_2 die auf der Gesamtwirkung aller drei Stränge beruhenden Selbstinduktivitäten der primären bzw. sekundären Wicklungen und ebenso M im gleichen Sinne die Gegeninduktivität, welche in einfacher Weise aus den beiden Selbstinduktivitäten und den gemessenen Streufaktoren berechnet werden kann[4]. Auf welchem Wege die Selbstinduktivitäten der beiden Wicklungen berechnet werden können, wurde bereits von Görges gezeigt[5]. Eine derartige Berechnung brauchen wir jedoch nicht auszuführen, da wir diese Größen später durch das Übersetzungsverhältnis und die Streufaktoren ausdrücken werden.

Die Gleichgewichtsbedingung der elektromotorischen Kräfte in der Ständerwicklung verlangt, daß die im Ständer selbstinduzierte, fiktive elektromotorische

[1] Vgl. S. 314.
[2] Vgl. Thomälens Lehrbuch, 9. Aufl., S. 322—323.
[3] Vgl. Fränckel, Theorie der Wechselströme, S. 172—176.
[4] Vgl. Thomälen, S. 314, 9. Aufl.
[5] Vgl. ETZ 1907, S. 1.

Kraft vom Betrage $J_1 L_1 \omega$ mit der vom Läuferfeld im Ständer erzeugten fiktiven EMK vom Betrage $J_2 M \omega$ und der Netzspannung P_1 zusammen die geometrische Summe Null ergeben muß. Also lautet die Bedingung im Ständerkreis:

$$J_1 L_1 \omega + J_2 M \omega + P_1 = 0. \qquad (6)$$

In gleicher Weise erzeugt der Läuferstrom selbst in der Läuferwicklung eine fiktive EMK der Selbstinduktion vom Betrage $J_2 L_2 \omega \cdot s$ und ebenso erzeugt die relativ zum Läufer mit Schlupffrequenz umlaufende Ständerstromwelle im Läufer

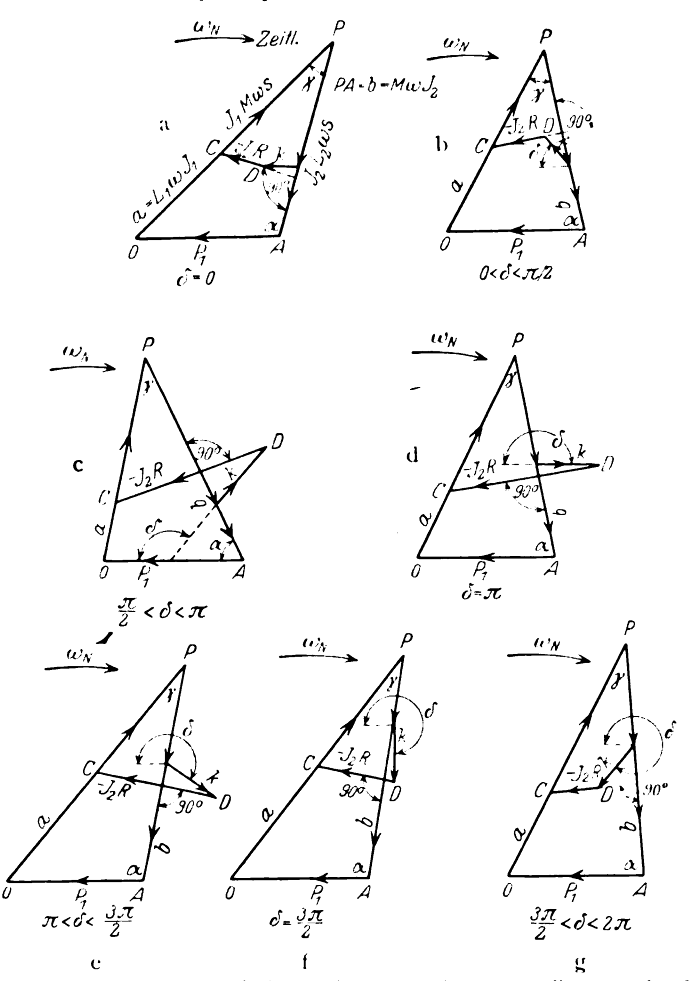


Bild 7a bis 7g. Spannungsdiagramme bei verschiedenen Bürstenstellungen der Hintermaschine.

eine fiktive EMK der gegenseitigen Induktion vom Betrage $J_1 M \omega \cdot s$. Zu diesen beiden elektromotorischen Kräften addiert sich geometrisch die der Größe nach feste, der Phase nach durch die Bürstenstellung gegebene Kollektorspannung K der Hintermaschine und alle drei EMKe ergeben mit $-I_2 \cdot R$ im Läuferkreis die Summe Null. Die Gleichgewichtsbedingung lautet also hier geometrisch:

$$J_2 L_2 \omega \cdot s + J_1 M \omega \cdot s + K + (-I_2 \cdot R) = 0. \qquad (7)$$

Dabei ist zu beachten, was bereits früher erwähnt, daß das Diagramm vom Ständer des Vordermotors aus aufgestellt wird, wobei wir auf das an Hand von Bild 5 Gesagte verweisen.

Die Spannungsdiagramme der Bilder 7a bis 7g enthalten nun sämtliche in diesem Abschnitt gewonnenen Ergebnisse. Dieselben sind nach dem Gesagten ohne weiteres verständlich und unterscheiden sich von dem in dieser Weise gezeichneten

Spannungsdiagramm des normalen Asynchronmotors nur dadurch, daß im Läuferkreis noch die Kollektorspannung K hinzutritt[1]. Sie gelten für einen beliebigen Belastungspunkt, und wir können jetzt die Frage beantworten, welchen geometrischen Ort der Punkt P des primären Spannungsdreiecks bei fester Bürstenstellung beschreibt, wenn der betrachtete Maschinensatz mit veränderlichem Drehmoment belastet wird.

Diese Aufgabe ist bereits von Thomälen gelöst worden in dem Kapitel über den fremderregten Phasenschieber. Der Wert der dortigen Ergebnisse wurde weder von Thomälen selbst noch von anderen richtig erkannt. Es soll im folgenden, um zu zeigen, wie weit Thomälen das vorliegende Problem gelöst hat, eine Abschrift der wenigen einschlägigen Zeilen seines Lehrbuches wiedergegeben werden[2].

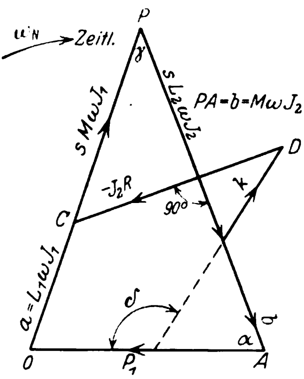


Bild 8. Spannungsbild zur Ableitung der Kreisdiagramme.

Die Überlegungen beziehen sich auf eine übersynchrone Bürstenstellung, wovon allerdings nichts erwähnt ist. Es wurde der Deutlichkeit halber das diesbezügliche Bild 7c nochmals als Bild 8 zur Ableitung des Kreisdiagrammes getrennt herausgezeichnet.

Im Spannungsbild ist die Spannung $CD = J_2 \cdot R$ im Läuferkreis, wie gezeichnet, die Summe aus den drei erzeugten Spannungen:

$$s \cdot M \omega J_1, \quad s \cdot L_2 \omega J_2 \text{ und } K.$$

Dabei ist der Winkel δ durch die Einstellung der Bürsten auf dem Stromwender willkürlich (!) gegeben. Wir erhalten dann nach Bild 8

$$s \cdot L_2 \omega J_2 - s \cdot M \omega J_1 \cdot \cos \gamma = K \cdot \cos(\delta - \alpha)$$
$$s \cdot M \omega J_1 \cdot \sin \gamma = J_2 \cdot R - K \cdot \sin(\delta - \alpha).$$

Wir setzen:

$$J_1 = \frac{a}{L_1 \omega} \text{ und } J_2 = \frac{b}{M \omega},$$

sowie

$$a \cdot \cos \gamma = b - P_1 \cdot \cos \alpha$$

und

$$a \cdot \sin \gamma = P_1 \cdot \sin \alpha.$$

Dann teilen wir obige beide Gleichungen durcheinander, wodurch s herausfällt, und setzen noch zur Abkürzung $\frac{L_1 L_2}{M^2} = m$[3]. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{b(m-1) + P_1 \cdot \cos \alpha}{P_1 \cdot \sin \alpha} = \frac{K \cdot \cos(\delta - \alpha)}{\frac{bR}{M \omega} - K \cdot \sin(\delta - \alpha)}.$$

Wir vervielfachen übers Kreuz und setzen:

$$\sin \alpha \cdot \cos(\delta - \alpha) + \cos \alpha \cdot \sin(\delta - \alpha) = \sin(\alpha + \delta - \alpha) = \sin \delta.$$

Wir setzen dann noch:

$$\sin(\delta - \alpha) = \sin \delta \cdot \cos \alpha - \cos \delta \cdot \sin \alpha,$$

[1] Vgl. Thomälen, 9. Aufl., S. 314.

[2] Vgl. Thomälen, 9. Aufl., S. 368—369.

[3] Obiger Wert m ist durch die Beziehung $\frac{L_1 L_2}{M^2} = \frac{1}{\eta_1 \cdot \eta_2}$ mit den Streufaktoren verknüpft. Vgl. Thomälen, 8. Aufl., S. 400, Gleichung (13); Die Streufaktoren η_1 und η_2 stehen mit den Heylandschen Streukoeffizienten τ_1 und τ_2 in folgendem Zusammenhang:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \tau_1}; \quad \eta_2 = \frac{1}{1 + \tau_2};$$

Vgl. Thomälen, 8. Aufl., S. 398, Zeile 4—5.

führen die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems ein, und zwar rechnen wir positive x von A nach links, positive y von A nach oben. Dadurch wird

$$b^2 = x^2 + y^2, \quad b \cdot \cos\alpha = x, \quad b \cdot \sin\alpha = y.$$

Wir erhalten schließlich für die Koordinaten des Punktes P folgende Gleichung:

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{K \cdot \sin\delta \cdot M\omega}{R} - \frac{P_1}{m-1}\right) + \frac{y \cdot K \cdot \cos\delta \cdot M\omega}{R} = \frac{P_1 \cdot K \cdot \sin\delta \cdot M\omega}{R(m-1)}. \quad (8)$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises. Die Wagerechte und Senkrechte des Mittelpunktes ergeben sich zu:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{K \cdot \sin\delta \cdot M\omega}{R} - \frac{P_1}{m-1}\right); \quad q = -\frac{1}{2} \cdot \frac{K \cdot \cos\delta \cdot M\omega}{R}. \quad (9)$$

Setzen wir in der Kreisgleichung $y = 0$, so erhalten wir $x = \frac{P_1}{m-1}$*. Dies bedeutet, daß der Kreis durch den Endpunkt des Durchmessers ohne Phasenschieber durchgeht. Teilen wir alle Strecken durch $L_1\omega$, so erhalten wir das Strombild für Fremderregung.

Hier blieb Thomälen stehen, indem er die von ihm gefundene Beziehung für die Mittelpunktskoordinaten nur für den Fall des fremderregten Phasenschiebers verwendete, bei dem nach unseren früheren Überlegungen der Winkel $\delta = \frac{\pi}{2}$ beträgt. Dies ist um so merkwürdiger, als gerade 2 Seiten vorher der Frequenzwandler in Kupplung mit einem asynchronen Vordermotor zur verlustlosen Drehzahlregelung betrachtet wird. Von den hier aufgefundenen wichtigen Beziehungen wurde sonderbarerweise dort nichts erwähnt.

Wir liefern im folgenden noch den einfachen Beweis, daß der Kreis für jede beliebige Stellung der Bürsten durch den ideellen Kurzschlußpunkt des Heylandkreises hindurchgeht.

Setzen wir in der von Thomälen abgeleiteten Kreisgleichung $y = 0$, so ergibt sich für x eine quadratische Gleichung, welche lautet:

$$x^2 - x\left(\frac{K \cdot \sin\delta \cdot M\omega}{R} - \frac{P_1}{m-1}\right) - \frac{P_1 \cdot K \cdot \sin\delta \cdot M\omega}{R(m-1)} = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{K \cdot M \cdot \omega \cdot \sin\delta}{R} = a \quad \text{und} \quad \frac{P_1}{m-1} = b.$$

Dann geht obige Gleichung über in:

$$x^2 - x(a-b) - a \cdot b = 0.$$

Die Lösung lautet:

$$x = +\frac{a-b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}{4}}$$

$$= \frac{a-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$x = +\frac{a-b}{2} \pm \frac{a+b}{2}$$

$$x_1 = \frac{a-b+a+b}{2} = +a$$

$$x_2 = \frac{a-b-a-b}{2} = -b!$$

* Hier ist ein Vorzeichenfehler bei Thomälen, denn es muß heißen:

$$x = -\frac{P_1}{m-1}.$$

Die erste Wurzel ergibt den Ausdruck: $a = \frac{K \cdot M \omega \sin \delta}{R}$, hängt also vom Bürstenverschiebungswinkel ab und soll hier nicht weiter diskutiert werden.

Als zweite Wurzel erhalten wir: $x_2 = -b = -\frac{P_1}{m - 1}$. Dabei sind die Strecken vorläufig noch im Spannungsmaßstab gemessen. Wir gehen zum Strommaßstab über, indem wir durch $L_1 \omega$ teilen. Dann wird die zweite Wurzel im Strommaßstab:

$$x_2 = -\frac{P_1}{(m - 1) L_1 \omega}.$$

Dabei ist $\frac{P_1}{L_1 \omega} = J_m$ der Leerstrom zur Erzeugung des wirklichen Ständerfeldes. Demnach wird: $x_2 = -\frac{J_m}{m - 1}$.

Ferner verwenden wir die beiden aus der Theorie des normalen Induktionsmotors bekannten Beziehungen:

$$\frac{J_\infty - J_m}{J_\infty} = \eta_1 \cdot \tau_2, \quad \frac{J_m}{J_\infty} = 1 - \tau_1 \cdot \tau_2 \text{*}.$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = -\frac{J_m}{m - 1} = -\frac{J_m}{\frac{1}{\tau_1 \cdot \eta_2} - 1} = -\frac{J_m}{\frac{1 - \eta_1 \cdot \tau_2}{\eta_1 \cdot \tau_2}}$$

$$= -\frac{J_m \cdot \eta_1 \cdot \tau_2}{1 - \tau_1 \cdot \tau_2} = -\frac{J_m \cdot (J_\infty - J_m) \cdot J_\infty}{J_m \cdot J_\infty} = -(J_\infty - J_m).$$

Damit ist der Beweis geliefert, daß sämtliche Kreise für jede beliebige Bürstenstellung durch den ideellen Kurzschlußpunkt des Heylandkreises hindurchgehen.

Wir fragen jetzt weiter, welchen geometrischen Ort der Mittelpunkt des oben von Thomälen gefundenen Kreises bei beliebiger Bürstenstellung beschreibt. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind bereits in Gleichung (9) als Funktion des Parameters δ ausgedrückt. Im folgenden wird nun der Parameter δ eliminiert und eine Beziehung zwischen p und q aufgesucht.

Wir hatten dort:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{K \cdot M \omega}{R} \sin \delta - \frac{P_1}{m - 1}\right)$$

$$q = -\frac{1}{2} \cdot \frac{K \cdot M \omega}{R} \cos \delta.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{K \cdot M \omega}{R} = C \text{ und ebenso } \frac{P_1}{m - 1} = b$$

wie früher, so ergibt sich:

$$p = \frac{1}{2}(c \cdot \sin \delta - b)$$

$$q = -\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos \delta.$$

Aus der ersten Gleichung rechnet sich:

$$\sin \delta = \frac{2p + b}{c}, \quad \cos \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{2p + b}{c}\right)^2}.$$

* Vgl. Thomälen, 9. Aufl., S. 313, Gleichung (14).

In die zweite Gleichung oben eingesetzt, ergibt:

$$q = -\frac{1}{2}\cdot c\sqrt{1-\left(\frac{2p+b}{c}\right)^2}$$

quadriert:

$$q^2 = \frac{1}{4}\cdot c^2\left\{1-\left(\frac{2p+b}{c}\right)^2\right\}$$

$$q^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4}\cdot\frac{4p^2+4bp+b^2}{c^2}$$

$$q^2 = \frac{c^2}{4} - p^2 - bp - \frac{b^2}{4}$$

$$p^2+q^2+bp+\frac{b^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\left(p+\frac{b}{2}\right)^2 + q^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Der geometrische Ort aller Kreismittelpunkte für sämtliche Bürstenstellungen durchläuft also einen Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten

$$p' = -\frac{b}{2} = -\frac{P_1}{2(m-1)};\quad q' = 0$$

im Spannungsmaßstab, oder im Strommaßstab:

$$\left.\begin{aligned} p' &= -\frac{P_1}{2(m-1)L_1\omega} = \frac{-(J_\infty - J_m)}{2} \\ q' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Also fällt der Mittelpunkt dieses neuen Kreises mit dem des Heylandkreises zusammen. Der Durchmesser d dieses Kreises ergibt sich zu:

$$d = \frac{K\cdot M\omega}{R}$$

im Spannungsmaßstab, oder im Strommaßstab:

$$d = \frac{K\cdot M\omega}{R\cdot L_1\omega} = \frac{K}{R}\cdot\frac{M}{L_1}.$$

Darin bedeutet K die Kollektorsternspannung. Da das Diagramm ja für eine Phase gilt, müssen wir bei der gewöhnlich vorhandenen Sternschaltung der Wicklungen des Vordermotors auch die Wicklung der Kollektorhintermaschine durch eine äquivalente Sternschaltung ersetzen. R stellt den Wirkwiderstand der Läuferwicklung je Phase dar, wobei der Widerstand für den betriebswarmen Zustand zu berechnen ist.

Ferner gilt noch die leicht einzusehende Beziehung:

$$\frac{M}{L_1} = \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\eta_1{}^*, \qquad (11)$$

worin Z_1 bzw. Z_2 die primäre bzw. sekundäre in Reihe geschaltete Drahtzahl je Phase bedeuten.

Diese Beziehung oben eingesetzt, ergibt:

$$d = \frac{K}{R}\cdot\frac{Z_2}{Z_1}\cdot\eta_1, \qquad (12)$$

gemessen in Ampere.

Bezeichnen wir noch:

$\frac{Z_2}{Z_1}\cdot\eta_1$ mit ü, so können wir dieses Übersetzungsverhältnis sehr leicht durch einen einfachen Stillstandversuch bei offenem Läufer messen aus der Beziehung:

* Siehe Thomälen, S. 314, 9. Aufl.

$$ü = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \eta_1 = \frac{P_2}{P_1}.$$

Damit sind wir am Ziel und erhalten demnach am Schluß ein ungemein einfaches und leicht verwertbares Ergebnis. An Hand des zuletzt aufgefundenen Kreises, den wir zu Ehren des Schöpfers der originellen Grundideen als Thomälenkreis bezeichnen wollen, können wir die Verhältnisse vollständig und rasch übersehen.

Wir wollen jetzt im folgenden Abschnitt etwas näher untersuchen, in welcher Weise das bisher betrachtete Maschinenaggregat zur Drehzahl- und Phasenregelung Verwendung finden kann.

6. Drehzahl- und Phasenregelung mittels Stufentransformator.

An Hand des im vorigen Abschnitt aufgefundenen Thomälenkreises sind wir nun in der Lage für jede beliebige Stellung der Bürsten das Diagramm des Maschinensatzes aufzuzeichnen. Dabei ist bei der Ableitung die Sättigung des Eisens vollständig herausgefallen, da durch den Übergang zum Stromdiagramm der Quotient $\frac{M}{L_1}$ sich ergab, bei dem sowohl im Zähler als auch im Nenner die Eisensättigung annähernd gleichmäßig enthalten ist. Ferner muß noch betont werden, daß die von uns verwendeten Ausgangsgleichungen sich bereits in der achten Auflage des Thomälenschen Lehrbuches vorfinden. Thomälen hat also die Grundlagen zur allgemeinen Lösung des Problems bereits vor einer längeren Reihe von Jahren gegeben.

Bei allen bisherigen Überlegungen haben wir angenommen, daß der Vektor K konstant sein soll und daß seine Phasenlage im Diagramm durch die Einstellung der Bürsten gegeben sei. Dies bedeutet, daß die Streuung des Erregertransformators gleich Null gesetzt wird, so daß die auf die Primärseite des Transformators reduzierte sekundäre Klemmenspannung stets der primären Netzspannung gleich ist. Wir werden im nächsten Abschnitt etwas näher den Einfluß der Streuung des Erregertransformators untersuchen. Vorläufig soll für die folgenden Betrachtungen die Streuung noch vernachlässigt werden.

In welcher Weise das bisher besprochene Maschinenaggregat zur Drehzahl- und Phasenregelung Verwendung finden kann, hat Schenkel ausführlich gezeigt. Es soll daher auf die diesbezüglichen Seiten verwiesen werden[1]. Wir beschränken uns hier darauf die im vorigen Abschnitt gewonnenen Ergebnisse etwas näher zu diskutieren.

Es muß noch festgestellt werden, wie der Frequenzwandler die elektrische Leistung umsetzt und auf welchem Wege bei Drehzahlregelung des Satzes die Schlupfleistung zurückgewonnen wird. Bei Belastung wirkt der Frequenzwandler wie ein Transformator, indem von den Schleifringen dem Netz ein Strom entnommen wird, welcher bis auf den geringen Leerstrom die magnetische Wirkung der über den Kollektor eingeleiteten Läuferströme wieder aufhebt. Eine Drehmomentbildung kommt dabei nicht zustande; eine derartige Hintermaschine kann sich also nicht aktiv an der Leistungsführung beteiligen[2]. Der Frequenzwandler stellt somit lediglich einen Durchgangsapparat für elektrische Energien verschiedener Frequenzen dar.

Es sollen jetzt an Hand von Bild 9 für verschiedene Bürstenstellungen die Verhältnisse untersucht werden. Die Bürsten werden zunächst auf $\delta = 0$, d. h. größte untersynchrone Drehzahlregelung, eingestellt. Der Spannungsvektor K der Hintermaschine fällt mit der Richtung der Netzspannung zusammen, der Winkel

[1] Vgl. das mehrfach genannte Buch S. 216–220.

[2] Vgl. Schenkel S. 213.



zwischen dem Läuferstrom J_2 und dem Vektor K ist stumpf, die Leistung der Kollektorseite also negativ. Der Frequenzwandler nimmt demnach elektrisch die Schlupfleistung des Vordermotors auf und gibt dieselbe schleifringseitig über den Erregertransformator an das Netz zurück. Die Verhältnisse liegen hier etwas anders als bei dem läufergespeisten Drehstrom-Nebenschlußmotor, da die Hintermaschine, welcher dort die Kollektorwicklung entspricht, kein Drehmoment ausübt. Jedoch ergeben sich, ebenso wie dort, für Leistungsfaktor und Kippmoment ziemlich ungünstige Werte. Durch Bürstenverschiebung aus der gewählten Nullstellung gegen die Drehung des Maschinensatzes können jene Faktoren noch verbessert werden.

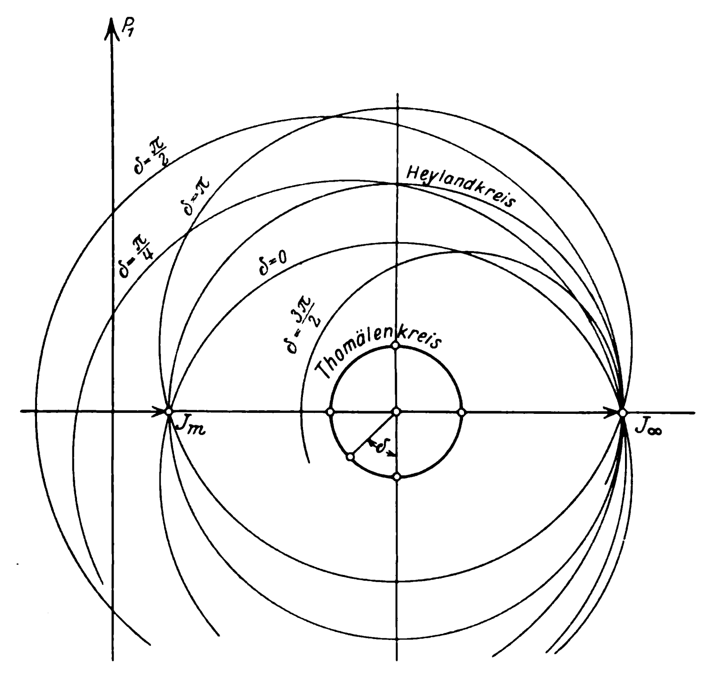


Bild 9. Kreisdiagramme für verschiedene Bürstenstellungen.

Bei einer Stellung der Bürsten entsprechend $\delta = \frac{\pi}{2}$ wird aus unserem Maschinensatz eine reine asynchrone Blindleistungsmaschine, die drehzahlregelnde Komponente wird hier gleich Null, der Maschinensatz läuft, da kein Drehmoment vorhanden ist, mit synchroner Drehzahl. Der Winkel zwischen K und J_2 ist hier praktisch Null,

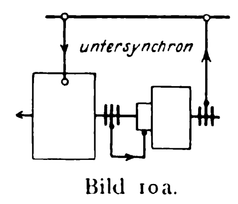


Bild 10a.
Leistungsflüsse bei Untersynchronismus.

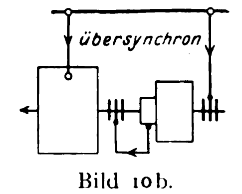


Bild 10b.
Leistungsflüsse bei Übersynchronismus.

die Leistung der Kollektorseite also positiv. Der Frequenzwandler nimmt an seinen Schleifringen elektrische Leistung auf, welche zur Deckung der Stromwärmeverluste dem Läuferkreis des Vordermotors über den Kollektor zugeleitet wird. Dies geht auch aus dem Diagramm von Bild 6b hervor, denn in diesem Falle, bei reiner asynchroner Blindleistungsmaschine wird $E_{20} \cdot s$ angenähert Null, demnach $K = J_2 \cdot R$ und die Kollektorleistung je Phase $L_K = J_2 \cdot K = J_2^2 \cdot R$, gleich den Stromwärmeverlusten

pro Phase des Läuferkreises. Die Hintermaschine nimmt hier über die Schleifringe bereits Leistung auf und diese Verhältnisse gelten auch für den übersynchronen Regelbereich.

In Bild 10 sind nach den bisherigen Überlegungen die Wege der Energien durch Richtungspfeile angedeutet. Wir verwenden hierbei den bereits von Föppl im ersten Band seiner Mechanik eingeführten Begriff des Leistungsflusses, welcher für die Beurteilung der Arbeitsweise der einzelnen Elemente äußerst fruchtbringend ist. Es wird sich später zeigen, daß bei den im Abschnitt 8 besprochenen Maschinen mit Ständerwicklung ein mechanischer Leistungsfluß, also eine Drehmomentbildung in der Hintermaschine auftritt. Im folgenden Abschnitt wollen wir noch den Einfluß der Streuung des Erregertransformators untersuchen.

7. Einfluß der Streuung des Erregertransformators.

Die Phase der Kollektorspannung ist jetzt nicht mehr durch die Stellung der Bürsten eindeutig gegeben, da bei Belastung die auf die Netzseite reduzierte sekundäre Klemmenspannung sich nach Größe und Phase verändert. Der Einfluß der Streuung des Erregertransformators wurde schon einmal von Weiler untersucht[1]. In dieser Arbeit wird behauptet, die Streuung würde im untersynchronen Regelbereich kompensierend wirken, und es sei daher vorteilhaft sie künstlich zu erhöhen. Diese Überlegungen enthalten jedoch einen prinzipiellen Fehler, da Weiler das Transformatordiagramm für Übersynchronismus auch für den untersychronen Regelbereich als gültig betrachtet hat. Die genannte Arbeit gibt einen treffenden Beweis für die von Kloß aufgestellte Behauptung, daß man in schwierigen Fällen nur durch absolut strenge Konsequenz bei der Aufzeichnung der Diagramme vor Trugschlüssen bewahrt bleibt. Wir zeichnen im folgenden die Spannungsdiagramme des Erregertransformators, um daran die richtige Wirkung der Streuung auf das Diagramm des Vordermotors zu studieren.

Wir legen unter Vernachlässigung der Eisenverluste den Strahl des Magnetisierungsstromes wagrecht nach links. Die vom Hauptfeld in beiden Wicklungen erzeugte EMK bleibt dann um 90° in der Phase zurück, geht also senkrecht nach oben. Die Phase des Sekundärstromes sei gegen die Hauptfeld-EMK willkürlich gegeben. Der Winkel zwischen beiden Vektoren ist spitz, die elektrische Leistung in bezug auf die generatorisch wirkende Sekundärspule also positiv. Nach bekannten Gesetzen muß die primäre Durchflutung zusammen mit der sekundären geometrisch die Durchflutung des Leerstromes ergeben, d. h.

$$J_1 \cdot Z_1 + J_2 \cdot Z_2 = J_0 \cdot Z_1. \qquad (13)$$

Damit ist auch der Vektor der Primärdurchflutung festgelegt.

Das Spannungsdiagramm des Sekundärkreises ergibt sich in einfacher Weise aus der zweiten Kirchhoffschen Regel, welche für die Effektivwerte geometrisch gelten muß. Die Gleichgewichtsbedingung der Spannungen des Sekundärkreises lautet demnach geometrisch:

$$E_2 + E_{s\,2} + (-J_2 \cdot R_2) + P_2 = 0. \qquad (14)$$

Darin bedeuten:

E_2 die sekundäre Hauptfeld-EMK,
$E_{s\,2}$ die EMK des sekundären Streuflusses,
$(-J_2 \cdot R_2)$ die Ohmsche Widerstandsspannung der Sekundärspule und
P_2 die vom sekundären Netz gelieferte Spannung.

Damit können wir das Spannungsdiagramm des sekundären Stromkreises zeichnen. In gleich einfacher Weise ergibt sich das Diagramm des Primärkreises aus der ebenfalls geometrisch zu lesenden Beziehung:

$$E_1 + E_{s\,1} + (-J_1 \cdot R_1) + P_1 = 0, \qquad (15)$$

[1] Vgl. ETZ 1925, S. 184—186.

worin die Bedeutung der einzelnen Größen die analoge ist wie oben. Auch hier erhalten wir ein geschlossenes Polygon und damit eine klare Durchsicht. In Bild 11 b sind alle Strecken des sekundären Spannungspolygons im Verhältnis $\frac{Z_1}{Z_2}$ umgerechnet, also auf gleiches Windungsverhältnis reduziert. In Bild 11 c ist noch der geringe Wirkstrom zur Deckung der Eisenverluste in Phase mit der primären Netzspannung

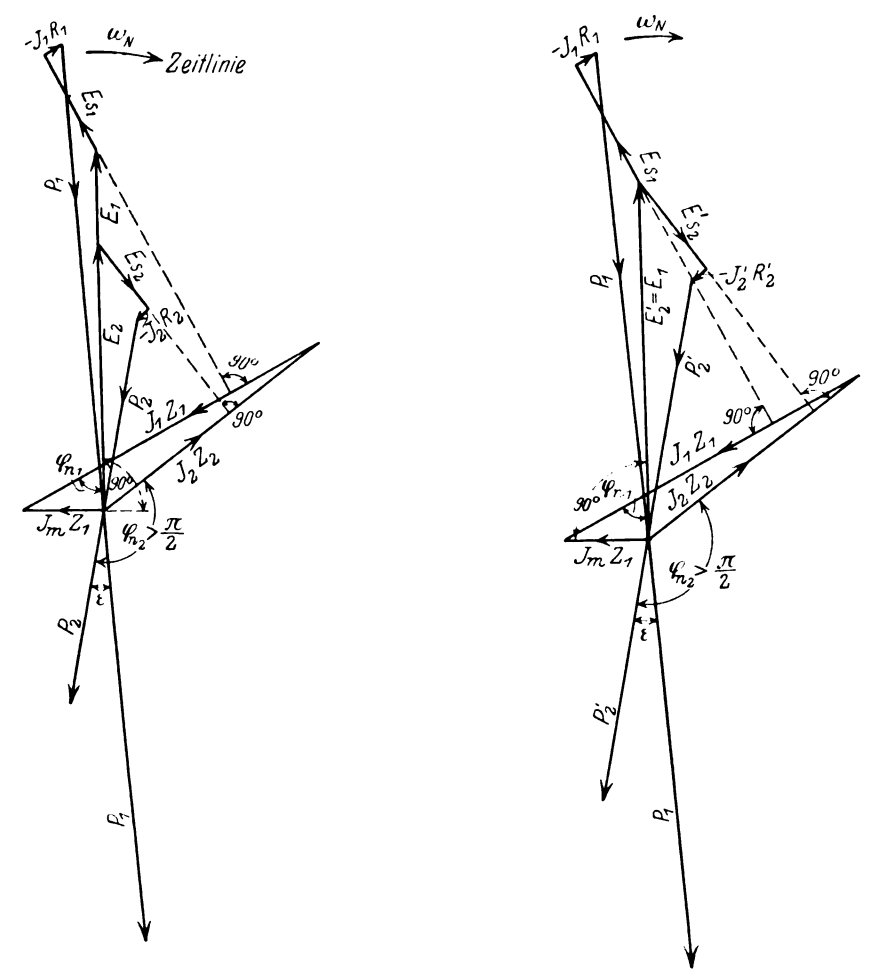


Bild 11 a. Transformatordiagramm für ungleiches Windungsverhältnis.

Bild 11 b. Sekundäre Größen auf die Primärseite reduziert.

hinzugefügt. Aus den so gezeichneten Diagrammen geht schon die Kappsche Anschauung von der Reihenschaltung beider Spulen klar hervor. Der reduzierte Spannungsvektor P_2' des sekundären Netzes wird durch die gesamte Verlustspannung um einen gewissen Winkel ε verdreht und gleichzeitig verkleinert.

Deutlicher tritt dies noch zutage, wenn wir in Bild 11 d den geringen Leerstrom vernachlässigen und in Gleichung (13) $J_1 \cdot Z_1 + J_2 \cdot Z_2 = 0$ setzen. Aus der bekannten Ersatzschaltung wird durch den Wegfall des Zwischenzweiges eine einfache Reihenschaltung. Der Transformator kann nunmehr durch eine Drosselspule ersetzt werden.

Die bisher entworfenen Transformatordiagramme gelten für den Leistungsfluß nach Bild 10b, da den Schleifringen der Hintermaschine entsprechend dem spitzen Winkel zwischen E_2 und J_2 elektrische Leistung zugeführt wird. In den

Bildern 11e bis 11f sind noch, was Weiler nicht beachtet hat, die Diagramme für Untersynchronismus mit stupfem Winkel zwischen E_2 und J_2 gezeichnet. Aus den Diagrammen der Bilder 11a bis 11f ergibt sich, daß im Übersynchronismus der sekundäre Spannungsvektor am Erregertransformator im zeitlich nacheilenden, bei Untersynchronismus dagegen im zeitlich voreilenden Sinn gegen den durch die feste Netzspannung gegebenen Leerlaufzustand verdreht wird.

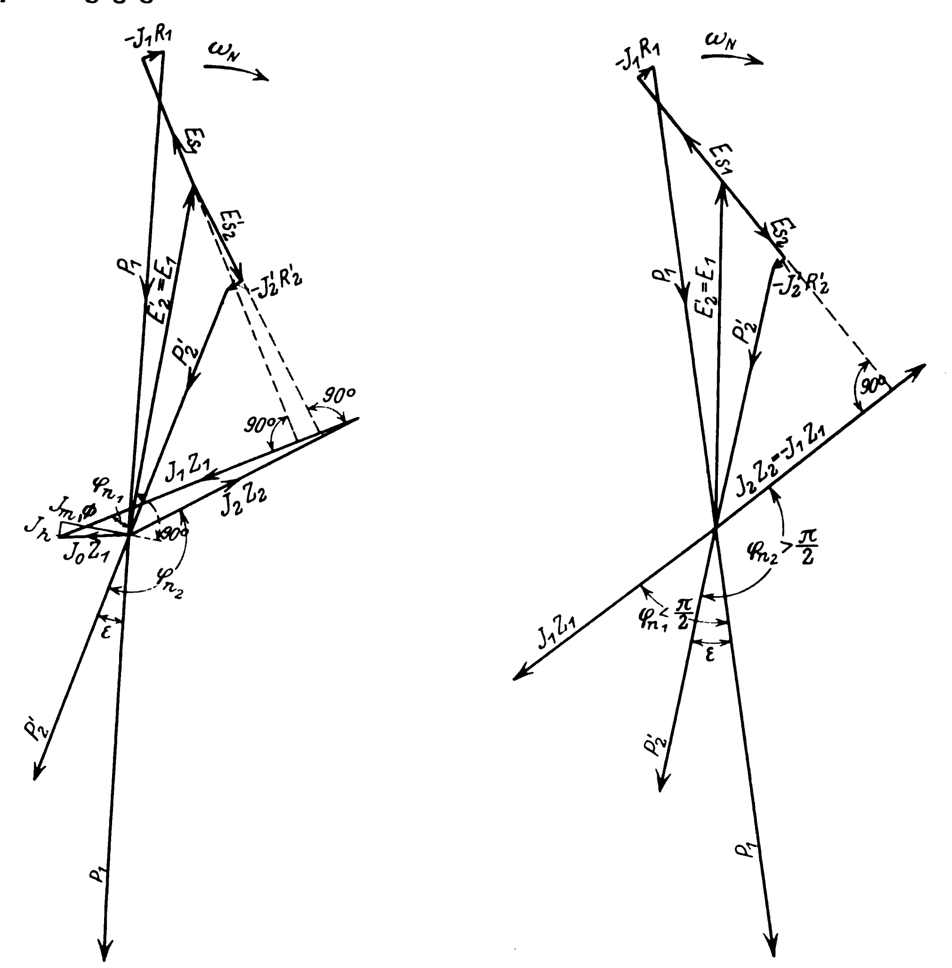


Bild 11c. Berücksichtigung der Eisenverluste. Bild 11d. Vernachlässigung des Leerstromes.

Die inneren Spannungsverluste im Frequenzwandler sind rechnerisch kaum zu erfassen, da dieselben sich mit der relativen Lage der Anzapfstellen gegen die Bürsten verändern. Diese Verluste können jedoch ihrer Kleinheit wegen außer Betracht gelassen werden. Demnach ist durch die Schleifringspannung auch das Feld des Frequenzwandlers nach Größe und Phase gegeben.

Unter Vernachlässigung des Leerstromes der Hintermaschine ist der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom auf beiden Seiten des Umformers gleich groß. Es läßt sich dann für beliebige Belastungspunkte, von Bild 9 ausgehend, durch die Diagramme der Bilder 11a bis 11f die Größe und Phase des Vektors K bestimmen. Durch eine Reihe konzentrischer Thomälenkreise, von denen jeder einen Belastungspunkt ergibt, könnte man die neue Phasenlage des Sekundärstromes und damit das genaue Stromdiagramm des Vordermotors ermitteln. Diese recht umständliche Konstruktion hat allerdings keine große Bedeutung, da die praktische Lösung so liegt,

daß der Vektor K hierbei der Phase nach konstant bleibt, wobei ähnliche Diagramme wie die abgeleiteten wieder genau gelten[1].

Im Übersynchronismus bleibt bei Belastung auch das Feld der Hintermaschine zeitlich zurück. Dies bedeutet, daß, von den rotierenden Schleifringen aus beobachtet, das Drehfeld gleichsam ruckweise gegen seine Drehrichtung zurückgeworfen wird. Denn wenn wir in die Gleichung einer im Sinne positiver x umlaufenden Welle, deren zeiträumliche Beziehung durch $\cos\left(\omega t - \frac{x\pi}{\tau_p}\right)$ (worin τ_p die Polteilung bedeutet) dargestellt wird, einen zeitlichen Nacheilwinkel hinzufügen, so ergibt diese

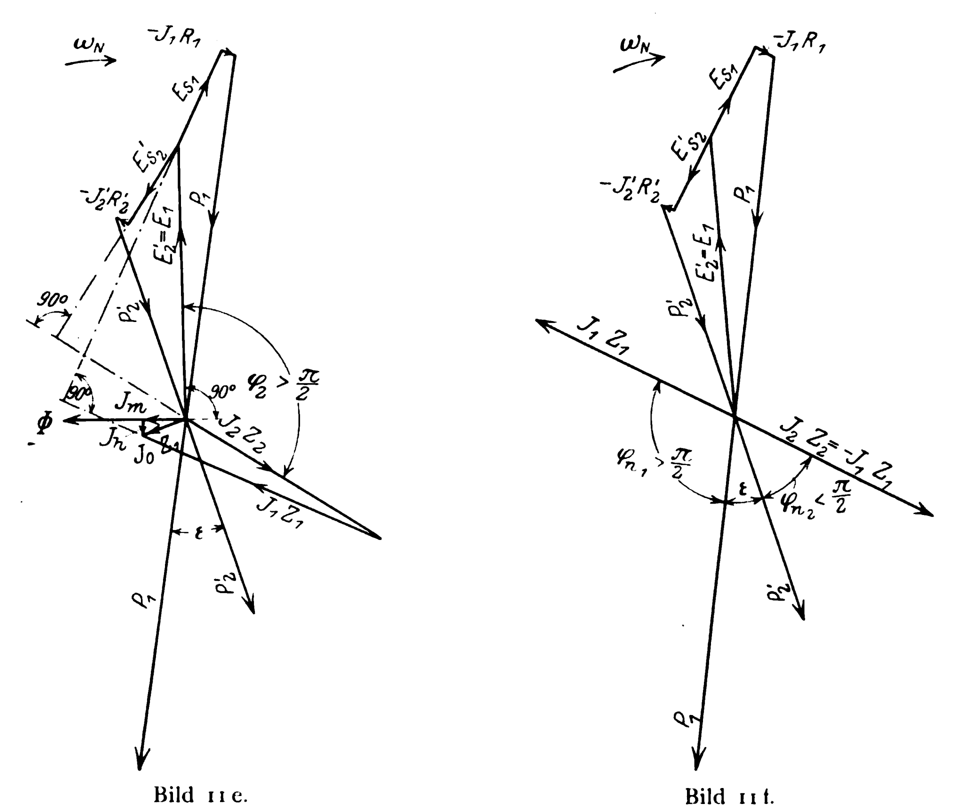


Bild 11 e bis 11 f. Diagramme des Erregertransformators bei Untersynchronismus des Vordermotors.

Funktion $\cos\left(\omega t - \varepsilon - \frac{x\pi}{\tau_p}\right)$ für $t = 0$ räumlich diskutiert, daß die ganze Welle im Sinne negativer x um den gleichen Winkel gegen die Umlaufrichtung des Feldes zurückbleibt.

Da nun, vom rotierenden Läufer aus gesehen, das Feld der Hintermaschine sich gegen die Drehrichtung des Satzes zurückbewegt, wirkt die Streuung ebenso, als wenn wir dieses Drehfeld durch eine verstellbare Kupplung in Richtung der Drehung des Maschinensatzes zurückwerfen. Hierdurch wird die gleiche Wirkung erzielt, wie durch ein Weiterschieben der Bürsten von Punkt $\delta = \pi$ auf $\delta = \pi + \varepsilon$, die Streuung wirkt also im Sinne einer Gegenkompensation.

Im Untersynchronismus eilt das Feld der Hintermaschine bei Belastung zeitlich vor. Die gleichen Überlegungen wie oben ergeben, daß diesem Vorauswerfen des Feldes eine Verschiebung der Bürsten von $\delta = 0$ auf $\delta = -\varepsilon$ gleichwertig ist (also

[1] Vgl. ETZ 1924, S. 1265—1270.

ebenfalls im Sinne einer Gegenkompensation). Eine Verbesserung des Leistungsfaktors läßt sich demnach nicht durch eine Induktivität, sondern nur durch Einschalten einer Kapazität erreichen.

Im übersynchronen Regelbereich wirkt die Streuung kompoundierend, im untersynchronen jedoch gegenkompoundierend. Der Maschinensatz erhält bei Untersynchronismus durch die mit der Belastung eintretende Abnahme des Vektors K, ähnlich wie ein Gleichstrommotor mit großer Ankerrückwirkung, eine ziemlich starre Charakteristik. Auch das Fehlen einer Drehmomentbildung und die hierdurch sich ergebende Forderung, daß Schleifringe und Zusatzapparate für den ganzen Läuferstrom des Vordermotors zu bemessen sind, müssen als großer Mangel dieser Anordnung angesprochen werden. Der richtige Gedanke ist offenbar noch nicht gefunden. Es soll im folgenden gezeigt werden, auf welchem Weg die praktische Lösung erhalten wird.

III. Frequenzwandler mit Ständerwicklung.

8. Zweck und Wirkung der Ständerwicklung.

Man kann nun die erwähnten Nachteile durch eine auf dem Ständer angeordnete Drehstromwicklung beseitigen, deren Amperestäbe bei richtiger Bemessung die magnetische Wirkung des Läuferstromes in der Hintermaschine bis auf geringe Reststreufelder vollständig auslöschen.

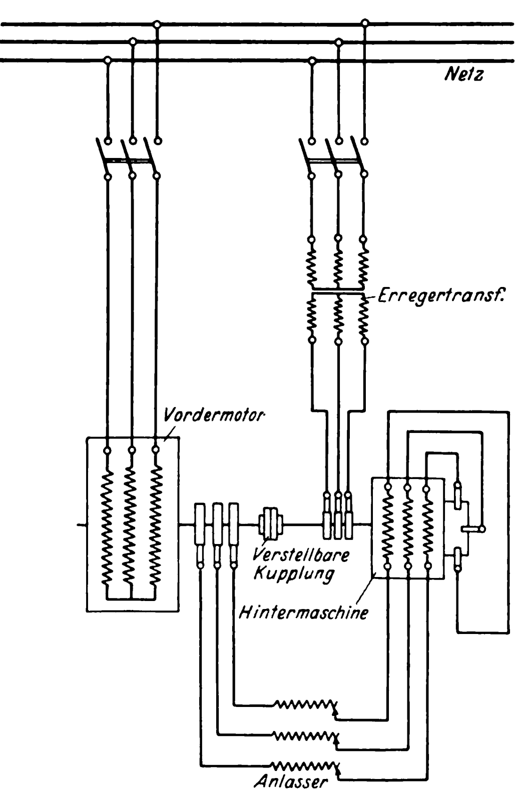


Bild 12. Asynchronmotor mit direkt gekuppelter, kompensierter Hintermaschine.

Hierdurch werden die Schleifringe und Zusatzapparate vom Betriebsstrom entlastet, indem jetzt einer derartigen Hintermaschine zur Erzeugung des Drehfeldes nur der Leerstrom zufließt, welcher durch einen kleinen Luftspalt und geringe Sättigung auf ein Minimum reduziert werden kann. Die Phase des Spannungsvektors K ist nun wirklich fest und dadurch gelten in aller Strenge jetzt erst ähnliche Kreisdiagramme wie sie für die früher besprochene Anordnung abgeleitet wurden.

Der richtige Gedanke wurde nun auch hier schon verhältnismäßig früh angegeben; die Erfinder scheiterten jedoch an den Schwierigkeiten der Ausführung. Die Kompensationswicklung findet sich in der Patentliteratur zweimal angegeben und beide Male wieder verworfen. Erst Kozisek erkannte ihre Wirkung richtig.

Das Schaltbild eines derartigen Maschinensatzes zeigt Bild 12. Es ist nach dem früher Gesagten leicht verständlich, da lediglich die Kompensationswicklung noch in den Läuferkreis eingeschaltet wird.

Die Phase des Vektors K kann jedoch jetzt nicht mehr durch einfache Bürstenverschiebung eingestellt werden. Denn da ja die magnetische Wirkung des Läuferstromes in der Hintermaschine kompensiert werden soll, so müssen die Achsen der Kollektor- und der Ständerwicklung zusammenfallen. Es soll im nächsten Abschnitt gezeigt werden, welche Wege zu einem praktisch brauchbaren Ergebnis führen.

9. Ausführungsmöglichkeiten.

Der einfachste Gedanke ist zunächst der, mit den Bürsten zwangsläufig auch den Ständer zu drehen, so daß in jeder Lage der Bürsten auch die Kompensationswicklung die richtige Stellung einnimmt. Eine solche Anordnung ist, wie man sofort übersieht, recht kompliziert und würde die Maschine wesentlich verteuern. Es mußte daher notwendig noch ein einfacherer Weg gefunden werden. Bei räumlich fester Anordnung der Ständerwicklung müssen auch die Bürsten eine unveränderliche Lage einnehmen, welche durch die sogenannte Kurzschlußstellung gegeben ist. Es gelingt jedoch, auch die Phase des Vektors K noch in anderer Weise dadurch zu verändern, daß zwischen die Läufer beider Maschinen eine stetig verstellbare Kupplung eingeschaltet wird. Denken wir uns den betrachteten Maschinensatz mit konstanter beliebiger Geschwindigkeit in Bewegung und während der Rotation, indem wir uns selbst mit dem Läufer drehen, einen Moment lang die Kupplung gelöst, den Läufer der Hintermaschine um einen gewissen Winkel δ gegen die ursprüngliche Lage verschoben und in der neuen Lage wieder festgeschraubt, so erscheint uns die Phase der Kollektorspannung K offenbar gegen früher geändert, während im Vordermotor die Verhältnisse geblieben sind. Daraus geht hervor, daß wir auch die relative Phase der Schlupfspannung des Vordermotors gegen diejenige des Vektors K der Hintermaschine auf die hier angegebene Weise beliebig ändern können.

Eine Einstellung dieser Kupplung wird nun dadurch möglich sein, daß man durch verschiedenmaliges Anlassen und Wiederabstellen diejenige Lage zu ermitteln sucht, bei welcher das Aggregat seine größte untersynchrone Leerlaufdrehzahl annimmt. Damit ist dann die frühere Nullstellung gefunden, und es bleibt noch zu untersuchen, in welchem Sinn bei gegebener Drehrichtung des Maschinensatzes die Kupplungshälfte der Hintermaschine zu verstellen ist, um vom Bereich untersynchroner Regelung auf reine Phasenkompensierung und Übersynchronismus zu gelangen. Wir hatten nun früher gefunden, daß durch Verschiebung der Bürsten in Richtung des Drehfeldes der Hintermaschine aus der gewählten Nullstellung der Vektor K im Diagramm hierdurch eine um 90^0 verspätete Phase annimmt, wodurch nach Bild 6a reine Phasenkompensierung erhalten wurde. Dieselbe Wirkung wie dort kann auch hier erreicht werden, wenn wir die Kupplungshälfte der Hintermaschine jetzt um 90^0 in Richtung der Drehung des Maschinensatzes zurückstellen. Hierdurch werden die rotierenden Anzapfstellen der Läuferwicklung der Hintermaschine und damit das Maximum des umlaufenden Drehfeldes gleichsam ruckweise zurückgeworfen, so daß also das Drehfeld bei seiner Rotation erst 90^0 später die entsprechende Kollektorbürste erreicht als in der vorher vorhandenen Kupplungsstellung. Durch dieses Gedankenexperiment haben wir die zuletzt besprochene Anordnung auf die frühere zurückgeführt. Die dort angestellten Überlegungen in bezug auf den Winkel δ und die hieraus vorgenommene Bestimmung der Phasenlage des Vektors K im Zeitdiagramm können damit in ebenso einfacher Weise ausgeführt werden als vorher bei Drehung der Bürsten. Im folgenden Abschnitt soll etwas näher die Drehmomentbildung der Hintermaschine untersucht werden.

10. Drehmomentbildung.

Wir hatten im Abschnitt 6 bei der Betrachtung des Frequenzwandlers ohne Ständerwicklung gefunden, daß die Schlupfleistung elektrisch durch die Hintermaschine durchgeleitet wird. Bei Untersynchronismus gibt in dieser Anordnung der Läufer des Vordermotors die überschüssige Schlupfenergie über die Schleifringe der Hintermaschine dem Netz zurück, während bei Übersynchronismus die Schlupfleistung dem Läufer des Vordermotors elektrisch zugeleitet wird. Im letzteren Fall wird der Hauptmotor von zwei Seiten gespeist. Dies erklärt sich daraus, daß das Drehfeld des Vordermotors bei gegebenem Drehmoment stets nur eine der



synchronen Geschwindigkeit entsprechende Leistung auf den Läufer übertragen kann. Der Restbetrag muß demnach auf dem angegebenen Wege dem Vordermotor zugeführt werden.

In bezug auf die Kollektorseite der Hintermaschine bleiben die früher im Abschnitt 6 gewonnenen Ergebnisse in vollem Umfang erhalten, da die dort gefundenen Kreisdiagramme auch noch angenähert für die folgenden Betrachtungen verwendet werden können. Der einzige Unterschied besteht darin, daß an Stelle des elektrischen Leistungsflusses an den Schleifringen der Hintermaschine ein mechanischer Leistungsfluß an der Welle auftreten muß. Bei Untersynchronismus nimmt die Kollektorseite elektrische Leistung auf, die Hintermaschine wirkt motorisch und gibt nach Abzug der Verluste die Schlupfleistung mechanisch zurück. Bei Übersynchronismus ist die Kollektorleistung positiv, die hier der Hintermaschine mechanisch zugeführte Schlupfenergie wird dem Läufer des Vordermotors elektrisch wiedergegeben. Damit lassen sich nach Bild 13a und 13b die Bilder der Leistungsflüsse für unter- und übersynchronen Betrieb aufzeichnen.

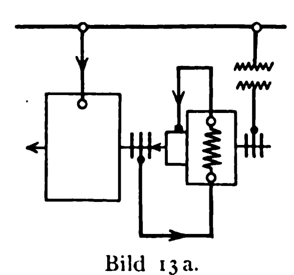


Bild 13a.
Leistungsflüsse bei Untersynchronismus und Betrieb mit kompensierter Hintermaschine.

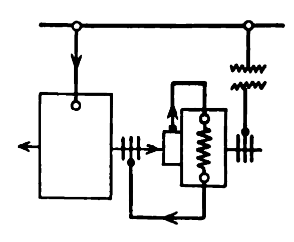


Bild 13b.
Leistungsflüsse bei Übersynchronismus.

Durch die Diagramme des Bildes 9 erhalten wir bereits einen vollständigen Einblick in die Drehmomentbildung bei allen beliebigen Verhältnissen. Die elektrische Leistung am Kommutator wird durch ein relativ zu den Stäben der Kollektorwicklung mit synchroner Geschwindigkeit rotierendes Drehfeld mechanisch auf den Läufer der Hintermaschine übertragen. Teilen wir die Kollektorleistung durch Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega_N}{p}$ des Feldes relativ zu den Läuferstäben, so ergibt sich das Drehmoment in Wattsekunden.

Deutlicher wird dies noch, wenn wir in der Hintermaschine die Verhältnisse vertauschen und die bisher ruhenden Bürsten mit der Kompensationswicklung starr mit dem Läufer des Vordermotors verbinden und dafür den vorher rotierenden Teil stillstehen lassen. Damit an den Kollektorbürsten wiederum Schlupffrequenz auftritt, muß das jetzt relativ zum Raum mit konstanter Geschwindigkeit rotierende Drehfeld in gleicher Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit wie das Vordermotorfeld umlaufen. In dieser Anordnung haben wir wieder zwei Maschinen mit gleichlaufenden Feldern und hieran wird auch richtig klar, weshalb in Bild 6 und 7 der Spannungsvektor K in ein Diagramm eingezeichnet werden durfte, welches vom Ständer des Vordermotors aus aufgestellt ist.

Die Drehmomentbildung der Hintermaschine läßt sich am einfachsten übersehen, wenn wir das Aggregat bei synchroner Drehzahl betrachten. Die Kupplung zwischen beiden Maschinen sei auf eine geringe übersynchrone Leerlaufdrehzahl eingestellt, so daß der Maschinensatz bei vollem Strom im Läuferkreis genau synchrone Drehzahl annimmt. Beim Frequenzwandler ohne Ständerwicklung hatten wir gefunden, daß dem Läufer des Vordermotors die Leistung zur Deckung der Stromwärmeverluste zugeführt wird. Die gleichen Verhältnisse liegen auch hier

vor, nur mit dem Unterschied, daß diese Leistung jetzt mechanisch vom Vordermotor entnommen wird. Die Hintermaschine übt hierbei das größte Drehmoment aus, so daß Ankerachse und Feldachse aufeinander senkrecht stehen[1]. Stromverteilung und Feld stehen räumlich fest, was aus den in Abschnitt 3 angestellten Überlegungen hervorgeht. Die Verhältnisse in der Hintermaschine wurden damit

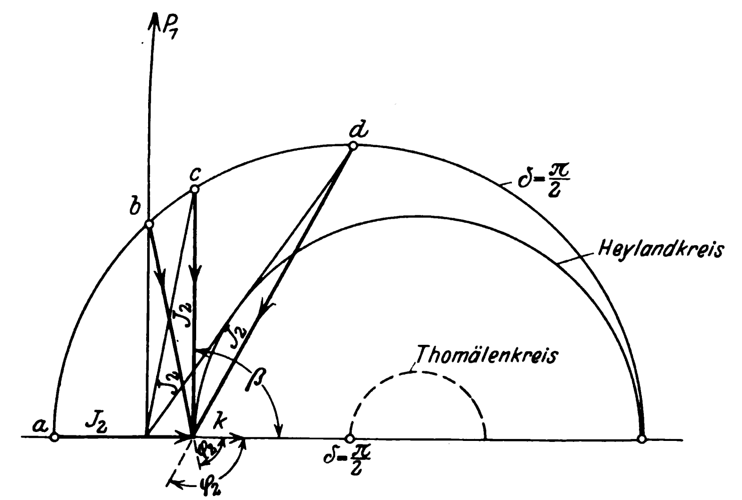


Bild 14. Kreisdiagramm zur Erklärung der Drehmomentbildung des kompensierten Frequenzwandlers.

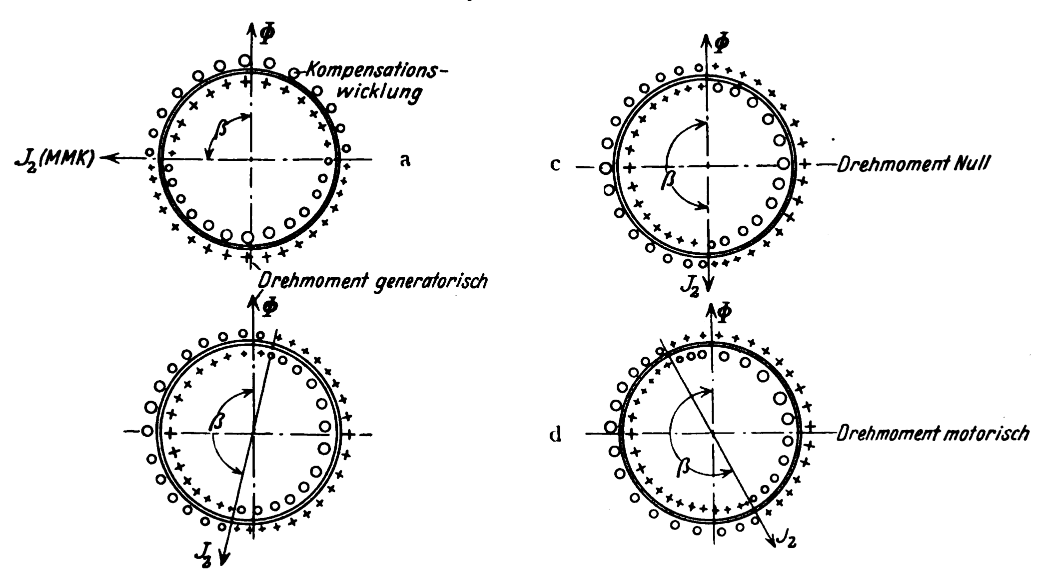


Bild 15a bis 15d. Drehmomentbildung der kompensierten Kollektorhintermaschine. Drehrichtung des Maschinensatzes: links, von den Schleifringen der Hintermaschine auf den Vordermotor gesehen.

auf diejenigen einer kompensierten Gleichstrommaschine zurückgeführt, bei welcher die Bürsten in die neutrale Zone eingestellt sind. Feld- und Stromverteilung ergeben sich allerdings nicht wie dort als räumlich konstant, sondern beide sind hier angenähert sinusförmig. In dem betrachteten Fall wird der Läufer des Vordermotors mit Gleichstrom magnetisiert, wodurch im Hauptmotor sich ein geringes synchronisierendes Moment ausbildet.

[1] Vgl. Schenkel, S. 79.

Stellen wir uns jetzt vor, daß der bisher als reiner Phasenschieber laufende Maschinensatz durch ein äußeres Drehmoment belastet wird, so fällt die Drehzahl gegen die synchrone etwas ab, und hierdurch rotieren Stromverteilung und Feld in der Hintermaschine langsam mit Schlupffrequenz in entgegengesetzter Richtung des Satzes. Gleichzeitig ändert sich auch die Phase von J_2 relativ zu der festen Spannung K im zeitlich nacheilenden Sinne, so daß die MMK-Welle des Läuferstromes der Kollektorwicklung sich in Richtung der Drehung des Maschinensatzes gegen die Anfangslage verschiebt. Nach dem Gesagten sind nun an Hand des Diagrammes des Bildes 14 in den Bildern 15a bis 15d für verschiedene Belastungspunkte schrittweise die Stromverteilungen der Kollektor- und Kompensationswicklung und deren relative Lage gegen das Feld der Hintermaschine aufgezeichnet. Bei einer Belastung, bei welcher die MMK-Welle des Läuferstromes auf dem Spannungsvektor K senkrecht steht, wird der Phasenwinkel φ_2 gleich 90^0, wodurch das Drehmoment verschwindet. Dieser Fall tritt ein, wenn im Vordermotor die Blindkomponente des Ständerstromes dem Magnetisierungsstrom gleich geworden ist. Bei weiterer Belastung wird der Winkel zwischen K und J_2 stumpf und die Kollektorleistung damit negativ. Die Hintermaschine übt jetzt ein motorisches Drehmoment aus, da das Strommaximum in ein Feld umgekehrter Richtung gelangt ist. Hiernach sind die Bilder 15a bis 15d ohne weiteres verständlich. Dabei ist, von den Schleifringen der Hintermaschine aus gesehen, Linkslauf des Maschinensatzes angenommen. In gleicher Weise läßt sich die Lage der Stromwellen gegen das Feld für sämtliche Verhältnisse auffinden. Das Beispiel der asynchronen Blindleistungsmaschine wurde hier gewählt, um daran anschaulich den Übergang der Hintermaschine vom Generator zum Motorbetrieb darzutun.

Zusammenfassung.

Nach einem geschichtlichen Überblick im Abschnitt 1 werden im Abschnitt 2 in hauptsächlich qualitativen einführenden Betrachtungen die physikalischen Vorgänge bei dem läufergespeisten Drehstromnebenschlußmotor studiert.

Abschnitt 3 enthält Schaltung und Wirkungsweise des Frequenzwandlers ohne Ständerwicklung bei direkter Kupplung mit einem asynchronen Vordermotor.

Abschnitt 4 behandelt die einfachen Zustandsdiagramme des in Abschnitt 3 beschriebenen Maschinensatzes bei Vernachlässigung der Streuung des Vordermotors. Mit Hilfe dieser in den Bildern 5, 6a und 6b gezeichneten Diagramme wird die Beziehung zwischen der räumlichen Bürstenstellung und der Lage des Spannungsvektors K der Hintermaschine im Zeitdiagramm gewonnen.

Abschnitt 5 liefert die Ableitung des Thomälenkreises, mit dessen Hilfe die Kreisdiagramme des Maschinensatzes unter Vernachlässigung des Ständerwiderstandes im Vordermotor für beliebige Bürstenstellungen der Hintermaschine gezeichnet werden können.

Der Abschnitt 6 enthält eine Diskussion der in Abschnitt 5 gewonnenen quantitativen Ergebnisse und zeigt, in welcher Weise die Leistungsflüsse des Maschinensatzes durch die Bürstenstellung der Hintermaschine bestimmt werden.

In Abschnitt 7 wird der Einfluß der Streuung des im Schleifringkreise des Frequenzwandlers liegenden Erregertransformators untersucht. Die erhaltenen Resultate werden mit den auf diesem Gebiete von Weiler in der ETZ 1925, Heft 6, S. 184 angestellten Betrachtungen verglichen.

Abschnitt 8 enthält Schaltung und Wirkungsweise des Maschinensatzes mit kompensierter Hintermaschine.

In Abschnitt 9 werden die verschiedenen Ausführungsmöglichkeiten des Maschinensatzes mit kompensierter Hintermaschine diskutiert.

Abschnitt 10 behandelt die Drehmomentbildung des kompensierten Frequenzwandlers, wobei gezeigt wird, wie die räumliche Lage der Stromwellen gegen das Feld der Hintermaschine gefunden werden kann.



Zur Theorie des Quecksilberdampfgleichrichters.

Von

K. Potthoff, Hannover.

Die Theorie der Schaltungen des Quecksilberdampfgleichrichters zerlegt man am besten nach dem Vorgehen K. E. Müllers[1] in das sogenannte „Reduktionsproblem" — also in der Aufgabe, schwierige Schaltungen auf eine einfache Normalform zurückzuführen, derart, daß weitere Untersuchungen der verschiedensten Schaltungen sich decken und nur die Konstanten der Rechnung verschieden sind — und die weitere rechnerisch-graphische Untersuchung dieser Normalform. Man kann diese Theorie des Gleichrichters ohne weiteres soweit verallgemeinern, daß man die Phasenzahl des gleichzurichtenden Wechselstromes unbestimmt einführt, doch soll hier davon Abstand genommen werden und das Problem auf den Fall des Zweiphasengleichrichters beschränkt bleiben.

Für ihn läßt sich zeigen, daß die zur Zeit angewendeten normalen Schaltungen sich auf das Schema von Bild 1 zurückführen lassen. Als Übersetzungsverhältnis

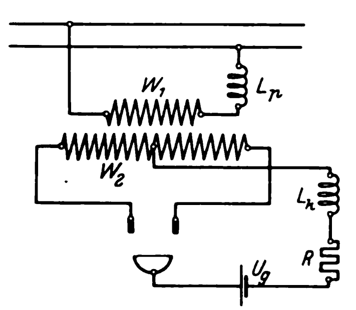


Bild 1. Normalform des Zweianodengleichrichters.

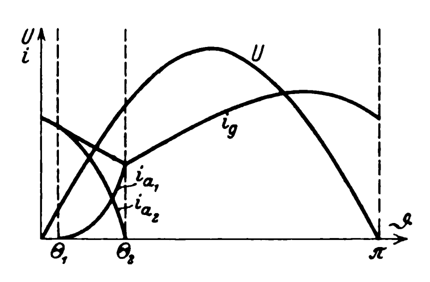


Bild 2. Strom- und Spannungskurven des Normalgleichrichters.

des Transformators soll dabei sinngemäß der Quotient aus primärer und halber sekundärer Windungszahl eingeführt werden, also

$$ü = \frac{w_1}{w_2}.$$

Diese Größe möge jedoch in der weiteren Untersuchung mit 1 angenommen werden, da sie sich ohne weiteres im Endergebnis nachträglich einführen läßt. Weiterhin seien verschiedene Vernachlässigungen getroffen. So seien die Ohmschen Widerstände vor und im Transformator gleich Null gesetzt und der Magnetisierungsstrom als vernachlässigbar angesehen. Schließlich möge die sekundäre Streuung des Transformators für den zunächst zu behandelnden Fall Null sein und die primäre Streuung in Form einer Ersatzinduktivität zur Induktivität der Primärdrossel zugeschlagen werden. Die Jochstreuung sei durch geeignete Maßnahmen vermieden.

Es ist dann beim Zweiphasengleichrichter die Periode des Gleichstromes gleich der halben Periode des Wechselstromes. Sie zerfällt normal in eine Alleinperiode, während der der Lichtbogen nur an einer Anode brennt, und in eine Übergangsperiode, während der der Lichtbogen allmählich von einer zur anderen Anode übergeht, da ein momentanes Überspringen durch die Induktivität auf der Wechselstromseite verhindert wird.

[1] K. E. Müller, Der Quecksilberdampfgleichrichter. 1. Band, Berlin, Verlag Julius Springer, 1925.

Bezeichnet man nun mit:

$U_0 \sin \vartheta = U_0 \sin \omega t$ den Augenblickswert der primären Wechselspannung;

L_p die Induktivität der Primärdrossel;

L_k die Induktivität der Kathodendrossel;

R den Widerstand im Gleichstromkreis;

U_g die Summe aus dem konstanten Spannungsabfall im Bogen und einer Gegenspannung (Akkumulator, Motor);

i_{a1} den über Anode 1 fließenden Strom,

so verlangt das Spannungsgleichgewicht, daß, während der Bogen an Anode 1 allein brennt, die Beziehung gilt:

$$U_0 \sin \vartheta - \omega L p \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta} = R \cdot i_{a1} + \omega L_k \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta} + U_g;$$

oder umgeformt:

$$\frac{U_0}{R}(\sin \vartheta - \sigma) = i_{a1} + \operatorname{tg} \gamma \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta}. \tag{1}$$

Dabei ist vereinfachend

$$\sigma = \frac{U_g}{U_0} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega (L_k + L_p)}{R}$$

gesetzt. Wir nehmen an, daß Gleichung (1) zwischen den zu bestimmenden Zeiten $\vartheta = \Theta_2$ und $\vartheta = \pi + \Theta_1$ gelten möge. Während der Zeit $\vartheta = \pi + \Theta_1$ bis $\vartheta = \pi + \Theta_2$ geht der Bogen zur Anode 2 über (Bild 2). Das Spannungsgleichgewicht erfordert dann die Gültigkeit der Gleichungen:

$$U_0 \sin \vartheta - \omega L_p \frac{d\,(i_{a1} - i_{a2})}{d\, \vartheta} = R\,(i_{a1} + i_{a2}) + \omega L_k \frac{d\,(i_{a1} + i_{a2})}{d\, \vartheta} + U_g;$$

$$- U_0 \sin \vartheta + \omega L_p \frac{d\,(i_{a1} - i_{a2})}{d\, \vartheta} = R\,(i_{a1} + i_{a2}) + \omega L_k \frac{d\,(i_{a1} + i_{a2})}{d\, \vartheta} + U_g.$$

Addition und Subtraktion liefert:

$$R\,(i_{a1} + i_{a2}) + \omega L_k \frac{d\,(i_{a1} + i_{a2})}{d\, \vartheta} + U_g = 0;$$

$$U_0 \sin \vartheta - \omega L_p \frac{d\,(i_{a1} - i_{a2})}{d\, \vartheta} = 0.$$

Setzt man hierin:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L_k}{R}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega L_p}{R};$$

so daß also $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ wird, so kann man die Gleichungen in der übersichtlichen Form schreiben:

$$(i_{a1} + i_{a2}) + \operatorname{tg} \alpha \frac{d\,(i_{a1} + i_{a2})}{d\, \vartheta} = - \frac{U_0}{R} \sigma; \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} \beta \frac{d\,(i_{a1} - i_{a2})}{d\, \vartheta} = \frac{U_0}{R} \sin \vartheta. \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (1) bis (3), bei deren Lösung drei Integrationskonstanten auftreten, zu denen noch die unbekannten Zeiten Θ_1 und Θ_2 kommen, sind unter Beachtung der bekannten fünf Anfangs- und Periodizitätsbedingungen[1] i_{a1} und i_{a2} nur graphisch zu bestimmen[2]. Bild 2 gibt einmal für einen bestimmten Fall den Verlauf der Ströme an.

Uns interessiert zunächst nur die Bedeutung der Gleichungen (2) und (3), die ein Kriterium dafür sind, ob eine Übergangsperiode bestehen kann oder nicht. Wir erweitern zunächst einmal Gleichung (2) mit $R\,(i_{a1} + i_{a2})$ und Gleichung (3) mit $R\,(i_{a1} - i_{a2})$. Wir erhalten dann nach einigen Umformungen:

[1] Siehe z. B. K. E. Müller, l. c. S. 87.

[2] Pflieger-Haertel, Zur Theorie des Gleichrichters. Wiss. Veröffentl. a. d. S. K. Bd. III, S. 41.

$$\frac{\omega L_k}{2} d(i_{a1} + i_{a2})^2 = [-U_g(i_{a1} + i_{a2}) - R(i_{a1} + i_{a2})^2] d\vartheta;$$

$$\frac{\omega L_p}{2} d(i_{a1} - i_{a2})^2 = U_0 \sin\vartheta (i_{a1} - i_{a2}) d\vartheta.$$

Beide Gleichungen sind Energiebilanzen. Die erste besagt, daß die im Gleichstromkreis verbrauchte Arbeit (negatives Vorzeichen) einzig und allein von der Kathodendrossel geliefert wird; die zweite, daß die vom Wechselstromnetz gelieferte Arbeit (positives Vorzeichen) in der Primärdrossel aufgespeichert wird. Wir können uns damit während der Übergangsperiode den Gleichrichter in zwei Kreise — Gleich-

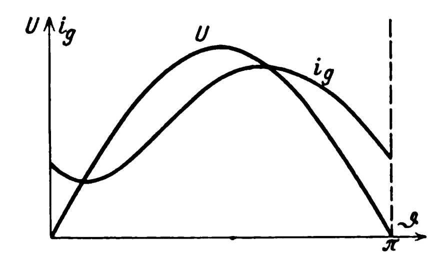


Bild 3. Stromkurve des Gleichrichters mit Kathodendrossel allein.

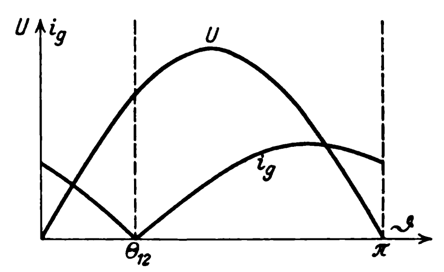


Bild 4. Stromkurve des Gleichrichters mit Primärdrossel allein.

und Wechselstromkreis — zerlegt denken. Unbeteiligt liegt zwischen beiden der Transformator, zwischen dessen Anodenklemmen dann auch keine Spannung auftreten kann. D. h.: Die Potentiale beider Anoden sind wegen der gleichen Spannungsabfälle im Lichtbogen gleich. Aus dieser Betrachtung ziehen wir sofort das Ergebnis: Eine Übergangsperiode kann nur dann existieren wenn beide Drosseln vorhanden sind. Sie wird zu Null, wenn L_k oder L_p verschwindet. Ist letzteres

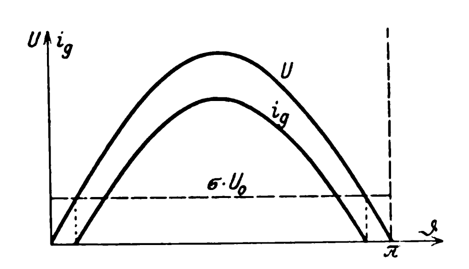


Bild 5. Stromkurve des Gleichrichters ohne jede Induktivität.

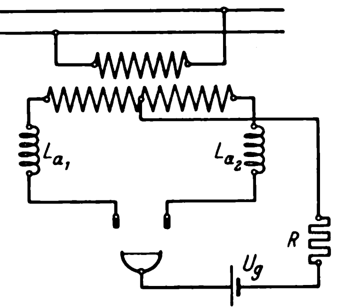


Bild 6. Gleichrichter mit ungekoppelten Anodendrosseln.

der Fall, so erfolgt der Stromübergang momentan zur Zeit $\vartheta = 0, \pi, 2\pi$ bei endlichen Werten des Gleichstromes[1] (vgl. Bild 3). Wird dahingegen L_k zu Null, so erfolgt der Stromübergang, wie im zweiten Teil der Arbeit nachgewiesen werden soll, momentan zu einer noch zu bestimmenden Zeit Θ_{12}, wobei jedoch der Augenblickswert des Stromes zu Null wird, da nur eine stetige Änderung der Primärdrosselenergie möglich ist (vgl. Bild 4). Ja, es kann bei kleinem L_p oder großem σ vorkommen, daß diskrete Stromkurven auftreten. Das muß ja der Fall sein, da mit verschwindendem L_p die Stromkurvenform in die des Gleichrichters ohne jede Induktivität übergehen muß (vgl. Bild 5).

Hier soll jedoch zunächst weiter untersucht werden, wieweit andere Schaltungen auf unseren Normalgleichrichter reduzierbar sind, d. h. wieweit Gleichungen für sie

[1] Vgl. K. E. Müller, l. c. S. 85.

aufstellbar sind, die sich von den Gleichungen (1) bis (3) nur dadurch unterscheiden, daß für $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\gamma$ Konstanten der neuen Schaltung einzuführen sind, wobei stets gelten mag:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta.$$

a) Der Gleichrichter mit Anodendrosseln.

(Vgl. Bild 6). Während der Alleinperiode gilt:

$$\left.\begin{aligned} U_0 \sin\vartheta &= R\cdot i_{a1} + \omega L_a \cdot \frac{d\, i_{a1}}{d\vartheta} + U_g; \\ \text{oder:} \quad \frac{U_0}{R}(\sin\vartheta - \sigma) &= i_{a1} + \frac{\omega L_a}{R}\cdot\frac{d\, i_{a1}}{d\vartheta}; \\ \Theta_2 < \vartheta &< \pi + \Theta_1 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Für die Übergangsperiode findet man:

$$U_0 \sin\vartheta = R\,(i_{a1} + i_{a2}) + U_g + \omega L_a \frac{d\, i_{a1}}{d\vartheta};$$

$$-U_0 \sin\vartheta = R\,(i_{a1} + i_{a2}) + U_g + \omega L_a \frac{d\, i_{a2}}{d\vartheta}.$$

Addition und Subtraktion liefern wieder:

$$i_{a1} + i_{a2} + \frac{1}{2}\frac{\omega L_a}{R}\frac{d\,(i_{a1} + i_{a2})}{d\vartheta} = -\frac{U_0}{R}\sigma; \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\omega L_a}{R}\frac{d\,(i_{a1} - i_{a2})}{d\vartheta} &= \frac{U_0}{R}\sin\vartheta; \\ \pi + \Theta_1 < \vartheta &< \pi + \Theta_2 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Setzen wir also:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega L_a}{2R}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\omega L_a}{2R}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega L_a}{R},$$

so erhalten wir aus Gleichungen (4) bis (6) die Gleichungen (1) bis (3), d. h. die Reduktion auf die Normalform ist vollzogen. Wir können also sagen:

> Anodendrosseln wirken zur einen Hälfte primärdrosselartig, zur anderen Hälfte kathodendrosselartig.

Da wir primäre und sekundäre Streuung des Transformators natürlich auch durch dem Transformator scheinbar vorgeschaltete bzw. hinter ihm liegende Streuinduktivitäten ersetzen können, interessiert uns als allgemeinster Fall:

b) Der Gleichrichter mit Primär-, Anoden- und Kathodendrossel.

Seine Gleichungen abzuleiten ist unnötig; wir erkennen sofort, daß wir setzen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\omega}{R}\left(L_k + \frac{L_a}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{\omega}{R}\left(L_p + \frac{L_a}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\gamma &= \frac{\omega}{R}(L_k + L_a + L_p) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

c) Der Gleichrichter mit gekoppelten Anodendrosseln.

Hier mag kurz eingefügt sein, daß zwei Arten der Anordnung der Anodendrosseln (Bilder 7 und 8) möglich sind. Die normale Anordnung ist in Bild 7, die Anordnung als Saugdrossel in Bild 8 wiedergegeben. Für den Fall des Zweiphasengleichrichters sind beide Schaltungen elektrisch gleichwertig, auch für den Fall der

magnetischen Kopplung deckt sich ihre rechnerische Behandlung. Erst beim Sechs- und Zwölfphasengleichrichter ergeben sich bei Anwendung der Saugdrosselschaltung vor allem konstruktive Vorteile.

Nun seien beim Zweiphasengleichrichter die Anodendrosseln zunächst einmal gleichsinnig gekoppelt, d. h. die einzelnen Anodenströme mögen den Kern der Drossel gleichsinnig magnetisieren. Sind dann:

L_{a1}, L_{a2} die totalen Induktivitäten der Wicklungen,
S_1, S_2 die Streuinduktivitäten,
M die Gegeninduktivität,

so gilt für den symmetrischen Fall:

$$L_{a1} = S_1 + M = L_{a2} = S_2 + M.$$

Damit lassen sich die Differentialgleichungen für den Gleichstrom wie folgt herleiten:

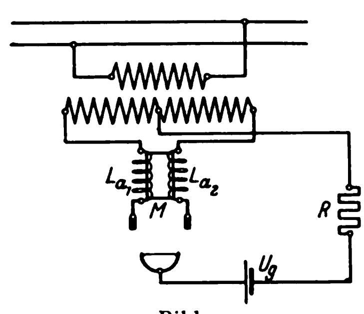


Bild 7.
Gleichrichter mit gekoppelten Anodendrosseln.

Bild 8.
Gleichrichter mit Saugdrossel.

Alleinperiode:

$$U_0 \sin \vartheta = R\, i_{a1} + (S_1 + M)\, \omega \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta} + U_g; \tag{8}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_0}{R} (\sin \vartheta - \sigma) = i_{a1} + \frac{\omega (S_1 + M)}{R} \cdot \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta} \\ \Theta_2 < \vartheta < \pi + \vartheta_1 \end{aligned} \right| \tag{9}$$

Übergangsperiode:

$$U_0 \sin \vartheta = R (i_{a1} + i_{a2}) + (S_1 + M)\, \omega \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta} + M\, \omega \frac{d\, i_{a2}}{d\, \vartheta} + U_g,$$

$$- U_0 \sin \vartheta = R (i_{a1} + i_{a2}) + (S_2 + M)\, \omega \frac{d\, i_{a2}}{d\, \vartheta} + M\, \omega \frac{d\, i_{a1}}{d\, \vartheta} + U_g.$$

Durch Addition und Subtraktion folgen:

$$c = R (i_{a1} + i_{a2}) + \omega \left(M + \frac{S}{2} \right) \frac{d\, (i_{a1} + i_{a2})}{d\, \vartheta};$$

$$U_0 \sin \vartheta = \frac{\omega\, S}{2} \frac{d\, (i_{a1} - i_{a2})}{d\, \vartheta},$$

oder in Übereinstimmung mit früherem:

$$- \frac{U_0}{R} \sigma = (i_{a1} + i_{a2}) + \frac{\omega \left(M + \frac{S}{2} \right)}{R} \frac{d\, (i_{a1} + i_{a2})}{d\, \vartheta}; \tag{10}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_0}{R} \sin \vartheta = \frac{\omega \frac{S}{2}}{R} \frac{d\, (i_{a1} - i_{a2})}{d\, \vartheta} \\ \pi + \Theta_1 < \vartheta < \pi + \Theta_2 \end{aligned} \right| \tag{11}$$

Wir führen also die Gleichungen (9) und (11) auf die des Normalgleichrichters zurück, wenn wir setzen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega\left(M + \frac{S}{2}\right)}{R}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\omega \frac{S}{2}}{R}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega (M + S)}{R} = \omega \frac{L_a}{R}. \tag{12}$$

Für den Fall der gegensinnigen Kopplung von Anodendrosseln, wobei also aufeinanderfolgende Anodenströme das Eisen der Drossel gegensinnig magnetisieren, ergeben sich auf gleichem Wege wie oben die Reduktionsgleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega \frac{S}{2}}{R}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\omega\left(M + \frac{S}{2}\right)}{R}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega L_a}{R}. \tag{13}$$

Ein klares Bild vom Verhalten der Drosseln erhalten wir, wenn wir die Grenzfälle betrachten. Für den natürlich nur theoretisch möglichen Fall der vollkommenen Kopplung, für den also $M = L_a$ und $S = 0$ wird, erhalten wir aus Gleichung (12):

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega L_a}{R}; \quad \operatorname{tg}\beta = 0,$$

d. h. wir erhalten dieselben Stromkurvenformen wie bei einem Gleichrichter mit einer Kathodendrossel von der Größe L_a allein. Aus Gleichung (13) folgt hingegen:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0; \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega L_a}{R}.$$

Der Gleichrichter mit gegensinnig vollkommen gekoppelten Anodendrosseln weist damit die gleichen Stromkurvenformen auf, wie ein Gleichrichter mit einer Primärdrossel gleicher Größe.

Mitten zwischen beiden Extremen liegt der Fall der ungekoppelten Drosseln ($M = 0$), wofür sich aus Gleichungen (12) oder (13) herleiten läßt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\omega\frac{L_a}{R}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\omega\frac{L_a}{R}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \omega\frac{L_a}{R}.$$

Wir erhalten also die Konstanten der Gleichungen (4) bis (6) wieder.

Zusammenfassend können wir feststellen:

> „Ungekoppelte Anodendrosseln wirken zur einen Hälfte primärdrosselartig, zur anderen Hälfte kathodendrosselartig. Durch magnetische Kopplung im gleichen oder entgegengesetzten Sinne wird das eine Mal die k. Wirkung verstärkt, die p. Wirkung geschwächt, das andere Mal die p. Wirkung verstärkt und die k. Wirkung geschwächt. Im Extremfall der vollkommenen Kopplung liegt nur noch eine reine k. Wirkung bez. p. Wirkung vor".

Weiterhin soll nun der durch Bild 1 und Gleichungen (1) bis (3) gekennzeichnete Normalgleichrichter näher untersucht werden. Wir stoßen dabei auf die bekannte Tatsache, daß der Allgemeinfall — der Gleichrichter mit endlicher Primär- und Kathodendrossel — der Rechnung kaum zugänglich ist, da die Zeiten Θ_1 und Θ_2 aus transzendenten Gleichungen nur graphisch zu bestimmen sind[1]. Es läßt sich jedoch zeigen, daß zwei Grenzfälle gerechnet werden können:

1. der Gleichrichter mit endlicher Primärdrossel und fehlender Kathodendrossel;
2. der Gleichrichter mit endlicher Primärdrossel und unendlich großer Kathodendrossel.

Zwischen beiden Fällen, von denen die Berechnung des letzteren bekannt ist, liegen alle praktisch vorkommenden Fälle, so daß man vor allem jetzt die Möglichkeit hat, den Einfluß der Kathodendrosselgröße auf den Spannungsabfall im

[1] Vgl. K. E. Müller, l. c. S. 151.

Gleichrichter abzuschätzen. Wir stellen also zunächst die Aufgabe, den arithmetischen Mittelwert des Gleichstromes eines Gleichrichters nach Fall 1 zu berechnen. Außer den für den Normalfall bereits gemachten Vernachlässigungen sei weiterhin angenommen, daß der Gleichrichter, wie heute allgemein üblich, Hilfserregung besitze, der Minimalstrom also bei Werten liege, die praktisch Null sind. Wir wissen dann bereits von der Betrachtung des Normalfalles her, daß keine Übergangsperiode besteht. Während der Alleinperiode gilt dann Gleichung (1) sinngemäß abgeändert:

$$\frac{U_0}{R}(\sin\vartheta - \sigma) = i_{a1} + \operatorname{tg}\beta \frac{d\, i_{a1}}{d\vartheta}. \tag{14}$$

Sie führt ohne Schwierigkeiten zu der Lösung:

$$i_{a1} = C\cos^2\beta\, e^{-\operatorname{ctg}\beta\cdot\vartheta} + \frac{U_0}{R}\cos\beta\sin(\vartheta - \beta) - \frac{U_0}{R}\sigma. \tag{15}$$

Hierin ist C die zu ermittelnde Integrationskonstante. Sie ist dadurch bestimmt, daß der Strom zur Zeit des Stromüberganges von einer Anode zur anderen Null sein muß; d. h. in Gleichung (15) muß i_{a1} sowohl zur Zeit $\vartheta = \Theta_{12}$ als auch zur Zeit $\vartheta = \pi + \Theta_{12}$ zu Null werden. Es gilt also:

$$C\cos^2\beta\, e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\Theta_{12}} + \frac{U_0}{R}\cos\beta\sin(\Theta_{12} - \beta) - \frac{U_0}{R}\sigma = 0, \tag{16}$$

$$C\cos^2\beta\, e^{-\operatorname{ctg}\beta\,(\pi + \Theta_{12})} - \frac{U_0}{R}\cos\beta\sin(\Theta_{12} - \beta) - \frac{U_0}{R}\sigma = 0. \tag{17}$$

Wir haben damit zwei Gleichungen mit den Unbekannten Θ_{12} und C. Man löst sie am vorteilhaftesten zunächst nach Θ_{12} auf. So liefert ihre Addition nach Umformungen:

$$C\cos^2\beta\,(1 + e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\pi})\, e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\Theta_{12}} = \frac{2\,U_0}{R}\sigma$$

oder

$$e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\Theta_{12}} = \frac{2\,U_0\,\sigma}{R\cdot C\cdot\cos^2\beta\,(1 - e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\pi})}.$$

Führt man diesen Wert für $e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\Theta_{12}}$ in Gleichung (16) ein, so wird

$$\frac{2\,U_0}{R}\sigma\cdot\frac{1}{1 + e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\pi}} + \frac{U_0}{R}\cos\beta\sin(\Theta_{12} - \beta) - \frac{U_0}{R}\sigma = 0.$$

Nach einigen Umformungen folgt dann für die Übergangszeit Θ_{12}:

$$\sin(\Theta_{12} - \beta) = -\frac{\sigma}{\cos\beta}\cdot\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right). \tag{18}$$

Unter vorläufiger Nichtbeachtung der Gültigkeitsgrenzen dieser Gleichung seien dann C und der arithmetische Mittelwert des Gleichstromes bestimmt. Wir setzen zu dem Zweck den Wert von $\sin(\Theta_{12} - \beta)$ aus Gleichung (18) in Gleichung (16) ein. Es wird damit:

$$C\cos^2\beta\, e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\Theta_{12}} - \frac{U_0}{R}\sigma\cdot\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta + 1\right) = 0$$

und

$$C = \frac{U_0}{R}\sigma\cdot e^{\operatorname{ctg}\beta\,\Theta_{12}}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}\left(1 + \mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)\right). \tag{19}$$

Daß hierin auch noch Θ_{12} auftritt, stört den weiteren Verlauf der Rechnung nicht. Führen wir nun C in Gleichung (15) ein, so wird:

$$i_{a1} = \frac{U_0}{R}\left[\sigma\left(e^{\operatorname{ctg}\beta(\Theta_{12} - \vartheta)}\left[1 + \mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)\right] - 1\right) + \cos\beta\sin(\vartheta - \beta)\right]. \tag{20}$$

Die Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen Θ_{12} und $\pi + \Theta_{12}$ liefert nach Division durch π den arithmetischen Mittelwert des Gleichstromes, der mit I_{gm} bezeichnet sei. Er ergibt sich zu:

$$I_{gm} = \frac{1}{\pi}\frac{U_0}{R}\left[\sigma\left(-\operatorname{tg}\beta\, e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\pi}\left[1+\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)\right]-\Theta_{12}+\pi\right)+\right.$$

$$\left.+\,\sigma\left(\operatorname{tg}\beta\left[1+\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)\right]+\Theta_{12}\right)+2\cos\left(\Theta_{12}-\beta\right)\right]$$

oder

$$I_{gm} = \frac{1}{\pi}\frac{U_0}{R}\left[\sigma\left(\operatorname{tg}\beta\left[1+\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)\right]\left(1-e^{-\operatorname{ctg}\beta\,\pi}\right)-\pi\right)+2\cos\beta\cos\left(\Theta_{12}-\beta\right).\right.$$

Zerlegen wir hierin:

$$1+\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)=\frac{2\,e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta}}{e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta}+e^{-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta}}\,;$$

$$1-e^{-\pi\operatorname{ctg}\beta}=e^{-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta}\left(e^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta}-e^{-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta}\right),$$

so wird:

$$I_{gm}=\frac{U_0}{R}\left[\sigma\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\beta\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\beta\right)-1\right)+\frac{2}{\pi}\cos\beta\cos\left(\Theta_{12}-\beta\right)\right]. \qquad (21)$$

Ehe auf die rechnerische Auswertung der Gleichung (21) eingegangen wird, sollen nur noch kurz der Anlaufvorgang betrachtet und Gültigkeitskriterien für die Gleichung ermittelt werden.

Für den Anlaufvorgang gilt natürlich Gleichung (14) in gleicher Weise wie für den stationären Betrieb. Nehmen wir dann z. B. an, daß der Gleichrichter in dem Zeitraum eingeschaltet wird, in dem die Wechselspannung $0 < U < U_0 \cdot \sigma$ ist, so wird der Strom in dem Augenblick — unter Vernachlässigung der Zündspannungsspitze — einsetzen, in dem $U = U_0 \cdot \sigma$ wird. Er verläuft dann nach Kurve I (Bild 9)

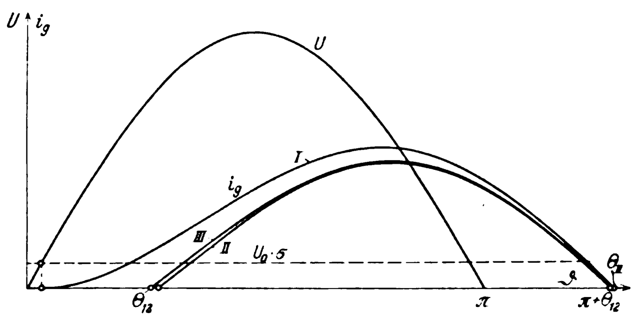


Bild 9. Anlaufvorgang des Gleichrichters mit Primärdrossel allein.

Zur Zeit $\vartheta = \Theta_{11}$ muß dann — es sei Hilfserregung angenommen — der Lichtbogen verlöschen, da die zweite Anode bis dahin noch nicht das Potential der ersten Anode erreicht hat. Im Augenblick des Verlöschens bricht jedoch die Spannung an der Primärdrossel zusammen, beide Anoden erreichen momentan das gleiche Potential und kehren ihr Vorzeichen um; der Strom kann damit im gleichen Augenblick an der zweiten Anode einsetzen und verläuft nun nach Kurve II. (Zwecks besseren Vergleichs ist die Kurve um π nach links verschoben.) In gleicher Weise entsteht dann die Kurve III. Man erkennt sofort, daß sich der Kurvenverlauf einem stationären Zustand nähert, der in bester Annäherung bereits durch Kurve III gegeben ist.

Festzustellen ist nun, welche Bedingung erfüllt sein muß, damit dieser stationäre Zustand überhaupt möglich ist, damit also zusammenhängende Stromkurven auftreten, die sich zur Zeit Θ_{12} momentan ablösen. Dazu muß offenbar

$$\Theta_{12} \geqq \text{arc} \sin \sigma$$

sein. Wir führen dies in Gleichung (18) ein und erhalten:

$$\sin (\text{arc} \sin \sigma - \beta) \geqq - \frac{\sigma}{\cos \beta} \mathfrak{T}\mathrm{g} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \beta \right),$$

$$\sigma \cos \beta - \sqrt{1 - \sigma^2} \sin \beta \geqq \frac{\sigma}{\cos \beta} \mathfrak{T}\mathrm{g} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \beta \right),$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - 1} \geqq \mathfrak{T}\mathrm{g} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \beta \right) \cdot \frac{1}{\sin \beta \cos \beta} + \operatorname{ctg} \beta. \tag{22}$$

Tabelle 1.

$\operatorname{tg} \beta$	σ	x	$\operatorname{tg} \beta$	σ	x
0,00	0,000	0,637	1,25	0,360	0,227
0,10	0,050	0,586	1,50	0,390	0,196
0,20	0,097	0,536	2,00	0,423	0,153
0,30	0,142	0,488	3,00	0,459	0,106
0,50	0,217	0,404	5,00	0,489	0,066
0,75	0,286	0,324	10,00	0,512	0,034
1,00	0,333	0,268	∞	0,537	0,000

Gleichung (22) läßt uns also zu jedem $\operatorname{tg} \beta$ das zugehörige σ angeben (vgl. Tabelle I). In Tabelle II sind nun einmal für den Fall des Gleichrichters mit Primärdrossel allein in Abhängigkeit von $\operatorname{tg} \beta$ und σ im Bereiche zusammenhängender Stromkurven die x-Werte errechnet. Dabei steht x vereinfachend für

Tabelle 2. Werte für x für den Zweianodengleichrichter mit Primärdrossel allein im Gebiete zusammenhängender Stromkurven.

$\operatorname{tg} \beta / \sigma$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,10	0,075	0,05	0
0									
0,10									0,633
0,20							0,557	0,580	0,624
0,30						0,526	0,547	0,568	0,610
0,50				0,419	0,459	0,497	0,516	0,534	0,569
0,75				0,387	0,420	0,452	0,467	0,482	0,509
1,00			0,290	0,352	0,379	0,405	0,417	0,428	0,450
1,25			0,266	0,318	0,341	0,362	0,371	0,381	0,398
1,50			0,244	0,288	0,307	0,324	0,332	0,340	0,353
2,00		0,165	0,206	0,239	0,253	0,265	0,271	0,276	0,285
3,00		0,127	0,154	0,175	0,184	0,191	0,194	0,197	0,201
5,00		0,085	0,101	0,112	0,117	0,120	0,122	0,123	0,125
10,00	0,035	0,046	0,053	0,058	0,060	0,062	0,062	0,063	0,063
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$\sigma \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \beta \, \mathfrak{T}\mathrm{g} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \beta \right) - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \cos \beta \cos (\Theta_{12} - \beta)$$

in Gleichung (21), die dann lautet:

$$I_{gm} = x \cdot \frac{U_0}{R}.$$

Diese Werte von x sollen nun mit denen des Gleichrichters mit Primärdrossel und unendlich großer Kathodendrossel verglichen werden. Wir gehen dazu von Gleichungen (2) und (3) für die Übergangsperiode aus:

$$i_{a1} + i_{a2} + \operatorname{tg}\alpha \frac{d(i_{a1} + i_{a2})}{d\vartheta} = -\frac{U_0}{R}\sigma,$$

$$\operatorname{tg}\beta \frac{d(i_{a1} - i_{a2})}{d\vartheta} = \frac{U_0}{R}\sin\vartheta.$$

Hierin ist $i_{a1} + i_{a2} = i_g$ konstant, da $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ ist; somit wird:

$$\frac{d(i_{a1} - i_{a2})}{d\vartheta} = 2\frac{d\,i_{a1}}{d\vartheta}.$$

Die Übergangsperiode beginnt, wie bekannt, zu der Zeit $\vartheta = 0$ und endet zur Zeit $\vartheta = \Theta_2$. Wir schreiben also jetzt Gleichung (3) in der Form:

$$2\operatorname{tg}\beta \frac{d\,i_{a1}}{d\vartheta} = \frac{U_0}{R}\sin\vartheta$$

und integrieren:

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{tg}\beta \int_0^{\Theta_2} d\,i_{a1} &= \frac{U_0}{R}\int_0^{\Theta_2} \sin\vartheta\, d\vartheta, \\ i_g &= \frac{U_0}{2\operatorname{tg}\beta R}(1 - \cos\Theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Tabelle 3. Werte für x für den Zweianodengleichrichter mit Primärdrossel und unendlich großer Kathodedrossel.

tg β / σ	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,10	0,075	0,05	0
0	0,037	0,137	0,237	0,337	0,437	0,487	0,537	0,562	0,587	0,637
0,10	0,034	0,128	0,222	0,316	0,410	0,458	0,505	0,528	0,552	0,598
0,20	0,032	0,121	0,210	0,299	0,387	0,432	0,476	0,498	0,520	0,565
0,30	0,031	0,115	0,199	0,283	0,367	0,409	0,451	0,472	0,493	0,534
0,50	0,028	0,104	0,179	0,255	0,331	0,369	0,407	0,426	0,445	0,483
0,75	0,025	0,092	0,160	0,228	0,302	0,329	0,363	0,380	0,397	0,431
1,00	0,022	0,083	0,145	0,206	0,267	0,297	0,328	0,343	0,358	0,389
1,25	0,020	0,076	0,132	0,187	0,243	0,271	0,299	0,313	0,327	0,355
1,50	0,019	0,070	0,121	0,172	0,223	0,249	0,274	0,287	0,301	0,326
2,00	0,016	0,060	6,104	0,148	0,192	0,214	0,236	0,248	0,258	0,280
3,00	0,013	0,047	0,081	0,116	0,150	0,167	0,184	0,193	0,202	0,219
5,00	0,009	0,033	0,057	0,080	0,104	0,116	0,128	0,134	0,140	0,152
10,00	0,005	0,019	0,032	0,046	0,059	0,066	0,073	0,076	0,080	0,087
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Unbekannt sind i_g und Θ_2. Wir brauchen also noch eine zweite Gleichung. Wir überlegen uns, daß das Integral der Gleichspannung + Spannungsverlust im Kolben, genommen über eine Halbperiode hinweg, gleich dem Integral der vom Transformator gelieferten Spannung sein muß. Es muß also gelten:

$$\pi(R \cdot i_g + U_0\sigma) = U_0 \int_{\Theta_2}^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$U_0(1 + \cos\Theta_2) = \pi(R \cdot i_g + \sigma U_0). \tag{24}$$

Wir schreiben Gleichung (22) in der Form:

$$U_0(1 - \cos\Theta_2) = 2\omega(L_p \cdot i_g). \tag{25}$$

Ihre Addition liefert nach einigen Umformungen die anschauliche Gleichung:

$$i_g = J_{gm} = \frac{U_0}{R}\left(\frac{2}{\pi} - \sigma\right) \cdot \frac{1}{1 + 2\frac{\operatorname{tg}\beta}{\pi}}. \tag{26}$$

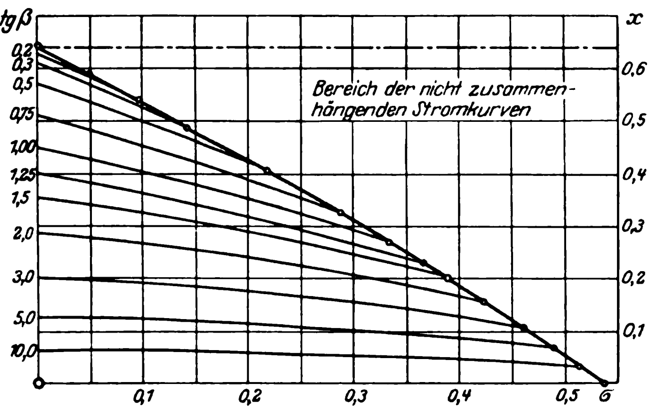


Bild 10. Gleichrichter ohne Kathodendrossel.

Hierbei ist

$$J_{gm} = \frac{U_0}{R}\left(\frac{2}{\pi} - \sigma\right)$$

der Mittelwert des Stromes bei fehlender Primärdrossel. Θ_2 erhalten wir in der Form:

$$1 - \cos\Theta_2 = \frac{\left(\frac{2}{\pi} - \sigma\right) 2 \operatorname{tg}\beta}{1 + \frac{1}{\pi} 2 \operatorname{tg}\beta}. \tag{27}$$

Wir schreiben nun Gleichung (26) auch wieder in der Form:

$$I_{gm} = x \cdot \frac{U_0}{R}$$

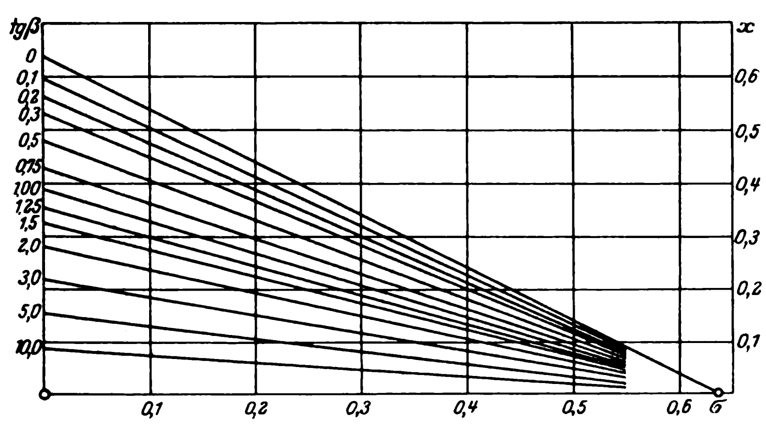


Bild 11. Gleichrichter mit unendlich großer Kathodendrossel.

und schreiben in Tabelle III die Werte für x an. In den Diagrammen (10) und (11) sind nun die Werte x für beide Grenzfälle aufgetragen. Wir erkennen das praktisch allerdings weniger wichtige Ergebnis, daß die Änderung des arithmetischen Mittelwertes des Gleichstromes durch Zufügung einer unendlich großen Kathodendrossel nicht einmal für alle Werte von σ und $\operatorname{tg}\beta$ das gleiche Vorzeichen besitzt.

Während normal der Mittelwert verkleinert wird, wird er bei kleinem σ und großem $\operatorname{tg}\beta$ vergrößert. Den bei den einzelnen Werten relativ größeren oder kleineren Einfluß der Kathodendrossel erkennt man am besten aus den Diagrammen, so daß sich eine Diskussion erübrigt.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß als „Normalform" des Zweiphasengleichrichters der Gleichrichter mit Transformator, Primärdrossel und Kathodendrossel anzusprechen ist. Anschließend wird nachgewiesen, daß außer dem Fall des Gleichrichters mit unendlich großer Kathodendrossel und endlicher Primärdrossel auch noch der Fall des Gleichrichters mit Primärdrossel allein der Rechnung zugänglich ist. In Abhängigkeit von der Größe der Induktivitäten und der Gegenspannung wird der arithmetische Mittelwert des Gleichstromes berechnet und für beide Fälle verglichen.

Über Resonanzkurven von Siebketten (Anwendungen).

Von

H. Goering.

Inhaltsübersicht.

I. Allgemeines.
II. Abgestimmte symmetrische Siebketten mit monoton verlaufenden Dämpfungskurven außerhalb des Spaltes.
 1. Fortpflanzungsmaß nach (33):
  a) Wellenwiderstand nach (7),
  b) Wellenwiderstand nach (8),
  c) Wellenwiderstand nach (9),
  d) Wellenwiderstand nach (10).
 2. Fortpflanzungsmaß nach (64):
  a) Wellenwiderstand nach (7),
  b) Wellenwiderstand nach (8),
  c) Wellenwiderstand nach (9),
  d) Wellenwiderstand nach (10).
III. Zusammenfassung.

I. Allgemeines.

In einer früheren Arbeit[1] waren zur Diskussion von Resonanzkurven der zwischen Verbraucher und Erzeuger eingeschalteten Vierpole, insbesondere der Siebketten, die meistenteils bedeutend einfacheren Begriffe „Fortpflanzungsmaß" und „Wellenwiderstand" benutzt worden. Die hierbei gefundenen Zusammenhänge zwischen Fortpflanzungsmaß, Wellenwiderständen und Endwiderständen einerseits und den Resonanzkurven anderseits sollen in den nachstehenden Zeilen an bestimmten Schaltungen gezeigt werden. Wir untersuchen dabei nur die einfachsten Siebgebilde, da dieselben naturgemäß am häufigsten zur Anwendung kommen. Es wird sich später zeigen, daß von diesen einfachen Schaltungen zum größten Teil auch auf das Verhalten der komplizierteren Schaltungsanordnungen geschlossen werden kann, wodurch eine besondere Behandlung der letzteren sich als unnötig erweist.

Ehe wir an die eigentliche Bearbeitung unseres Themas herantreten, sei es gestattet, einige allgemeine Bemerkungen, besonders über die Wellenwiderstände, zu machen. Für Siebketten, die, was wir im folgenden immer voraussetzen wollen,

[1] H. Goering, Arch. f. Elektrot. 1926, Bd. 17, H. 3.



verlustfrei sind, lassen sich die Wellenwiderstände immer als das geometrische Mittel zweier Blindwiderstände darstellen. Solche Blindwiderstände sind die bekannten Kurzschluß- und Leerlaufwiderstände des Vierpoles, welche ihrer Definition nach Zweipolwiderstände sind. Die Zweipolwiderstände wiederum, im engeren Sinne alle Scheinwiderstände verlustloser Zweipole mit einer endlichen Anzahl von Schaltelementen, lassen sich nun durch folgende, von G. A. Campbell[1] zuerst aufgestellte, später von R. M. Foster[2] streng abgeleitete Gleichung ausdrücken:

$$\mathfrak{S} = j\omega S \frac{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2)\ldots(\omega_{2n}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)\ldots(\omega_{2n-1}^2 - \omega^2)}. \tag{1}$$

Hierin gilt für die reelle Konstante:

$$S \geq 0$$

und für die sogenannten Eigenfrequenzen:

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_{2n-1} \leq \omega_{2n} \leq \infty.$$

Wollen wir jetzt einen nützlichen Gebrauch von dieser Formel machen, so müssen vorerst für die betrachteten Siebgebilde, außer der Verlustfreiheit, noch zwei weitere Voraussetzungen gemacht werden. Und zwar werde angenommen, daß ihr Dämpfungsmaß zwischen zwei Grenzfrequenzen gleichförmig Null bleibt und die Wellenwiderstände, außer bei den Frequenzen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, nur noch bei den Grenzfrequenzen Null- und Unendlichkeitsstellen haben. Wir bezeichnen solche Siebkettenformen, bei denen diese Voraussetzungen erfüllt sind, fortan als „abgestimmt".

Die Wellenwiderstände lassen sich nun allgemein durch die Gleichung

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{U}_k \cdot \mathfrak{U}_l} \tag{2}$$

ausdrücken, wo $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$ die schon erwähnten Kurzschluß- und Leerlaufwiderstände sind. Definiert man weiter eine mittlere Frequenz im Spalt

$$\omega_m = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \tag{3}$$

als das geometrische Mittel der beiden Grenzfrequenzen $\omega_1 < \omega_2$, setzt den stets reellen Wellenwiderstandswert bei dieser Frequenz

$$\mathfrak{Z}_{(\omega = \omega_m)} = \mathfrak{Z}_m, \tag{4}$$

führt sodann die relative Loch- oder Spaltbreite

$$\vartheta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_m} \tag{5}$$

und das Frequenzverhältnis

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_m} \tag{6}$$

ein, so erhält man aus (2) in Verbindung mit (1) für alle abgestimmten Siebgebilde nach einiger Rechnung folgende vier Gleichungsformen:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_m \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}{1 - \eta^2\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_m \sqrt{\frac{1 - \eta^2\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}{1 - \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}}, \tag{8}$$

[1] G. A. Campbell, The Bell System Techn. Journal 1922, Vol. 1, p. 30.
[2] R. M. Foster, The Bell System Techn. Journal 1924, Vol. 3, p. 259.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_m \sqrt{1 - \frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}. \tag{10}$$

Damit haben wir die Berechnung der Wellenwiderstände abgestimmter Siebgebilde ein für allemal erledigt. Es leuchtet ein, daß es jedenfalls sehr praktisch sein muß, wenn die Wellenwiderstände mit zur Berechnung der Resonanzkurven herangezogen werden. Dabei ist als besonders vorteilhaft hervorzuheben, daß man den Siebkettenschaltungen meistens ohne weiteres ansehen kann, welche der obigen vier Wellenwiderstandsformen zu ihnen gehören. Denn für große Dämpfungswerte und bei Ohmschen Endwiderständen gehen die Wellenwiderstände, wie die Vierpoltheorie lehrt, direkt in die Scheinwiderstände des Vierpoles an den entsprechenden Seiten über. Da nun fast immer gerade bei $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ hohe Dämpfungswerte vorliegen, so ist bei solchen Schaltungen die Auffindung der zugehörigen Wellenwiderstandsformen besonders einfach.

Nach Aufzählung aller fraglichen Wellenwiderstandsformen wenden wir uns nunmehr den Resonanzkurven selbst zu. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung symmetrischer Vierpole mit beiderseits gleichen Ohmschen Abschluß-

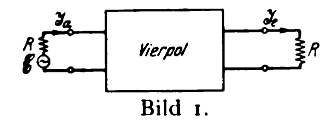


Bild 1.

widerständen R, da dieser Fall gewissermaßen als Grundlage für die meisten anderen Fälle dienen kann. Die Begründung hierfür ist in der eingangs zitierten Arbeit von demselben Verfasser zu finden. Besteht der Vierpol aus n gleichen symmetrischen Einzelgliedern (symmetrischer Kettenleiter), so ist bei einer EMK $\mathfrak{E}$ für den Verbraucherstrom (Bild 1):

$$\mathfrak{J}_e = \frac{\mathfrak{E}}{2R\,\mathfrak{Cos}\,n g + \left(\mathfrak{Z} + \frac{R^2}{\mathfrak{Z}}\right)\mathfrak{Sin}\,n g}. \tag{11}$$

Hierin ist g, das Fortpflanzungsmaß pro Glied, gegeben durch die Gleichung

$$g = b + j a, \tag{12}$$

wo b das Dämpfungsmaß und a das Winkelmaß bedeutet.

Beschränkt man sich in der Folge auf die Betrachtung der Amplituden des Stromes und setzt für die mittlere Frequenz

$$\left|\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{J}_e}\right|_{(\omega = \omega_m)} = \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right|, \tag{13}$$

wo der Index m die Amplitudenwerte bei dieser Frequenz andeutet, so erhält man für die sogenannte reduzierte Resonanzkurve außerhalb des Siebgebietes ($\mathfrak{Z}$ imaginär, $\sin n a = 0$) folgende Formel:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right| = \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right| \frac{1}{\sqrt{4R^2 + \left(|\mathfrak{Z}| + \frac{R^2}{|\mathfrak{Z}|}\right)^2 \mathfrak{Sin}^2\,n b}}. \tag{14}$$

Diese Kurve hat Nullstellen bei

$$b = \infty \tag{15}$$

und für $b \neq 0$ bei

$$\mathfrak{Z} = 0, \tag{16}$$

$$|\mathfrak{Z}| = \infty, \tag{17}$$

sowie weitere Extremwerte an den Stellen, wo

$$\left(1 - \frac{R^2}{|\mathfrak{Z}|^2}\right) \mathfrak{Sin}\, n\, b \frac{d|\mathfrak{Z}|}{d\omega} + \left(|\mathfrak{Z}| + \frac{R^2}{|\mathfrak{Z}|}\right) \frac{d\, \mathfrak{Sin}\, n\, b}{d\omega} = 0 \tag{18}$$

wird. Da aber Gleichung (18) selten anders als zu numerischen Ausrechnungen brauchbar ist, so stellt sie ein gewisses Hemmnis für eine allgemeine Diskussion der Resonanzkurve dar. Wir werden jedoch später bei der Betrachtung von Schaltungen sehen, daß man diese Gleichung in den meisten Fällen überhaupt nicht zu beachten braucht.

Für große Dämpfungen, bei denen

$$\mathfrak{Sin}\, n\, b \approx \mathfrak{Cof}\, n\, b \approx \frac{1}{2} e^{n\, b} \tag{19}$$

gilt, wird aus (11):

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right| \approx \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right| \frac{2}{|\mathfrak{Z}| + \frac{R^2}{|\mathfrak{Z}|}} e^{-n\, b}. \tag{20}$$

Bei gleichen End- und Wellenwiderständen kann also die Gesamtdämpfung n b als Vergleichsmaß für die Resonanzkurven benutzt werden, was für viele Fälle sehr praktisch ist.

Innerhalb des Spaltes ($\mathfrak{Z}$ reell, $b = 0$) erhält man aus (11):

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right| = \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{em}}\right| \frac{1}{\sqrt{4 R^2 + \left(\mathfrak{Z} - \frac{R^2}{\mathfrak{Z}}\right)^2 \sin^2 n\, a}}. \tag{21}$$

Maxima dieser Formel liegen vor, wenn

$$\mathfrak{Z} - R = 0 \tag{22}$$

und

$$\sin n\, a = 0 \tag{23}$$

ist. Im letzteren Falle sind aber die Stellen $\mathfrak{Z} = 0$ und $\mathfrak{Z} = \infty$ auszunehmen, was mit Hilfe von (1), bei Einführung der Größen $\mathfrak{U}_k$ und $\mathfrak{U}_l$ in (21), deutlich gezeigt werden kann. Die Größe der Maxima ist, wie aus (21) leicht abgeleitet wird:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right|_{max} = \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{em}}\right| \frac{1}{2 R}. \tag{24}$$

Weitere Extremstellen, zu denen vor allen Dingen die Minimalstellen gehören, ergeben sich, wenn die Gleichung

$$\left(1 + \frac{R^2}{\mathfrak{Z}^2}\right) \sin n\, a \frac{d\mathfrak{Z}}{d\omega} + \left(\mathfrak{Z} - \frac{R^2}{\mathfrak{Z}}\right) \frac{d \sin n\, a}{d\omega} = 0 \tag{25}$$

erfüllt ist. Auch diese Gleichung ist genau wie (18) kaum anders als durch numerische Ausrechnungen lösbar. Wir können sie aber in den meisten Fällen überhaupt entbehrlich machen, wenn wir in (21) $\sin n\, a = 1$ setzen. Es entsteht dann folgende Form:

$$y = \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{em}}\right| \frac{1}{\mathfrak{Z} + \frac{R^2}{\mathfrak{Z}}}. \tag{26}$$

Mit dieser Funktion haben wir eine Kurve der Mindestwerte der Resonanzkurve gewonnen; denn keiner ihrer Werte kann von denen der Gleichung (21) unterschritten werden. Stellt man dabei fest, daß der Verlauf von y bereits den Anforderungen genügt, die man an eine Siebkurve stellen muß, so gilt das erst recht für die Resonanzkurve selbst. Da nun y nur von den End- und Wellenwiderständen abhängig ist, so hat man es in der Hand, in einfachster Weise weitgehende Schlüsse auf die Form der Resonanzkurve ziehen zu können, ohne diese berechnen zu müssen.

Nachdem wir die Resonanzkurve des Verbraucherstromes derart ausführlich behandelt haben, können wir uns mit der Resonanzkurve des Erzeugerstromes um so kürzer befassen. Die allgemeine Formel für den Erzeugerstrom eines n-gliedrigen symmetrischen Kettenleiters lautet (Bild 1):

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{E} \frac{\mathfrak{Cof}\, n\, g + \frac{R}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Sin}\, n\, g}{2 R\, \mathfrak{Cof}\, n\, g + \left(\mathfrak{Z} + \frac{R^2}{\mathfrak{Z}}\right) \mathfrak{Sin}\, n\, g}. \tag{27}$$

Außerhalb des Spaltes hat diese Formel für uns nur Interesse, wenn mehrere Siebgebilde an der Erzeugerseite parallel geschaltet sind, so daß befürchtet werden muß, daß sich gegenseitig schädliche Nebenschlüsse bilden. Wir können diese Verhältnisse in einfacher Weise überblicken, wenn wir für die Frequenzen, die in die Durchlässigkeitsbereiche benachbarter Siebketten fallen, die meist zutreffende Voraussetzung großer Dämpfungswerte machen. Es wird dann für die reduzierte Resonanzkurve, bei Substitution von

$$\left|\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{J}_a}\right|_{(\omega = \omega_m)} = \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{am}}\right| \tag{28}$$

für eine mittlere Frequenz ω_m im Spalt und bei Berücksichtigung von (19) aus Gleichung (27):

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_a}{\mathfrak{J}_{am}}\right| \approx \left|\frac{\mathfrak{E}_m}{\mathfrak{J}_{am}}\right| \frac{1}{\sqrt{R^2 + |\mathfrak{Z}|^2}}. \tag{29}$$

Dieses Ergebnis besagt, daß bei Parallelschaltung mehrerer Siebketten an der Erzeugerseite diejenigen Schaltungen zu bevorzugen sind, deren Wellenwiderstandsbeträge bei wachsender Entfernung vom Spalt dem Werte $|\mathfrak{Z}| = \infty$ zustreben.

Innerhalb des Spaltes wird der Verlauf des Erzeugerstromes von Wichtigkeit, sobald wir Siebketten mit Verlusten im Durchlässigkeitsbereich vor uns haben; denn dann kann die Größe dieser Verluste ohne weiteres durch einen gegenseitigen Vergleich von Verbraucher- und Erzeugerstrom festgestellt werden. In unserem Falle verlustfreier Siebgebilde ist aber eine solche Betrachtung unnötig, während das sonstige Wissenswerte über das Sieb bereits in der Resonanzkurve des Verbraucherstromes enthalten ist, so daß eine eingehendere Diskussion von (27) hier übergangen werden kann.

Nunmehr sind wir genügend vorbereitet, um uns der Untersuchung bestimmter Siebkettenschaltungen zuwenden zu können.

II. Abgestimmte symmetrische Siebketten mit monoton verlaufenden Dämpfungskurven außerhalb des Spaltes.

1. Fortpflanzungsmaß nach (33).

a) Wellenwiderstand nach (7).

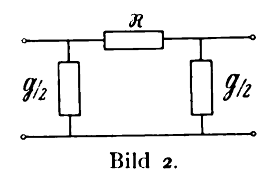
Wie aus der Überschrift zu ersehen ist, ziehen wir nur solche symmetrische Siebketten in den Kreis unserer Betrachtungen, die abgestimmt sind und deren Dämpfungskurven außerhalb des Spaltes, vom Werte Null an den Grenzfrequenzen beginnend, mit wachsender Entfernung vom Siebgebiet monoton, also niemals vom Steigen ins Fallen übergehend, entweder einem Grenzwerte oder unendlich hohen Werten zustreben. Die Anordnung der einzelnen Schaltungen soll dabei in der Weise erfolgen, daß immer Siebe mit gleicher Dämpfungskurve in der Reihenfolge ihrer Wellenwiderstände, wie sie durch die Gleichungen (7), (8), (9) und (10) gegeben ist, behandelt werden. Wir beschränken uns außerdem stets auf die Angabe eines einzigen Gliedes einer Siebkette, da sich dann nach der Kettenleitertheorie der Übergang zu n Gliedern durch einfache Beziehungen bewerkstelligen läßt.

Zuerst sei in Bild 2 ein symmetrisches Dreieckglied eines Kettenleiters in allgemeinster Form angeführt, wo $\mathfrak{R}$ Scheinwiderstände, $\mathfrak{G}$ Scheinleitwerte bedeuten. Nach K. W. Wagner[1] hat man für den Wellenwiderstand:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}} \frac{1}{1+\frac{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}}{4}}} \tag{30}$$

und für das Fortpflanzungsmaß:

$$\mathfrak{Cof}\, g = 1 + \frac{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}}{2}. \tag{31}$$


Bild 2.

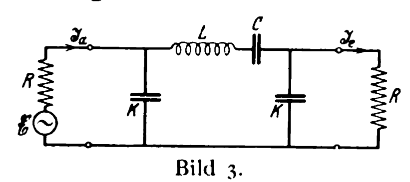


Bild 3.

Im folgenden Bild 3 ist ein entsprechendes, durch Ohmsche Widerstände abgeschlossenes Siebkettenglied nach Wagner[2] zur Darstellung gelangt. Es mag in diesem Zusammenhange erwähnt werden, daß wir fortan stets die Schaltelemente von $\mathfrak{R}$ durch L und C, die Schaltelemente von $\mathfrak{G}$ durch M und K bezeichnen wollen. Es ist nun nach Bild 2 und Bild 3:

$$\mathfrak{R} = \frac{1-\omega^2 L C}{j\,\omega\, C}, \quad \frac{\mathfrak{G}}{2} = j\,\omega\, K. \tag{32}$$

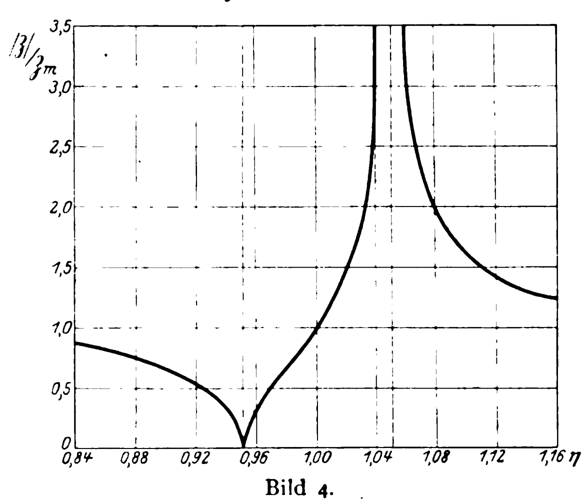


Bild 4.

Führt man, wie früher, die charakteristischen Größen eines Siebgebildes ω_m, $\mathfrak{Z}_m$, ϑ ein, so erhält man für den Wellenwiderstand ohne weiteres die Gleichung (7). In Bild 4 ist der Verlauf der Absolutwerte $|\mathfrak{Z}|/\mathfrak{Z}_m$ für $\vartheta = 0{,}1$ in Abhängigkeit von dem Frequenzverhältnis η aufgetragen, wobei die gestrichelten Linien die theoretischen Lochgrenzen andeuten.

Für das Fortpflanzungsmaß ergibt sich:

$$\mathfrak{Cof}\, g = \cos a\, \mathfrak{Cof}\, b = \frac{2+\vartheta^2}{\vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}}\left(1-\eta_1^2\,\frac{2}{2+\vartheta^2}\right). \tag{33}$$

Da uns hierin nur der Verlauf des Dämpfungsmaßes b interessiert, ist der Verlauf desselben in Bild 5 für den Wert $\vartheta = 0{,}1$ aufgetragen. Man erkennt, daß

[1] K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. 1915, Bd. 3, H. 10, 11.
[2] K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. 1919, Bd. 8, H. 2, 3.

die Dämpfungskurve nach den niedrigen Frequenzen hin schwächer ansteigt als nach den hohen Frequenzen zu. Tatsächlich folgt aus (33), wenn $0 < \vartheta < \infty$ ist, daß b bei $\eta = 0$ einen endlichen Wert annimmt und bei $\eta = \infty$ unendlich groß wird. Dieses eigentümliche Verhalten der Dämpfungskurve bleibt nicht ohne Bedeutung für die Resonanzkurve des Verbraucherstromes, falls b nach (20) als Vergleichsmaß benutzt wird, worauf wohl geachtet werden möge.

Jetzt ermitteln wir noch die Größe der Schaltelemente wie folgt:

$$L = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta \omega_m} \frac{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}{\sqrt{4 + \vartheta^2}}, \quad C = \frac{\vartheta \sqrt{4 + \vartheta^2}}{\omega_m \mathfrak{Z}_m} \frac{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}{4},$$
$$K = \frac{1}{\omega_m \mathfrak{Z}_m} \frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}. \tag{34}$$

Solche Formeln, bei denen die Schaltelemente durch bestimmte, für die Siebketten charakteristische Bestimmungsstücke ausgedrückt sind, findet man in ähnlicher Gestalt bereits bei O. J. Zobel[1] abgeleitet, während unsere Methode der

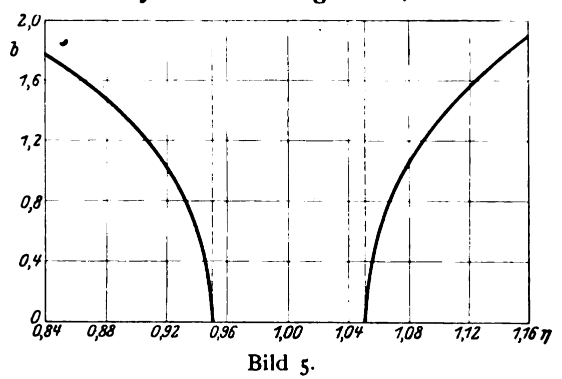


Bild 5.

einheitlichen Darstellung von Wellenwiderstand, Fortpflanzungsmaß und Schaltelementen in ihren Grundzügen von G. Mücke[2] herrührt. Betreffs der Schaltelemente ist leicht einzusehen, daß die praktische Anwendbarkeit der Siebketten sehr erschwert wird, wenn nicht fertige Daten zu ihrer Berechnung vorhanden sind. Deshalb soll es eine der Aufgaben der vorliegenden Arbeit sein, auch regelmäßig die Schaltelemente der behandelten Siebe mit abzuleiten.

Für die Resonanzkurve des Verbraucherstromes, die wir nunmehr behandeln wollen, kann man sich nach Belieben der Gleichungen (14) oder (21) bedienen. Nützlich ist hierbei die Relation

$$\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,g = \mathfrak{R} = \frac{j\,\eta\,\mathfrak{Z}_m (\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2})}{\vartheta \sqrt{4 + \vartheta^2}} \left[1 - \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2\right],$$

die man aus (30), (31), (32) und (34) erhält. Dann kann die Resonanzkurve bei gleichzeitiger Benutzung der Wellenwiderstandsgleichung (7) und wenn die Verhältniszahl

$$\zeta = \frac{R}{\mathfrak{Z}_m} \tag{35}$$

eingeführt wird, ohne große Mühe in folgende Form gebracht werden:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right| = \sqrt{\zeta^2 + \frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \frac{4}{\eta^2 \vartheta^2 (4+\vartheta^2)(\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2})^2}\left[\eta^4 \zeta^2 + \eta^2 (1-\zeta^2)\left(\frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 - 1\right]^2}}. \tag{36}$$

[1] O. J. Zobel, The Bell System Techn. Journal 1923, Vol. 2, p. 1.

[2] Nicht veröffentlicht.

Schon an dieser ziemlich komplizierten Formel erkennt man deutlich, wie nützlich eine Theorie sein muß, die allgemeine Diskussionen der Resonanzkurve ohne eigentliche Berechnung derselben ermöglicht. Wenn wir die Resonanzkurve hier dennoch ableiten, so geschieht das aus besonderen, später im Abschnitt c) genauer dargelegten Gründen.

Die Kurve (36) ist, wie leicht nachzuweisen, für $0 \leq \zeta \leq 1$ immer einwellig und hat ein Maximum bei

$$\eta_{max} = \sqrt{-\frac{1-\zeta^2}{2\zeta^2}\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{1-\zeta^2}{2\zeta^2}\right)^2\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^4 + \frac{1}{\zeta^2}}}\,. \quad (37)$$

Bild 6.

welches man auch aus der Gleichung (22) in Verbindung mit Bild 4 graphisch ermitteln kann. Wenn jedoch $\zeta > 1$ ist, kann die Kurve auch zweiwellig werden. Wir bekommen nämlich dann zwei weitere Extremstellen bei den Frequenzen

$$\eta_{extr} = \sqrt{-\frac{1-\zeta^2}{6\zeta^2}\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1-\zeta^2}{6\zeta^2}\right)^2\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^4 - \frac{1}{3\zeta^2}}}\,. \quad (38)$$

Bild 7.

von denen die eine einem Maximum, die andere einem Minimum angehört. Da diese Extremstellen mit denen der Gleichungen (18) oder (25) identisch sind, so müßten diese Gleichungen im allgemeinen Falle berücksichtigt werden, was wir doch nach Möglichkeit vermeiden wollten. Glücklicherweise können wir bei günstigen Formen der Resonanzkurve auch ohne diese Gleichungen auskommen, was ebenfalls im Abschnitt c) seine nähere Erläuterung findet.



Zunächst haben wir in den Bildern 6, 7 und 8 für den Wert $\vartheta = 0,1$, der künftig bei allen Kurvendarstellungen verwendet werden soll, den Verlauf der Resonanzkurve für die einzelnen Fälle $\zeta = 0,5$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$ verzeichnet. Die stark ausgezogenen Kurven bedeuten die Resonanzkurven selbst, während die schwächeren Kurven die in folgender Formel

$$y = \frac{1 + \zeta^2}{\sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{1}{\eta^2}\left(\dfrac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}{1 - \eta^2\left(\dfrac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}} + \zeta^2 \sqrt{\dfrac{1 - \eta^2\left(\dfrac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}{1 - \dfrac{1}{\eta^2}\left(\dfrac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2}}} \tag{39}$$

gegebenen Mindestwerte der Resonanzkurven nach (26) darstellen, deren Berechnung, unter Hinzuziehung der bereits bekannten Werte von (7) und (8) verhältnismäßig geringe Mühe macht.

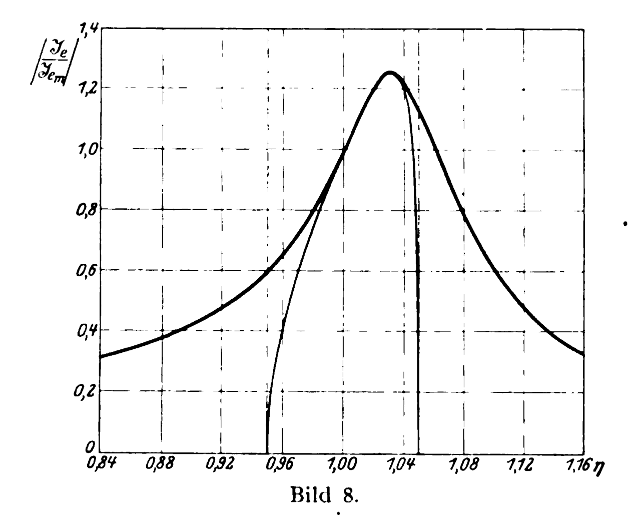


Bild 8.

Das wichtigste, was nun in den drei Bildern zum Ausdruck kommt, ist, daß unsere Schaltung ganz und gar nicht die gewünschten Siebeigenschaften aufweist. Denn selbst wenn man eine Abweichung von 10% von der Maximalamplitude zuläßt, so haben die Kurven noch immer nicht den Durchlässigkeitsbereich, den man nach der Dämpfungskurve erwarten sollte. Dieses ungünstige Resultat ist auch keineswegs ein überraschendes zu nennen. Denn soll die Resonanzkurve innerhalb des Spaltes gleich hohe und dabei größtmögliche Amplituden haben, so muß für alle Frequenzen im Siebgebiet entweder nach (22) $\mathfrak{Z} - R = 0$ oder, mit Ausnahme der Grenzfrequenzen, nach (23) $\sin n a = 0$ sein. Betrachtet man jetzt Bild 4, so sieht man, wie wenig die erste Voraussetzung zutrifft, wofür auch die Mindestkurven den deutlichsten Beweis bilden. Ebensowenig ist die zweite Voraussetzung erfüllt, denn nach (33) ist nur an den Grenzfrequenzen $\sin a = 0$, während im übrigen Siebgebiet das Winkelmaß a nach Zobel[1] ununterbrochen mit der Frequenz zunimmt. Man könnte allerdings daran denken, eine bestimmte Anzahl von n Gliedern unserer Schaltung aneinanderzureihen, da die Gleichung $\sin n a = 0$ dann natürlich auch für andere Frequenzen im Spalt Nullstellen aufzuweisen hätte. Doch leuchtet ein, daß dieser Weg, wegen der damit verbundenen Materialanhäufung, nicht der gegebene sein kann.

[1] O. J. Zobel, l. c.

Alles in allem wird bestätigt, was bereits H. Backhaus[1] unter gewissen Annahmen nachzuweisen vermochte, daß die vorliegende Schaltung, wenigstens für $\vartheta = 0{,}1$, in keiner Weise den Forderungen einer Siebkette gerecht wird.

b) Wellenwiderstand nach (8).

Das folgende Sieb ist ein Sternglied, dessen allgemeine Form in Bild 9 wiedergegeben ist. Hier hat man nach Wagner für den Wellenwiderstand:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}\left(1 + \frac{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}}{4}\right)}, \tag{40}$$

während für das Fortpflanzungsmaß dieselbe Beziehung gilt wie die in (31) angegebene.

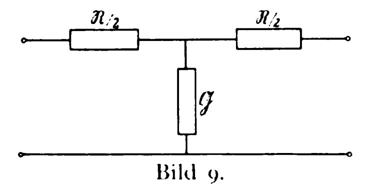


Bild 9.

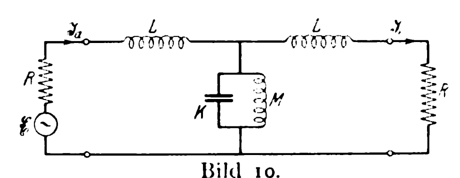


Bild 10.

In Bild 10 ist das betreffende, durch Ohmsche Endwiderstände abgeschlossene Sieb zur Darstellung gelangt. Es ist nach Bild 9 und 10:

$$\frac{\mathfrak{R}}{2} = j\,\omega\,L, \qquad \mathfrak{G} = \frac{1 - \omega^2 M K}{j\,\omega\,M}. \tag{41}$$

Bild 11.

Mit Einführung von ω_m, $\mathfrak{Z}_m$, ϑ erhält man für den Wellenwiderstand die in (8) aufgeführte Form, von der in Bild 11 die Absolutwerte $|\mathfrak{Z}|/\mathfrak{Z}_m$ in Abhängigkeit von η aufgetragen sind.

Für Fortpflanzungsmaß und Dämpfungskurve gelten natürlich Gleichung (33) und Bild 5, sowie die dazu gemachten Bemerkungen.

Die Schaltelemente erhält man nach einiger Rechnung aus:

$$L = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}\,\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}, \quad M = \frac{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m \sqrt{4 + \vartheta^2}}{\omega_m}\,\frac{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}{4},$$
$$K = \frac{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}{\vartheta\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m \sqrt{4 + \vartheta^2}}. \tag{42}$$

[1] H. Backhaus, Wiss. Veröff. a. d. Siemenskonz. 1924, Bd. 3, H. 2.

Damit sind die wichtigsten Größen bestimmt, mit deren Hilfe die Resonanzkurve, bei Hinzuziehung der Hilfsgleichung

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{G} = \frac{j\eta\left(\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}\right)}{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m\sqrt{4+\vartheta^2}}\left[1 - \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2\right]$$

und der Wellenwiderstandsgleichung (8) ohne weiteres in folgende Form übergeführt werden kann:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right| = \sqrt{\zeta^2 + \frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \frac{4}{\eta^2\vartheta^2(4+\vartheta^2)\left(\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}\right)^2}\left[\eta^4 - \eta^2(1-\zeta^2)\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 - \zeta^2\right]^2}} \tag{43}$$

Diese Kurve ist für $\zeta \geq 1$ stets einwellig mit einem Maximum bei

$$\eta_{max} = \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{2}\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{1-\zeta^2}{2}\right)^2\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^4 + \zeta^2}}, \tag{44}$$

das sich auch mit Hilfe der Gleichung (22) graphisch ermitteln läßt. Bei $0 \leq \zeta < 1$ kann (43) noch weitere Extremstellen aufweisen, die durch die Formel

$$\eta_{extr} = \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{6}\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1-\zeta^2}{6}\right)^2\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^4 - \frac{\zeta^2}{3}}} \tag{45}$$

gegeben sind. Wir brauchen uns aber nicht näher mit diesen Gleichungen zu befassen, da die gleichen Betrachtungen, wie die über die vorige Schaltung gepflogenen, zu dem Ergebnis führen, daß auch diese Schaltung den Anforderungen an eine Siebkette nicht gerecht wird. Durch den in den Bildern 8, 7 und 6 für die Fälle $\zeta = 0{,}5$, $\zeta = 1$ und $\zeta = 2$ stark gezeichneten Verlauf der Resonanzkurve wird das wenig geeignete Verhalten der Schaltung besonders deutlich illustriert[1]. Die schwächeren Kurven in den Bildern stellen die aus Gleichung

$$y = \frac{1+\zeta^2}{\sqrt{\dfrac{1-\eta^2\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2}{1-\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2}} + \zeta^2\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2}{1-\eta^2\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2}}} \tag{46}$$

hervorgehenden Mindestwerte von (43) dar, zu deren bequemer Berechnung am besten die bereits vorhandenen Werte von (7) und (8) benutzt werden.

c) Wellenwiderstand nach (9).

Das dritte Sieb hat wiederum die Form eines Sterngliedes, wie aus Bild 12 zu ersehen ist. Es wurde ebenfalls, wie die meisten folgenden Siebe, zuerst von Wagner angegeben. Nach dem Bilde ist:

Bild 12.

$$\frac{\mathfrak{R}}{2} = \frac{1-\omega^2 L C}{j\omega C}, \quad \mathfrak{G} = j\omega K. \tag{47}$$

Für den Wellenwiderstand erhält man die aus (9) hervorgehende und in Bild 13 aufgetragene Form, wobei man konstatiert, daß die Wellenwiderstandsbeträge mit

[1] Man beachte, daß die Bilder für $\zeta = 0{,}5$ und $\zeta = 2$ jetzt vertauscht sind.

wachsender Entfernung vom Spalt unendlich hohen Werten zustreben. Siebketten mit solchen Wellenwiderstandsformen sind also nach (29) geeignet zu Parallelschaltungen, was schon von F. Lüschen und G. Krause[1] richtig erkannt wurde. Außerdem unterscheidet sich dieser Wellenwiderstand von den vorhergehenden vorteilhaft durch seinen flacheren Verlauf in der Nähe der mittleren Frequenz im Spalt, der einen günstigen Verlauf der Resonanzkurve im Siebgebiet stark in den Bereich der Möglichkeit rückt. Wir werden auf diesen Punkt sogleich zurückkommen.

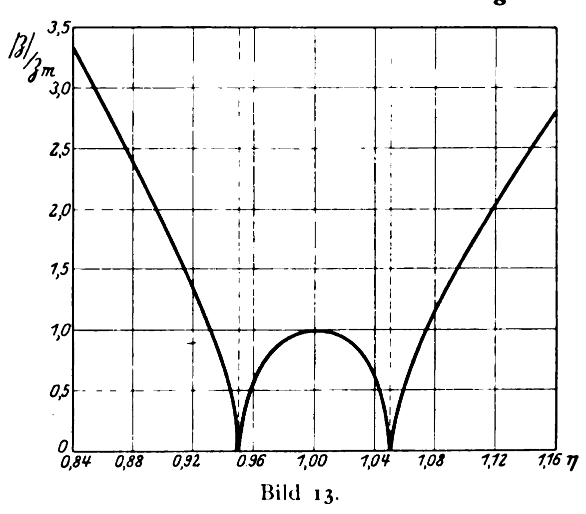


Bild 13.

Zuvor berechnen wir die Schaltelemente wie folgt:

$$L = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta\,\omega_m}, \quad C = \frac{\vartheta}{\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}\left(\frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2, \quad K = \frac{2}{\omega_m\,\mathfrak{Z}_m\sqrt{4+\vartheta^2}}. \qquad (48)$$

Bild 14.

Mit Benutzung der Relation

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{G} = \frac{2\,j\,\eta}{\mathfrak{Z}_m\sqrt{4+\vartheta^2}},$$

die diesmal besonders einfach ist, und der Wellenwiderstandsgleichung (9) ergibt sich für die Resonanzkurve:

[1] F. Lüschen u. G. Krause, Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemenskonz. 1922, Bd. 1, Heft 3.

$$\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}} = \sqrt{\zeta^2 + \frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \frac{\eta^2}{4+\vartheta^2}\left[1-\zeta^2-\frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2\right]^2}}. \tag{49}$$

Die Kurve ist für $0 \leq \zeta < 1$ und $0 < \vartheta$ stets zweiwellig mit den beiden auch aus (22) herleitbaren Maximastellen

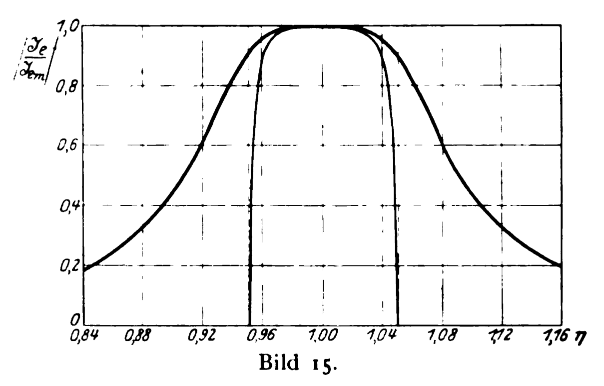


Bild 15.

$$\eta_{max} = \sqrt{\frac{2+\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2+\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2}\right]^2 - 1}}, \tag{50}$$

während sie bei $\zeta > 1$ einwellig wird, wobei das vorherige Minimum in ein Maximum übergeht. Diese Extremstelle ergibt sich aus:

$$\eta_{extr} = \sqrt{\frac{2+\vartheta^2(1-\zeta^2)}{6} + \sqrt{\left[\frac{2+\vartheta^2(1-\zeta^2)}{6}\right]^2 + \frac{1}{3}}}. \tag{51}$$

Bild 16.

Die in den Bildern 14, 15 und 16 für die üblichen ζ-Werte aufgetragenen Resonanzkurven zeigen nun für den einen Fall $\zeta = 1$ den schon als möglich hingestellten günstigen Verlauf, woraus hervorgeht, daß wir diesmal ein wirkliches Sieb vor uns haben. Was die anderen beiden Fälle anbelangt, so hat die Resonanzkurve bei $\zeta = 0{,}5$ ein zu tiefes Minimum und verläuft bei $\zeta = 2$ nach unten hin zu breit, so daß man günstige Kurven zwischen diesen Werten zu suchen hat, was ja auch für den Wert $\zeta = 1$ bestätigt wird.

Wie die gleichzeitig mit eingezeichneten Mindestkurven

$$y = \frac{1+\zeta^2}{\sqrt{1-\frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2} + \frac{\zeta^2}{\sqrt{1-\frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2}}} \tag{52}$$

erkennen lassen, hätte sich eine besondere Berechnung der Resonanzkurve innerhalb des Spaltes für den günstigen Fall $\zeta = 1$ überhaupt erübrigt. Denn schon die Mindestkurve weist einen solchen Verlauf auf, daß man, bei Zulassung von Änderungen, der Maximalamplitude bis zu 10%, mit guter praktischer Näherung von einem Durchlässigkeitsbereich sprechen kann, wie ihn die Dämpfungskurve vorschreibt. Da es dabei nur auf die prozentualen Abweichungen der Kurvenbreiten von der theoretischen Lochbreite ankommt, so gilt unser Ergebnis nach (52) unabhängig von ϑ, also ganz allgemein.

Wir wollen uns im folgenden nur mit dieser günstigen Resonanzkurve etwas näher befassen. Innerhalb des Spaltes wird, wie gesagt, jede weitere Untersuchung der Resonanzkurve, und infolgedessen auch eine solche der komplizierten Gleichung (25), durch die Mindestkurve überflüssig gemacht. Will man eine ähnliche Methode auch außerhalb des Spaltes anwenden, so muß man jetzt umgekehrt Höchstkurven für die Resonanzkurven konstruieren. Dies kann nach (14) dadurch geschehen, daß man von allen Dämpfungskurven diejenigen auswählt, die bei gleicher Lochbreite in ihrem ganzen Verlauf die kleinstmöglichen Dämpfungswerte aufweisen. Zu solchen Mindestkurven gehören beispielsweise die Dämpfungskurven von Einzelgliedern eines Kettenleiters, verglichen mit der Dämpfungskurve des ganzen Kettenleiters. Schwieriger liegen die Verhältnisse, wenn die Mindestkurven aus Dämpfungskurven verschiedener Einzelglieder herausgesucht werden sollen. Es ist aber bei der Konstruktion von Siebketten unwirtschaftlich, komplizierte Schaltungen an Stelle von einfachen, wenig Elemente enthaltenden Gebilden zu benutzen, wenn damit keine Versteilerung der Dämpfungskurve erzielt wird. Läßt man sich also von diesen Gesichtspunkten leiten, so kann man sagen, daß in solchem Falle die einfachsten Siebe auch zugleich die kleinsten Dämpfungswerte haben. Jedoch ist nun keineswegs zu erwarten, daß man schon bei einer einzigen Schaltung eine Dämpfungskurve antrifft, die in allen ihren Teilen die unterste Grenze für die anderen bildet. Zum Beispiel zeigt nach Bild 5 die Dämpfungskurve vorliegender Schaltung nur für den nach den niedrigen Frequenzen verlaufenden Kurvenast einen derartigen unteren Grenzfall (unsymmetrische Siebketten sind hiervon natürlich ausgenommen) an, während der andere Kurvenast von dem entsprechenden einer später behandelten Dämpfungskurve noch unterschritten wird.

Der gegebene Weg, den man einzuschlagen hat, ist nun der, daß man nachprüft, ob schon die Resonanzkurven der einfachsten Siebe sich der Form eines Rechtecks nähern, dessen Breite durch die theoretische Lochbreite und dessen Höhe durch die Maximalamplitude im Spalt gegeben ist. In unserem Falle zeigt die Kurve nach Bild 15 tatsächlich mit gewisser Annäherung diese Rechteckform. Sollte indessen der Verlauf der Resonanzkurve außerhalb des Spaltes für manche Zwecke zu flach sein, so verwendet man solche Siebgebilde, die mit dem Vorstehenden in bezug auf die End- und Wellenwiderstände übereinstimmen, hingegen bei gleicher Lochbreite steilere Dämpfungskurven haben. Man erhält dann Kurven, die allgemein nach (14) außerhalb des Spaltes monoton verlaufen, wenn das gleiche auch für die zugehörigen Dämpfungskurven und die Höchstkurve nach (49) gilt. Da dies hier für unseren Fall glücklicherweise zutrifft, so brauchen wir zur Feststellung der nötigen Steilheit nicht immer den ganzen Verlauf der Kurve aufzuzeichnen, sondern können uns mit der Angabe der wichtigsten Punkte begnügen, die man nach (14) leicht ermitteln kann. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß unter diesen Verhältnissen die sonst sehr hinderliche Gleichung (18) für uns völlig belanglos ist. Auf ähnliche Weise wie die eben beschriebene lassen sich nun auch die Resonanzkurven für andere Werte von ϑ behandeln, worauf wir hier nur noch hinweisen wollen.

Es verdient nochmals nachdrücklich in Erinnerung gebracht zu werden, daß wir in allen Formeln für die Resonanzkurve, außer der Verlustfreiheit der Sieb-



gebilde, keinerlei Vernachlässigungen eingeführt haben; die daraus gezogenen Folgerungen gelten also sonst vollkommen streng. Im vorliegenden Falle behalten unsere Betrachtungen sogar ausnahmsweise noch ihre Gültigkeit, wenn die Spulen des Siebes nicht vernachlässigbare Ohmsche Widerstände haben. Denn da diese Spulenwiderstände mit den Endwiderständen in Reihe liegen, so kann man dieselben zusammenfassen und die ganze Schaltung wieder als ein durch Ohmsche Endwiderstände abgeschlossenes verlustfreies Siebgebilde betrachten.

Zu erwähnen ist auch, daß bereits Backhaus[1] allgemeine Formeln für unsere Schaltung abgeleitet hat, doch sind seine hierbei angestellten Diskussionen, sollen sie auch für beliebige Entfernungen von einer mittleren Frequenz im Spalt gelten, an bestimmte Voraussetzungen geknüpft.

Zuletzt führen wir noch eine Schaltung an, die mit der in Bild 12 identisch ist. Sie entsteht, wenn der Kondensatorstern in ein Dreieck umgewandelt wird, wie es in Bild 17 geschehen ist. Die Schaltelemente lauten jetzt:

$$L = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta\,\omega_m}, \quad C = \frac{\vartheta^2\sqrt{4+\vartheta^2}}{2\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}, \quad K = \frac{\vartheta}{\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2. \tag{53}$$

Wir haben also in bezug auf die Schaltelemente eine gewisse Wahlfreiheit gewonnen, was mitunter sehr nützlich werden kann.

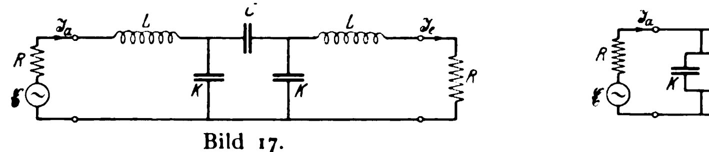


Bild 17.

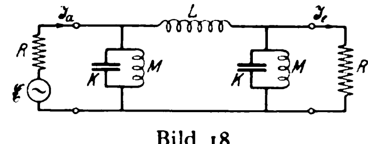


Bild 18.

d) Wellenwiderstand nach (10).

Die letzte Schaltung dieser Serie ist in Bild 18 veranschaulicht. Es ist

$$\mathfrak{R} = j\,\omega\,L, \quad \frac{\mathfrak{G}}{2} = \frac{1-\omega^2 M K}{j\,\omega\,M}. \tag{54}$$

Für den Wellenwiderstand erhalten wir nach (10) den in folgendem Bild 19 verzeichneten Verlauf. Da die Wellenwiderstandsbeträge mit wachsender Entfernung vom Spalt abnehmen, so ist dieses Sieb, im Gegensatz zu dem vorhergehenden, nicht zu Parallelschaltungen geeignet. Jedoch ist infolge des flachen Verlaufes des Wellenwiderstandes im Spalt ebenfalls eine günstige Form der Resonanzkurve zu erwarten.

Die Schaltelemente ergeben sich zu

$$L = \frac{2\,\mathfrak{Z}_m}{\omega_m\sqrt{4+\vartheta^2}}, \quad M = \frac{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2, \quad K = \frac{1}{\vartheta\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}. \tag{55}$$

Daraus erhält man mit Benutzung von

$$\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,g = \mathfrak{R} = \frac{2\,j\,\eta\,\mathfrak{Z}_m}{\sqrt{4+\vartheta^2}}$$

für die Resonanzkurve:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{e\,m}}\right| = \sqrt{\zeta^2+\frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\frac{\eta^2}{4+\vartheta^2}\left[1-\zeta^2+\frac{\zeta^2}{\vartheta^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2\right]^2}} \tag{56}$$

Diese ist für $\zeta > 1$ und $0 < \vartheta$ zweiwellig mit den Maxima bei

$$\eta_{max} = \sqrt{\frac{2\,\zeta^2-\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2\,\zeta^2} \pm \sqrt{\left[\frac{2\,\zeta^2-\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2\,\zeta^2}\right]^2 - 1}} \tag{57}$$

[1] H. Backhaus, l. c.

und einem Minimum bei

$$\eta_{extr} = \sqrt{\frac{2\zeta^2 - \vartheta^2(1 - \zeta^2)}{6\zeta^2} + \sqrt{\left[\frac{2\zeta^2 - \vartheta^2(1 - \zeta^2)}{6\zeta^2}\right]^2 + \frac{1}{3}}}. \qquad (58)$$

Für $0 \leq \zeta \leq 1$ wird die Kurve einwellig, wobei das Minimum der zweiwelligen Form jetzt in ein Maximum übergeht.

Die folgenden Bilder 16, 15 und 14 zeigen, daß sich unsere Schaltung für den Fall $\zeta = 1$ zu Siebzwecken eignet, während für $\zeta = 0,5$ die Resonanzkurve nach unten hin zu breit ausläuft und für $\zeta = 2$ ein zu tiefes Minimum hat.

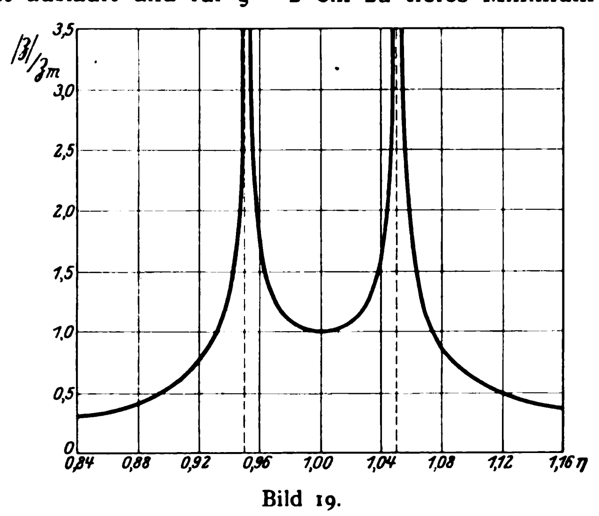


Bild 19.

Die gleichzeitig mit eingetragenen Mindestkurven ergeben sich dabei aus:

$$y = \frac{1 + \zeta^2}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} + \zeta^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}. \qquad (59)$$

Man kann nun leicht nachweisen, daß sowohl die Resonanzkurve als auch die Mindestkurve für den Fall $\zeta = 1$ mit den entsprechenden Formeln der vorhergehenden Schaltung übereinstimmen, so daß die dort gemachten Bemerkungen auch hier wieder gelten.

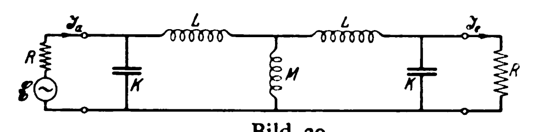


Bild 20.

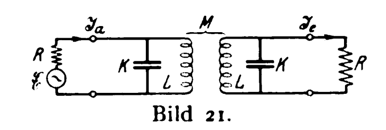


Bild 21.

Eine weitere identische Schaltung entsteht, wenn in Bild 18 das Spulendreieck in einen Spulenstern verwandelt wird, wie es Bild 20 veranschaulicht.

Hier sind die Schaltelemente:

$$L = \frac{\vartheta\, \mathfrak{Z}_m}{\omega_m}\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4 + \vartheta^2}}\right)^2, \quad M = \frac{\vartheta^2\, \mathfrak{Z}_m \sqrt{4 + \vartheta^2}}{2\, \omega_m}, \quad K = \frac{1}{\vartheta\, \omega_m\, \mathfrak{Z}_m}. \qquad (60)$$

Es existiert aber noch eine dritte identische Ausführungsform, die sogar von großer praktischer Bedeutung ist. Man kann nämlich bei Verlustfreiheit den Spulenstern oder das Spulendreieck durch eine rein induktive Kopplung ersetzen, was zu der Schaltungsform nach Bild 21 führt. Bezeichnet man hier mit M die Gegeninduktivität, so ist der sogenannte Kopplungsfaktor gegeben durch



$$\varkappa = \frac{M}{L} = \frac{\vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}}{2+\vartheta^2}, \tag{61}$$

während für die Schaltelemente ist:

$$L = \frac{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}\,\frac{2+\vartheta^2}{2}, \quad K = \frac{1}{\vartheta\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}. \tag{62}$$

Diese in der Hochfrequenztechnik oft vorkommende Siebkette ist infolge ihres Aufbaues für dies Gebiet in der Tat sehr geeignet. Denn bei hohen Frequenzen spielen bekanntlich auch die Eigenkapazitäten der Spulen eine gewisse Rolle, demzufolge die Spulen ihre Eigenschaften als solche zum Teil verlieren. Man kann aber im allgemeinen die Eigenkapazitäten als Nebenschlüsse zu den Spulen darstellen. Somit ist es zweckmäßig, Schaltungen zu verwenden, bei denen den Spulen bereits ein Kondensator parallel liegt, der indessen nicht kleiner als die Eigenkapazität sein darf. Durch entsprechende Nachstimmung läßt sich dann erreichen, daß man die Schaltung ebenso behandeln kann, als wenn gar keine Eigenkapazitäten vorhanden wären.

Allerdings darf nicht unerwähnt bleiben, daß sich auch zwischen den beiden Kopplungsspulen kapazitive Stromwege bilden können. Jedoch ist man gewöhnlich in der Lage, dieselben durch statische Schutzvorrichtungen unschädlich zu machen.

2. Fortpflanzungsmaß nach (64).

a) Wellenwiderstand nach (7).

Wir beginnen jetzt mit einer neuen Serie von Siebkettenschaltungen, die sich von der vorhergehenden durch das Fortpflanzungsmaß unterscheidet. Die einzelnen Schaltungen werden dabei wieder in der Reihenfolge ihrer Wellenwiderstände, wie sie durch die Gleichungen (7), (8), (9) und (10) gegeben ist, aufgeführt.

In der folgenden Schaltung (Bild 22) hat man:

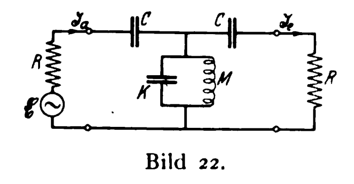


Bild 22.

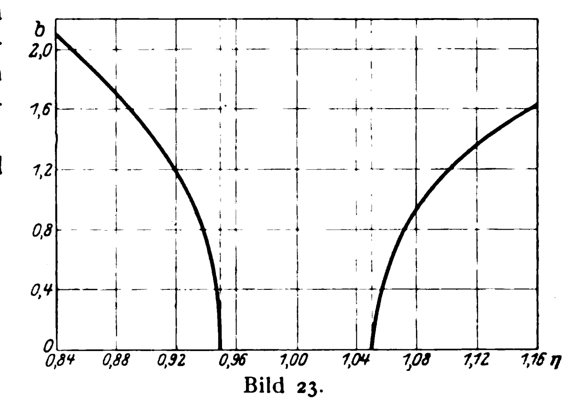


Bild 23.

$$\frac{\Re}{2} = \frac{1}{j\omega C}, \quad \mathfrak{G} = \frac{1-\omega^2 MK}{j\omega M}. \tag{63}$$

Daraus kann man in üblicher Weise das Fortpflanzungsmaß ermitteln, das sich aus folgender Beziehung ergibt:

$$\mathfrak{Cof}\,g = \cos a\,\mathfrak{Cof}\,b = \frac{2+\vartheta^2}{\vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}}\left(1 - \frac{1}{\eta^2}\,\frac{2}{2+\vartheta^2}\right). \tag{64}$$

In Bild 23 ist der Verlauf des daraus folgenden Dämpfungsmaßes in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen. Er bildet zu dem entsprechenden in Bild 5 gewissermaßen das Gegenstück. Denn nach (64) wird das Dämpfungsmaß, wenn die Ungleichung $0 < \vartheta < \infty$ besteht, bei $\eta = 0$ unendlich groß, während b bei $\eta = \infty$ endlich bleibt. Aber nicht nur für die äußersten Frequenzen haben wir dieses entgegengesetzte Verhalten der beiden Dämpfungskurven, sondern es ist ganz

allgemein der nach den höheren Frequenzen verlaufende Kurvenast in Bild 23 niedriger als der entsprechende in Bild 5, während für die nach den tiefen Frequenzen verlaufenden Kurvenäste das Umgekehrte gilt. Diese Feststellung ist wichtig für die Betrachtung der Resonanzkurve außerhalb des Spaltes, was schon früher gelegentlich zur Sprache kam.

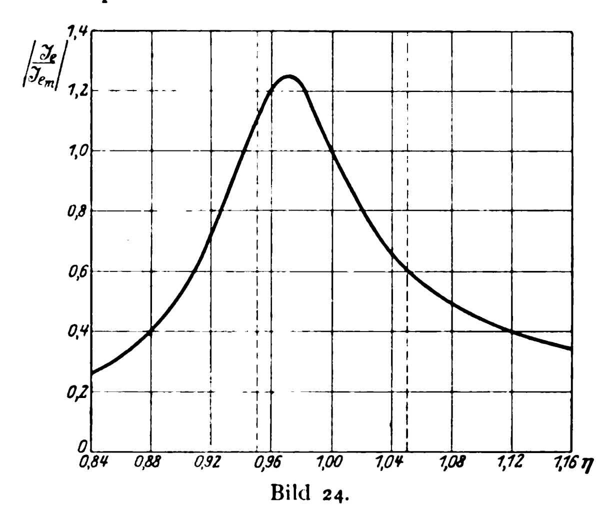


Bild 24.

Weiter finden wir für die Schaltelemente:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}, \quad M = \frac{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}\,\frac{\sqrt{4+\vartheta^2}}{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}, \\ K &= \frac{1}{\vartheta\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m\sqrt{4+\vartheta^2}}\,\frac{4}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right|$
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,84 0,88 0,92 0,96 1,00 1,04 1,08 1,12 1,16 η

Bild 25.

und mit

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,g}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{G} = \frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{j\,\eta\,\vartheta\,\mathfrak{Z}_m\sqrt{4+\vartheta^2}}\left[1 - \eta^2\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2\right]$$

für die Resonanzkurve:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right| = \\ &\sqrt{\zeta^2 + \frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \frac{4}{\eta^6\vartheta^2(4+\vartheta^2)\left(\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}\right)^2}\left[\eta^4\zeta^2 + \eta^2(1-\zeta^2)\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 - 1\right]^2}} \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Das Maximum der bei $0 \leq \zeta \leq 1$ einwelligen Form der Resonanzkurve findet man aus Gleichung (37), was nach (22) auch selbstverständlich ist. Wenn $\zeta > 1$ ist, so kann die Kurve auch zweiwellig werden. Die weiteren Extremstellen liefert dann die Relation:

$$\eta_{\text{extr}} = \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{2\zeta^2}\left(\frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1-\zeta^2}{2\zeta^2}\right)^2\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^4 - \frac{3}{\zeta^2}}}\,. \qquad (67)$$

Ähnliche Betrachtungen wie zu Schaltung in Bild 3 führen nun zu dem Ergebnis, daß vorstehendes Gebilde zu Siebzwecken ungeeignet ist (Bild 24, 25, 26).

Sieht man aber von einer Verwendung als Siebkette ab, so kann man sich der Schaltung vorteilhaft in der Hochfrequenztechnik bedienen. Denn da der Spule ein Kondensator parallel liegt, so wird an dem Aussehen der Schaltung nichts geändert, selbst wenn die Spulenkapazität nicht zu vernachlässigen ist.

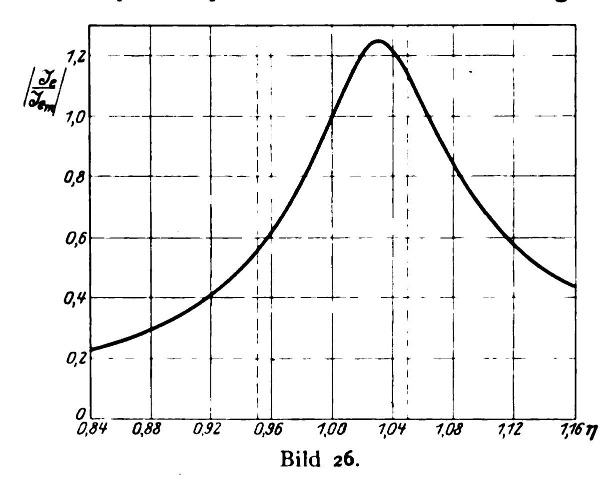


Bild 26.

b) Wellenwiderstand nach (8).

Die nächste Schaltung hat das in Bild 27 dargestellte Aussehen. Man erhält daraus

$$\mathfrak{R} = \frac{1-\omega^2 L C}{j\omega C}, \quad \frac{\mathfrak{G}}{2} = \frac{1}{j\omega M} \qquad (68)$$

und damit für die Schaltelemente:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta\,\omega_m\sqrt{4+\vartheta^2}}\,\frac{4}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}, \quad C = \frac{\vartheta}{\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}\,\frac{\sqrt{4+\vartheta^2}}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}, \\ M &= \frac{\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}\,\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Ferner ergibt sich für die Resonanzkurve, da

$$\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,g = \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{Z}_m(\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2})}{j\eta\,\vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}}\left[1-\eta^2\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2\right]$$

ist:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right| = \sqrt{\zeta^2+\frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\dfrac{4}{\eta^6\,\vartheta^2(4+\vartheta^2)(\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2})^2}\left[\eta^4-\eta^2(1-\zeta^2)\left(\dfrac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2-\zeta^2\right]^2}} \qquad (70)$$

Diese Kurve ist wie (43) für $\zeta \geq 1$ einwellig, kann jedoch für $0 \leq \zeta < 1$ auch zweiwellig werden. Das Maximum der einwelligen Form ergibt sich aus (44), während sich die übrigen Extremstellen der zweiwelligen Form aus

$$\eta_{extr} = \sqrt{-\frac{1-\zeta^2}{2}\left(\frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1-\zeta^2}{2}\right)^2 \left(\frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^4 - 3\zeta^2}} \qquad (71)$$

ermitteln lassen.

Wie schon Backhaus mit Hilfe gewisser Vernachlässigungen gefunden hat, ist vorliegende Schaltung nicht zu Siebzwecken verwendbar, was auch durch den Verlauf der Resonanzkurve in den Bildern 26, 25, 24 deutlich zum Ausdruck kommt.

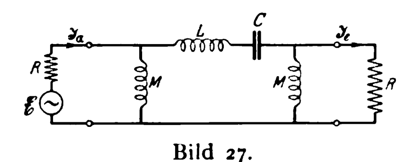


Bild 27.

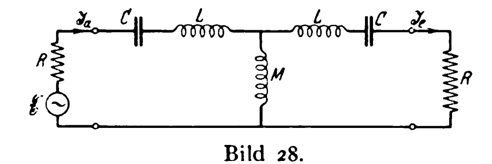


Bild 28.

c) Wellenwiderstand nach (9).

Für die in Bild 28 gezeichnete Schaltungsanordnung ist:

$$\frac{\mathfrak{R}}{2} = \frac{1 - \omega^2 L C}{j\omega C}, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{j\omega M}. \qquad (72)$$

Für die Schaltelemente hat man

$$L = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta\, \omega_m}\left(\frac{2}{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2, \quad C = \frac{\vartheta}{\omega_m \mathfrak{Z}_m}, \quad M = \frac{\mathfrak{Z}_m \sqrt{4+\vartheta^2}}{2\,\omega_m}. \qquad (73)$$

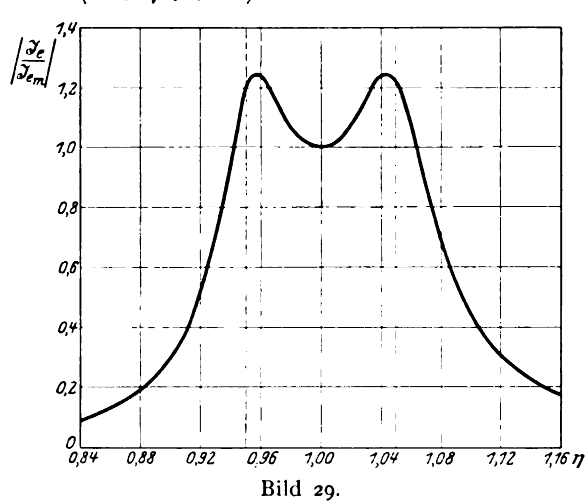


Bild 29.

Ferner ist

$$\frac{\mathfrak{Sin}\, g}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{G} = \frac{2}{j\eta\, \mathfrak{Z}_m \sqrt{4+\vartheta^2}}$$

und daraus für die Resonanzkurve:

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right| = \sqrt{\zeta^2 + \frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \frac{1}{\eta^2(4+\vartheta^2)}\left[1 - \zeta^2 - \frac{1}{\vartheta^2}\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2\right]^2}}. \qquad (74)$$

Die Maxima dieser für $0 \leq \zeta < 1$ und $0 < \vartheta$ stets zweiwelligen Kurve sind durch die Gleichung (50) gegeben. Das Minimum ergibt sich aus

$$\eta_{extr} = \sqrt{-\frac{2+\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2} + \sqrt{\left[\frac{2+\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2}\right]^2 + 3}}, \qquad (75)$$

welches bei $\zeta \geq 1$ zu einem Maximum der einwelligen Form wird.

Sehr zweckdienlich für eine weitere Betrachtung der Resonanzkurve ist die Erkenntnis, daß (74) aus (49) hervorgeht, wenn überall η durch $1/\eta$ ersetzt wird.

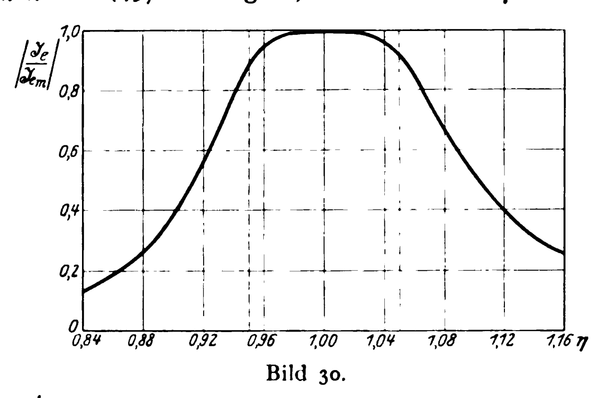


Bild 30.

Für Frequenzen $\eta \approx 1$ ist dann überhaupt kein Unterschied der beiden Resonanzkurven zu konstatieren, wovon man sich durch eine Gegenüberstellung der Bilder 29, 30, 31 mit den Bildern 14, 15, 16 leicht überzeugen kann. Wir haben also ein echtes Sieb vor uns, insofern, als die Resonanzkurve, wenigstens für den Fall $\zeta = 1$ mit einiger Annäherung die Form eines Rechtecks zeigt, dessen Höhe die Maximalamplitude im Spalt und dessen Breite die theoretische Lochbreite ist. Dies gilt

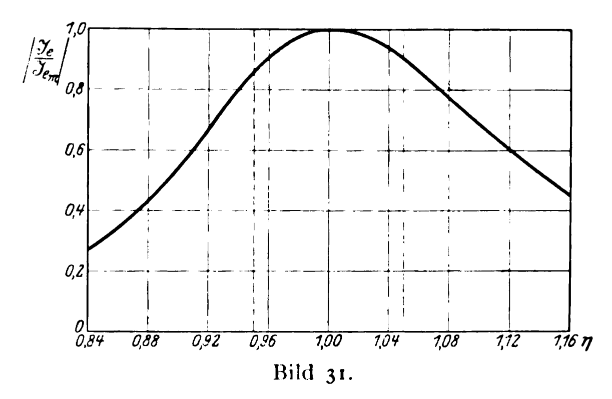


Bild 31.

auch für alle Siebgebilde, die mit dem unserigen in den End- und Wellenwiderständen übereinstimmen, dagegen steilere Dämpfungskurven haben. Denn innerhalb des Spaltes weist bereits die Mindestkurve annähernd den gewünschten Durchlässigkeitsbereich auf, während außerhalb des Spaltes unsere Resonanzkurve die Höchstkurve aller übrigen Resonanzkurven dieser Kategorie symmetrischer Siebketten bildet.

Auf etwas andere Weise hat bereits Backhaus eingehende Betrachtungen über vorstehende Schaltung angestellt, jedoch sind seine Diskussionen nur unter besonderen Bedingungen auch für beliebige Entfernungen von einer mittleren Frequenz im Spalt gültig.

Eine weitere Ausführungsform unserer Schaltung erhält man bei Umwandlung des Spulensterns in ein Spulendreieck (Bild 32). Hier ist

$$L = \frac{2\,\mathfrak{Z}_m}{\vartheta^2\,\omega_m\sqrt{4+\vartheta^2}}, \quad C = \frac{\vartheta}{\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}, \quad M = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta\,\omega_m}\left(\frac{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2. \qquad (76)$$

Noch eine dritte Ausführungsform ist nach Lüschen und Krause[1] möglich (Bild 33). Sie entsteht, wenn man den Spulenstern oder das Spulendreieck durch eine rein induktive Kopplung ersetzt. Bedeutet hier M die Gegeninduktivität, so erhält man für Schaltelemente und Kopplungsfaktor:

$$L = \frac{\mathfrak{Z}_m}{\vartheta\,\omega_m}\,\frac{2+\vartheta^2}{2}, \quad C = \frac{\vartheta}{\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}, \quad \varkappa = \frac{M}{L} = \frac{\vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}}{2+\vartheta^2}. \tag{77}$$

Die Identität mit dieser neuen Schaltung ist praktisch immer gewahrt, falls die Spulen vernachläßigbar kleine Verluste haben. Sollten indessen die Spulen in Betracht zu ziehende Ohmsche Widerstände haben, so erscheinen dieselben jedoch

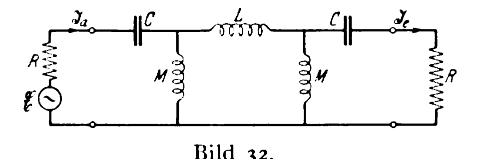


Bild 32.

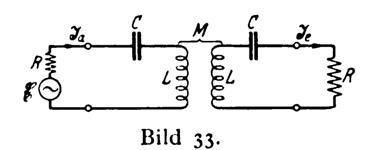


Bild 33.

nach Bild 33 stets in Reihe mit den Endwiderständen. Man kann sich sonach eine solche Schaltung durch ein verlustfreies Siebgebilde mit entsprechend vergrößerten Endwiderständen ersetzt denken, wodurch unsere Betrachtungen auf die soeben behandelten Fälle zurückgeführt werden.

d) Wellenwiderstand nach (10).

Für die letzte Schaltung dieser Serie (Bild 34) hat man

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{j\,\omega\,C}, \quad \frac{\mathfrak{G}}{2} = \frac{1-\omega^2 M K}{j\,\omega\,M} \tag{78}$$

und weiter

$$C = \frac{\sqrt{4+\vartheta^2}}{2\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}, \quad M = \frac{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}, \quad K = \frac{1}{\vartheta\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}\left(\frac{2}{\vartheta+\sqrt{4+\vartheta^2}}\right)^2. \tag{79}$$

Bild 34.

Bild 35.

Hieraus folgt unmittelbar

$$\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,g = \mathfrak{R} = \frac{2\,\mathfrak{Z}_m}{j\,\eta\sqrt{4+\vartheta^2}}$$

und

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_e}{\mathfrak{J}_{em}}\right| = \sqrt{\zeta^2 + \frac{(1-\zeta^2)^2}{4+\vartheta^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \frac{1}{\eta^2(4+\vartheta^2)}\left[1-\zeta^2+\frac{\zeta^2}{\vartheta^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2\right]^2}}. \tag{80}$$

Diese Resonanzkurve hat für $\zeta > 1$ und $0 < \vartheta$ zwei Maxima (Bild 29), die mit denen der Gleichung (57) identisch sind, während sich das Minimum aus

$$\eta_{extr} = \sqrt{-\frac{2\zeta^2-\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2\zeta^2}+\sqrt{\left[\frac{2\zeta^2-\vartheta^2(1-\zeta^2)}{2\zeta^2}\right]^2+3}} \tag{81}$$

bestimmen läßt. Für $0 < \zeta \leq 1$ besitzt die Resonanzkurve nur noch ein Maximum (Bild 30, $\zeta = 1$), (Bild 31, $\zeta = 0{,}5$), das ebenfalls aus der letzten Gleichung gefunden

[1] F. Lüschen und G. Krause, l. c.

wird. Sehr vereinfachend wirkt ferner die Tatsache, daß (56) in (80) übergeht, wenn man η durch $\frac{1}{\eta}$ ersetzt, so daß die dort gemachten Bemerkungen sinngemäß auch hier wieder angewendet werden können. Daraus geht jedenfalls hervor, daß unsere Schaltung sich in derselben Weise als Sieb eignet wie die Schaltung nach Bild 18. Außerdem kann sie vorteilhaft als Hochfrequenzsieb benutzt werden, da an ihrem Aussehen selbst bei ins Gewicht fallenden Spulenkapazitäten ersichtlich nichts geändert wird.

Verwandelt man jetzt das Kondensatordreieck in einen äquivalenten Stern, so erhält man eine weitere Ausführungsform (Bild 35) mit den Größen:

$$C = \frac{1}{\vartheta\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m}\left(\frac{\vartheta + \sqrt{4+\vartheta^2}}{2}\right)^2, \quad M = \frac{\vartheta\,\mathfrak{Z}_m}{\omega_m}, \quad K = \frac{2}{\vartheta^2\,\omega_m\,\mathfrak{Z}_m\sqrt{4+\vartheta^2}}. \tag{82}$$

Allerdings ist diese Form nicht mehr in derselben Weise als Hochfrequenzsieb anwendbar, da jetzt durch die Spulenkapazitäten ein ganz anderes Schaltungsbild entstehen würde.

III. Zusammenfassung.

Es werden für Fortpflanzungsmaß und Wellenwiderstand abgestimmter und verlustfreier symmetrischer Siebketten Formeln angegeben, in denen eine mittlere Frequenz im Spalt, der Wellenwiderstandswert bei dieser Frequenz und die relative Spaltbreite als Parameter vorkommen.

Hierauf werden mit Hilfe dieser Parameter allgemeine Beziehungen für die Schaltelemente aufgestellt, was sich bei der Konstruktion der betreffenden Siebgebilde als sehr nützlich erweist.

Zuletzt wird die Resonanzkurve des Verbraucherstromes bei Abschluß derselben Siebe durch beiderseits gleiche Ohmsche Endwiderstände in aller Strenge abgeleitet. Es zeigt sich, daß im allgemeinen nur für zwei bestimmte Wellenwiderstandsformen günstige Resonanzkurven bei geringstmöglichem Aufwand an Schaltungsmaterial zu erzielen sind. Die behandelten Schaltungen sind dabei so ausgewählt, daß ihre Resonanzkurven außerhalb des Spaltes Höchstkurven für alle Resonanzkurven mit denselben End- und Wellenwiderständen bilden, was sehr allgemeine Diskussionen ermöglicht. Im Gegensatz hierzu werden innerhalb des Spaltes Mindestkurven der Resonanzkurven angegeben, die nur noch von den End- und Wellenwiderständen allein abhängen und infolgedessen auch ohne Hinzuziehung besonderer Schaltungsformen weitestgehende Schlüsse zu ziehen erlauben.

Asynchronmaschinen mit vom Schlupf unabhängiger Wirk- und Blindleistung.

Von

Dr.-Ing. **M. Liwschitz**, Charlottenburg.

I. Einleitung.

Besteht die Aufgabe, zwei Netze verschiedener Frequenz oder zwei Netze gleicher aber schwankender Frequenz miteinander so zu kuppeln, daß die von einem Netz auf das andere übertragene Leistung unabhängig von den Frequenzschwankungen konstant bleibt oder einem bestimmten, mit den Frequenzschwankungen zusammenhängenden Gesetz folgt, so läßt sich diese Aufgabe nur mit solchen Umformern lösen, bei denen wenigstens eine Hälfte so beschaffen ist, daß deren Leistung weder von der Lage des Läufers gegenüber dem Ständerfeld, wie bei der Synchronmaschine, noch von der Geschwindigkeit des Läufers gegenüber dem Ständerfeld, wie bei der normalen Asynchronmaschine, abhängt. Der Synchron-Synchron-Umformer ist nicht imstande, den Zweck zu erfüllen, weil bei ihm die Geschwindigkeiten der beiden Läufer starr an ihre Netzfrequenzen gebunden sind. Treten Frequenzschwankungen in einem der beiden Netze auf, so sind beide Läufer gezwungen, die diesen Frequenzschwankungen entsprechenden Drehzahländerungen mitzumachen, was für das Netz mit konstanter Frequenz unzuträglich ist. Auch der Synchron-Asynchron-Umformer kann die gestellte Aufgabe nicht lösen, weil die Geschwindigkeit der gemeinsamen Welle von der Synchronmaschine vorgeschrieben wird. Treten Frequenzschwankungen in einem der beiden Netze auf, so ändert sich die relative Geschwindigkeit des Läufers der Asynchronmaschine gegenüber ihrem Drehfeld (der Schlupf) und somit die Leistung der Asynchronmaschine. Die Synchronmaschine ist gezwungen, diese Leistungsschwankungen, deren Größe von dem Verlauf der Charakteristik (Leistung in Abhängigkeit vom Schlupf) der Asynchronmaschine abhängt, mitzumachen. Das gleiche gilt für den Asynchron-Asynchron-Umformer.

Normalerweise wird das Bedürfnis vorhanden sein, daß nicht nur die Wirkleistung, sondern auch die von einem Netz auf das andere übertragene Blindleistung von den Frequenzschwankungen unabhängig bleibt oder auf eine bestimmte Weise den Frequenzschwankungen folgt. Den Forderungen konstanter übertragener Wirk- und Blindleistung kann nur ein Umformer genügen, bei dem die eine Hälfte aus einer Asynchronmaschine besteht, deren Läufer mit einer fremderregten Drehstrom-Erregermaschine verbunden ist. Werden die Regulatoren, die im Erregerkreis der Erregermaschine liegen, und die die Größe der dem Läufer der Asynchronmaschine aufgedrückten Spannungen bestimmen, in Abhängigkeit von Wirkstrom, Blindstrom und der Schlupffrequenz der Asynchronmaschine gebracht, so läßt sich jede beliebige Wirk- und Blindleistungscharakteristik einstellen. Will man jedoch die mechanischen Regulatoren und Relais vermeiden und das Ziel auf rein elektrischem Wege erreichen, so kann die gestellte Aufgabe nur von einem Umformer gelöst werden, bei dem die Asynchronmaschine ganz oder teilweise von dem Einfluß ihres Schlupfes auf ihre Wirk- und Blindleistung befreit ist. Soll die übertragene Leistung konstant bleiben, so muß der Einfluß des Schlupfes vollkommen ausgeschaltet werden, d. h. es müssen alle Spannungen der Schlupffrequenz, die in der Maschine auftreten, vernichtet werden, und an ihre Stelle neue Spannungen, Regelspannungen, eingeführt werden, die den Arbeitsstrom erzeugen. Wird dagegen eine bestimmte Abhängigkeit der Leistung von den Frequenz-



schwankungen erstrebt, so muß ein bestimmter Teil der Schlupfspannung der Maschine bestehen bleiben.

Die Aufgabe, die Leistung unabhängig vom Schlupf der Asynchronmaschine zu machen, liegt nicht nur bei Netzkupplungsumformern vor, sondern auch bei Drehstrom-Gleichstrom-Motorgeneratoren (Ilgner-Umformern) und bei Asynchrongeneratoren, die durch Kraftmaschinen mit schwankendem Drehmoment angetrieben werden.

Im weiteren wird eine Reihe von Lösungen beschrieben, die den gestellten Bedingungen genügen[1]. Als Drehstrom-Erregermaschinen sind vorausgesetzt die heutzutage am meisten gebräuchlichen Maschinen mit Läufererregung (oder mit doppelter Erregung) und Kompensationswicklung oder mit Ständererregung. Die angegebenen Anordnungen beziehen sich sowohl auf elektrische wie mechanische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine. Es wird sich zeigen, daß neben den Spannungen der Schlupffrequenz, die aufgehoben werden müssen, noch einige weitere vom Schlupf abhängige Störungsglieder auftreten, die durch die mechanische Kupplung der Hauptmaschine mit der Erregermaschine oder durch die Schwierigkeit der Aufhebung der relativ großen Induktivität der Erregerwicklung der ständererregten Erregermaschinen bedingt sind. Die Theorie der einzelnen Anordnungen wird zeigen, mit welcher Genauigkeit sie ihren Zweck erfüllen.

Wir wollen zuerst die Gleichung für den Primärstrom der Asynchronmaschine in Verbindung mit fremderregter Erregermaschine aufstellen und sie auf eine solche Form bringen, aus der die Art der Maschinen und Apparate, die zur Lösung der Aufgabe nötig sind, von selbst folgt.

II. Die Gleichung des Primärstromes.

Das Vektordiagramm der Asynchronmaschine in Verbindung mit fremderregter Drehstrom-Erregermaschine zeigt Bild 1. In diesem bedeuten (alle Größen pro Phase, die sekundären Größen auf den Primärkreis reduziert):

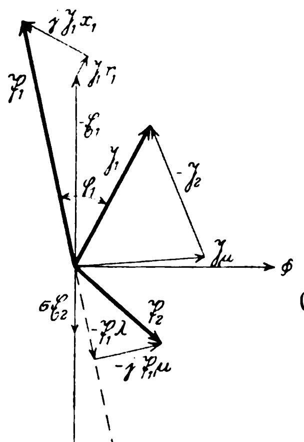


Bild 1. Vektordiagramm der Asynchronmaschine in Verbindung mit fremderregter Drehstrom-Erregermaschine.

$\mathfrak{P}_1$ die primäre Klemmenspannung,
r_1 den Widerstand der Primärwicklung,
x_1 den Streublindwiderstand der Primärwicklung,
r_2 den Widerstand des Sekundärkreises,
x_2 den Streublindwiderstand des Sekundärkreises bei Netzfrequenz,
Φ den Hauptfluß der Maschine,
$\mathfrak{E}_1$ die vom Hauptfluß in der Primärwicklung induzierte EMK,
$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1$ die vom Hauptfluß in der Sekundärwicklung induzierte EMK, bezogen auf Netzfrequenz,
σ den Schlupf der Maschine und
$\mathfrak{J}_\mu$ den Strom, den der Hauptfluß bedingt.

$\mathfrak{P}_2$ ist die von der Drehstrom-Erregermaschine dem Läufer der Hauptmaschine aufgedrückte Spannung. Wir zerlegen $\mathfrak{P}_2$ in 2 Komponenten, eine in Phase mit $-\mathfrak{P}_1$, die andere gegen $-\mathfrak{P}_1$ um 90° voreilend:

$$\mathfrak{P}_2 = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu). \tag{1}$$

Die erste Komponente $-\mathfrak{P}_1 \lambda$ ist geeignet, den Wirkstrom der Maschine zu regeln. Mit Hilfe der zweiten Komponente $-j\mathfrak{P}_1 \mu$ kann der Blindstrom der Maschine eingestellt werden.

[1] Mit dem hier behandelten Problem haben sich bereits befaßt: W. Seiz, BBC-Mitteilungen 1926, S. 121; M. Schenkel, ETZ 1927, S. 563.

Die Werte λ und μ sollen für $\sigma = 0$ gelten. Bei elektrischer Kupplung der Asynchronmaschine mit der Drehstrom-Erregermaschine bleibt dann die Spannung $\mathfrak{P}_2$ konstant, falls λ und μ unveränderlich sind. Bei mechanischer Kupplung der Asynchronmaschine mit der Drehstrom-Erregermaschine ist dagegen die dem Läufer der Asynchronmaschine aufgedrückte Spannung gleich

$$\mathfrak{P}_2 = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1 - \sigma). \tag{1a}$$

Bei mechanischer Kupplung wird also dafür gesorgt werden müssen, daß auch $\mathfrak{P}_2$ vom Einfluß des Schlupfes befreit wird.

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$\mathfrak{J}_2 \mathfrak{Z}_2 = \sigma \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{P}_2, \tag{2}$$

$$\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_\mu, \tag{3}$$

$$\mathfrak{J}_\mu = -\mathfrak{E}_1 \mathfrak{Y}_\mu, \tag{4}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{Z}_1, \tag{5}$$

$$\mathfrak{Z}_1 = r_1 + j x_1, \qquad \mathfrak{Z}_2 = r_2 + j \sigma x_2, \qquad \mathfrak{Y}_\mu = g - j b. \tag{6}$$

Die Größe g ist maßgebend für die Eisenverluste der Maschine, die Größe b für deren Magnetisierungsstrom. Es gilt:

$$g = \frac{V_{ei}}{m_1 E_1^2}, \quad b = \sqrt{\left(\frac{J_\mu}{E_1}\right)^2 - g^2}, \tag{7}$$

wo V_{ei} die Eisenverluste der Maschine und m_1 die primäre Phasenzahl bedeuten. Berücksichtigt man, daß $\mathfrak{Y}_\mu \mathfrak{Z}_1 = (g - j b)(r_1 + j x_1)$ angenähert gleich dem primären Heylandschen Streufaktor τ_1 ist, so erhält man aus den Gleichungen (1) bis (6):

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{P}_1 \frac{\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1 (\lambda + j\mu)}{(1 + \tau_1)\mathfrak{Z}_2 + \sigma \mathfrak{Z}_1}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{J}_2 = -\mathfrak{P}_1 \frac{\sigma + (1 + \tau_1)(\lambda + j\mu)}{(1 + \tau_1)\mathfrak{Z}_2 + \sigma \mathfrak{Z}_1}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 \frac{(\mathfrak{Y}_\mu \mathfrak{Z}_2 + \sigma) + (\lambda + j\mu)}{(1 + \tau_1)\mathfrak{Z}_2 + \sigma \mathfrak{Z}_1}. \tag{10}$$

Vernachlässigt man die Eisenverluste ($g = 0$) und führt in die Gleichung (10) die Gleichungen (1) und (6) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 \frac{\lambda + j(\mu - b r_2) + \sigma(1 + \tau_2)}{(1 + \tau_1) r_2 + \sigma\{r_1 + j[x_1 + (1 + \tau_1) x_2]\}}, \tag{11}$$

wobei $b x_2 = \tau_2$ gesetzt worden ist. Zerlegt man diese Gleichung in den reellen und imaginären Teil

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{w1} + j \mathfrak{J}_{bl1}, \tag{12}$$

so sieht man, daß sowohl der Wirk- wie der Blindstrom der Maschine von Größen abhängt, die sich mit dem Schlupf ändern.

III. Hilfsapparate im Primärkreis der Asynchronmaschine.

Die Gleichung (11) schreiben wir in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 (1 + \tau_1) r_2 = -j \mathfrak{P}_1 b r_2 + \mathfrak{P}_1 (1 + \tau_2) \sigma - \\ - \mathfrak{J}_1 \{r_1 + j[x_1 + (1 + \tau_1) x_2]\} \sigma + \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Aus dieser Gleichung sieht man, daß der Primärstrom sich aus 4 Teilen zusammensetzt. Der erste Teil $-j \mathfrak{P}_1 \frac{b}{1 + \tau_1}$ steht senkrecht auf der Primärspannung $\mathfrak{P}_1$ und trägt zum primären Blindstrom bei. Er ist vom Schlupf unabhängig. Der zweite Teil $\mathfrak{P}_1 \frac{1 + \tau_2}{1 + \tau_1} \frac{1}{r_2} \sigma$ ist in Phase mit der primären Klemmenspannung und liefert also einen Beitrag für den primären Wirkstrom. Er ist vom Schlupf

abhängig. Wegen Kleinheit von r_1 gegenüber x_1 und x_2 trägt der dritte Teil $-\mathfrak{J}_1\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)x_2]\}\frac{\sigma}{(1+\tau_1)r_2}$ hauptsächlich zum primären Blindstrom bei und ist ebenfalls vom Schlupf abhängig. Der vierte Teil wird von der Drehstrom-Erregermaschine geliefert, ist vom Schlupf unabhängig und beeinflußt sowohl den primären Wirk- wie den primären Blindstrom.

Soll der Primärstrom unabhängig vom Schlupf sein, so müssen die Summanden 2 und 3 der Gleichung (13) aufgehoben werden. Läßt man die Drehstrom-Erregermaschine außer dem vom Schlupf unabhängigen Summanden 4 noch zwei vom Schlupf abhängige Spannungen liefern, die gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind den Summanden 2 und 3, so nimmt die Gleichung (13) die Form an:

$$\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)r_2 = \mathfrak{P}_1[\lambda + j(\mu - b r_2)]. \qquad (14)$$

Der Primärstrom ist dann vollkommen unabhängig vom Schlupf. Seine Wirkkomponente ist gegeben einzig und allein durch das Glied $\mathfrak{P}_1\lambda$, seine Blindkomponente durch das Glied $j\mathfrak{P}_1(\mu - b r_2)$. Macht man μ gleich $b r_2$, so verschwindet die Blind-

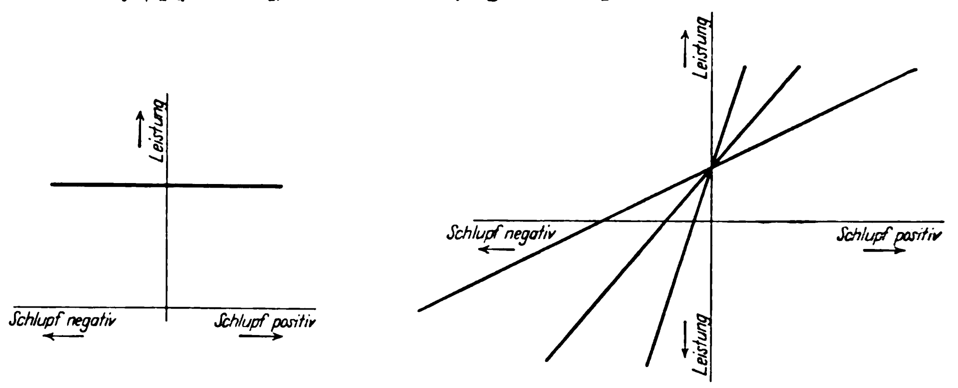


Bild 2. Regulierung auf konstante Leistung (lose Kopplung der beiden Netze),

Bild 3. Regulierung auf mit dem Schlupf veränderliche Leistung.

komponente des Primärstromes und der Ständer der Maschine arbeitet bei jedem Schlupf mit $\cos\varphi_1 = 1$. Durch passende Wahl der Größe μ hat man es in der Hand, den Blindstrom der Maschine beliebig, voreilend oder nacheilend, einzustellen. Den Verlauf der Maschinenleistung in Abhängigkeit vom Schlupf entsprechend der Gleichung (14) zeigt Bild 2. Die Kopplung der beiden Netze ist vollkommen lose. Die Frequenzen der beiden Netze können sich beliebig ändern: Auf die Größe der vom Umformer übertragenen Leistung hat dies keinen Einfluß.

Ist es erwünscht, daß die Wirkleistung nicht unabhängig vom Schlupf sein soll, sondern sich mit dem Schlupf in größerem oder kleinerem Maße ändert, so muß die Regelanordnung so getroffen werden, daß die Drehstrom-Erregermaschine den Schleifringen der Asynchronmaschine außer dem Summanden 4 noch den Summanden 3 mit entgegengesetztem Vorzeichen und nur einen Teil des Summanden 2, ebenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen, zuführt. Es wird dann:

$$\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)r_2 = \mathfrak{P}_1[\lambda + j(\mu - b r_2)] + \mathfrak{P}_1[(1+\tau_2) - ü]\sigma, \qquad (15)$$

wo $-\mathfrak{P}_1 ü \sigma$ den von der Drehstrom-Erregermaschine gelieferten Teil des Summanden 2 bedeutet. Die Blindleistung ist wie in Gleichung (14) unabhängig vom Schlupf. Die Wirkleistung setzt sich jetzt aus einem konstanten vom Schupf unabhängigen Glied und einem mit dem Schlupf veränderlichen Glied zusammen. Das Maß der Abhängigkeit der Wirkleistung vom Schlupf hängt von der Wahl der Größe ü ab. Je kleiner ü ist, desto steiler verläuft die Leistungsgerade (Bild 3). $ü = 0$ entspricht der starren Kopplung der beiden Netze: Der Umformer ändert seine Leistung, sobald Frequenzschwankungen in den Netzen auftreten.

Bei konstanter Erregung liefert die Drehstrom-Erregermaschine (vom Faktor $1 - \sigma$ bei mechanischer Kupplung abgesehen) eine konstante Spannung der Schlupffrequenz. Für die konstante Spannung $\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)$ an den Schleifringen der Asynchronmaschine ist eine entsprechende konstante Erregung der Erregermaschine erforderlich. Wie aus den Gleichungen (13) bis (15) hervorgeht, muß zur Lösung der vorliegenden Aufgabe die Drehstrom-Erregermaschine außer dieser, den Spannungen $\mathfrak{P}_1 \lambda$ und $j \mathfrak{P}_1 \mu$ entsprechenden konstanten Erregung, noch eine zusätzliche vom Schlupf abhängige Erregung erhalten, die den Summanden 2 und 3 der Gleichung (13) entspricht. Die zusätzliche Erregung muß demnach von der primären Klemmenspannung entsprechend $\mathfrak{P}_1 (1 + \tau_2) \sigma$ und vom primären Strom entsprechend $\mathfrak{J}_1 \{r_1 + j [x_1 + (1 + \tau_1) x_2]\}$ abhängig sein. Die Abhängigkeit von der primären Spannung läßt sich am einfachsten durch eine mit dem Umformer gekuppelte Asynchronmaschine, die Abhängigkeit vom primären Strom durch einen Stromtransformator im Primärkreis der Asynchronmaschine erreichen. Die gestellte Aufgabe läßt sich also durch Apparate, die nur im Primärkreis der Asynchronmaschine liegen, lösen. Wie wir später sehen werden, läßt sich das Ziel auch durch Apparate, die im Sekundärkreis der Asynchronmaschine angeordnet sind, erreichen.

Bild 4. Einfluß der primären und der sekundären Streuspannung auf den Verlauf des primären Stromes und Leistungsfaktors.

Bild 5. Hilfsapparate im Primärkreis. Die läufererregte Erregermaschine (LK) ist mit der Hauptmaschine mechanisch gekuppelt.

Bevor wir zur Betrachtung der Anordnungen mit den Hilfsapparaten im Primärkreis übergehen, sollen für ein praktisches Beispiel die Größen der einzelnen Summanden der Gleichung (13) angegeben werden. Dies wird ermöglichen, die Fehler, die in manchen Schaltungen auftreten, zahlenmäßig abzuschätzen.

Für eine größere Hochspannungsmaschine mit starker Voreilung, also mit tiefen Nuten im Ständer und Läufer und dementsprechend großer primärer und sekundärer Streuung ergab die Nachrechnung bei motorischem Betrieb mit Nennlast und $\cos \varphi_1 = 1$ folgende Werte:

$$J_1 (1 + \tau_1) r_2 = 1$$
$$P_1 b r_2 = 0{,}51,$$
$$P_1 (1 + \tau_2) \sigma = 7{,}4$$
$$J_1 r_1 \sigma = 0{,}038,$$
$$J_1 [x_1 + (1 + \tau_1) x_2] \sigma = 2{,}4,$$
$$P_1 \lambda = 1$$
$$P_1 \mu = 0{,}51,$$

wobei, da es sich nur um einen Vergleich der einzelnen Größen miteinander handelt,

$$J_1 (1 + \tau_1) r_2 = 1$$

gesetzt ist. Für den Schlupf sind 4% angenommen, entsprechend einer Gesamtfrequenzschwankung der beiden Netze von 4%. Für λ und μ sind weiter solche Werte eingesetzt, daß bei $\sigma = 0$ im Ständer der Nennstrom bei $\cos\varphi_1 = 1$ auftritt.

Man sieht, daß zahlenmäßig das zweite Glied der Gleichung (13) $\mathfrak{P}_1(1+\tau_2)\sigma$ die Hauptrolle spielt. Soll die Leistung konstant bleiben, so muß dieses Glied mit genügender Genauigkeit aufgehoben werden. Schon ein Fehler von 13% ergibt ein Restglied von fast derselben Größenanordnung wie $J_1(1+\tau_1)r_2$, also einen Fehler von etwa 100%. Auch die Aufhebung der primären und sekundären Streuspannung muß genau genug erfolgen, da ihre Summe trotz des kleinen Schlupfes von 4% 2,4 mal so groß ist wie $J_1(1+\tau_1)r_2$.

Würde man, um konstante vom Schlupf unabhängige Leistung zu erhalten, das Glied $P_1(1+\tau_2)\sigma$ aufheben und nicht dafür sorgen, daß durch einen Transformator auch das Glied $J_1[x_1+(1+\tau_1)x_2]\sigma$ vernichtet wird, so würde der Strom J_1 ebenso wie $\cos\varphi_1$ sich mit dem Schlupf sehr stark ändern. Bild 4 zeigt diese Größen in Abhängigkeit vom Schlupf unter Zugrundelegung des angegebenen Zahlenbeispieles. Man sieht, daß bereits bei 4% Schlupf der Strom J_1 auf 43% seines Nennwertes heruntergeht, falls λ und μ so gewählt sind, daß bei $\sigma = 0$ der Nennstrom bei $\cos\varphi_1 = 1$ auftritt.

Wir gehen nunmehr zu den einzelnen Schaltungen mit den Hilfsapparaten im Primärkreis über.

A. Läufererregte Erregermaschine.

1. Mechanische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine. Bild 5 zeigt die Schaltung für mechanische Kupplung einer läufererregten Kommutatormaschine (im weiteren mit LK-Maschine bezeichnet) mit der Asynchronmaschine. Die Transformatoren T_1 und T_2 liefern die Spannungen $\mathfrak{P}_1\lambda$ und $j\mathfrak{P}_1\mu$. Der Transformator T_3 transformiert die Netzspannung im Verhältnis $ü_3$ herunter und führt sie einer Asynchronmaschine (AM) zu. Der Transformator T_4 ist ein Strom-Spannungstransformator, dessen Primärwicklung vom Ständerstrom der Asynchronmaschine durchflossen wird. Dieser Transformator muß so beschaffen sein, daß die Rückwirkung des Sekundärstromes auf das Feld sehr klein ist, da sonst die nötige Proportionalität zwischen Primärstrom und Sekundärspannung des Transformators nicht vorhanden sein wird. Unter dieser Voraussetzung ist die Sekundärspannung des Transformators T_4 gleich $j\mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha}$, wo k_{13} der Wechsel-Blindwiderstand des Transformators bei Netzfrequenz ist und α den Winkel, der die gegenseitige Lage der beiden Wicklungen berücksichtigt, bedeutet. Die Sekundärwicklungen der Transformatoren T_3 und T_4 sind hintereinander geschaltet, so daß die Spannung an den Schleifringen der Asynchronmaschine AM, die ebenso wie der Transformator T_4 rückwirkungslos sein muß, gleich

$$-\mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j\mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha}\sigma$$

ist. Diese Spannung wird durch den Frequenzwandler F auf die Netzperiodenzahl umgeformt und in Reihenschaltung mit den Spannungen der Sekundärwicklungen der Transformatoren T_1 und T_2 den Schleifringen der LK-Maschine zugeführt.

Die Spannung an den Schleifringen dieser Maschine ist demnach gleich

$$\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j\mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha}\sigma$$

und die Spannung am Kommutator der LK-Maschine, infolge der mechanischen Kupplung mit der Hauptmaschine,

$$[\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j\mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha}\sigma](1-\sigma).$$

Diese resultierende Spannung wird nun den Schleifringen der Asynchronmaschine zugeführt. Wir führen diese Spannung an Stelle der Größe $\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)$ in die Gleichung (13) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(1+\tau_1)r_2 = &-j\mathfrak{P}_1 b r_2 + \mathfrak{P}_1(1+\tau_2)\sigma - \mathfrak{J}_1\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)x_2]\}\sigma + \\ &+ [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3\sigma + j\mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha}\sigma](1-\sigma). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Bemißt man den Transformator T_4 hinsichtlich Größe und Phase so, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{13}\cos\alpha &= x_1 + (1+\tau_1)\,x_2 \\ k_{13}\sin\alpha &= r_1 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

ist, so verschwindet das Glied $-\mathfrak{J}_1\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)\,x_2]\}\,\sigma$ und es wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(1+\tau_1)\,r_2 = \mathfrak{P}_1[\lambda + j(\mu - b\,r_2)] + \mathfrak{P}_1[(1+\tau_2) - ü_3]\,\sigma + \mathfrak{P}_1\,ü_3\,\sigma^2 - \\ - \mathfrak{J}_1\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)\,x_2]\}\,\sigma^2 - \mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)\,\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die ersten 2 Glieder dieser Gleichung entsprechen der Gleichung (15) und würden für sich eine genaue Lösung der gestellten Aufgabe ergeben. Es treten hier jedoch 3 Störungsglieder auf, die dem Schlupf in der zweiten bzw. in der ersten Potenz proportional sind, und die durch die mechanische Kupplung der LK-Maschine mit der Hauptmaschine bedingt sind. Das Störungsglied $\mathfrak{J}_1\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)\,x_2]\}\,\sigma$ ist bei 4% Schlupf fast gleich $2{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}096$ also gleich 9,6% von $\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)\,r_2$. Dieses Glied kann vernachlässigt werden, weil es senkrecht auf $\mathfrak{J}_1$ steht und demnach die Größe von $\mathfrak{J}_1$ fast gar nicht, die Phase sehr unwesentlich beeinflußt. Auch das Glied $-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)\,\sigma$ ist von untergeordneter Bedeutung. Anders ist es mit dem Störungsglied $\mathfrak{P}_1\,ü_3\,\sigma^2$.

Für konstante vom Schlupf unabhängige Nennlast muß $ü_3 = (1+\tau_2)$ sein. Bei 4% Schlupf ist also in diesem Falle $P_1(1+\tau_2)\,\sigma^2 = 7{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}296$ und dies ergibt einen Fehler im Strom von etwa 30%. Der Fehler, den dieses Störungsglied verursacht, ist zu groß, und es müssen besondere Mittel angewandt werden, um ihn zu vermeiden. Ein Mittel, das gestattet, Spannungen zu erzeugen, die dem Schlupf in der zweiten Potenz proportional sind, wird weiter unten angegeben werden. Es sei hier bemerkt, daß der relative Einfluß dieses Störungsgliedes ebenso wie der bei den weiteren Schaltungen auftretenden Störungsglieder zurückgeht, wenn man den Widerstand des Läuferkreises der Asynchronmaschine und bei Verwendung von ständererregten Erregermaschinen auch den Widerstand des Erregerkreises erhöht. Genügend große Widerstände sind in diesen Kreisen noch aus einem anderen Grunde erwünscht. Die Regelspannungen $\mathfrak{P}_1\lambda$ und $j\,\mathfrak{P}_1\mu$ sind klein im Vergleich zu den Spannungen, die sich mit dem Schlupf ändern und die aufgehoben werden sollen. Da $\mathfrak{P}_1\lambda$ und $j\,\mathfrak{P}_1\mu$ nach Aufhebung der Schlupfspannung, der Streuspannungen und der Induktivität der Erregerwicklung bei ständererregten Erregermaschinen nur noch auf Ohmsche Widerstände zu wirken haben, so lassen sie sich nur durch Vergrößerung der Ohmschen Widerstände des Läuferkreises der Hauptmaschine und des Erregerkreises erhöhen. Große Regelspannungen sind unter allen Umständen anzustreben.

Um in der Regulieranordnung nach Bild 5 ebenso wie in den weiter unten beschriebenen Regulieranordnungen die Hilfsmaschinen und Apparate (im vorliegenden Falle die Asynchronmaschine AM und der Frequenzwandler F bzw. die Transformatoren T_1, T_2, T_3 und T_4) klein zu halten, ist es zweckmäßig, die LK-Maschine noch mit einer Nebenschlußerregung zu versehen. Den Schleifringen der LK-Maschine braucht dann nur ein Bruchteil ihres Erregerstromes zugeführt zu werden.

2. Elektrische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine (Bild 6). Die Sekundärspannungen der Transformatoren T_3 und T_4

$$-\mathfrak{P}_1\,ü_3\,\sigma + j\,\mathfrak{J}_1\,k_{13}\,e^{-j\alpha}\,\sigma$$

speisen wie in Bild 5 den Ständer einer Asynchronmaschine (AM_1). Die Spannungen der Transformatoren T_1 und T_2 werden über einen Frequenzwandler F dem Läufer dieser Asynchronmaschine zugeführt, so daß der Ständer der Asynchronmaschine AM_2, die mit der LK-Maschine gekuppelt ist, die Spannung erhält

$$\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1\,ü_3\,\sigma + j\,\mathfrak{J}_1\,k_{13}\,e^{-j\alpha}\,\sigma.$$

Die Schleifringe der Asynchronmaschine AM_2 sind direkt mit den Schleifringen der LK-Maschine verbunden.



Über das Zusammenarbeiten einer LK-Maschine mit einer direkt gekuppelten Asynchronmaschine (oder einem Frequenzwandler), von der die LK-Maschine erregt wird, ist folgendes zu bemerken: Man kann die Asynchronmaschine (oder den Frequenzwandler) mit dem Drehfeld oder gegen das Drehfeld laufen lassen. Beim Lauf mit dem Drehfeld ist die Frequenz an den Schleifringen der LK-Maschine kleiner als die Umdrehungsfrequenz der gemeinsamen Welle, und die Klemmenspannung der LK-Maschine ist gleich der Kommutatorspannung mal $\frac{1}{1-\sigma}$, falls die Belastungsmaschine eine Synchronmaschine ist, bzw. $\frac{1-\sigma'}{1-\sigma'-\sigma}$, falls die Belastungs-

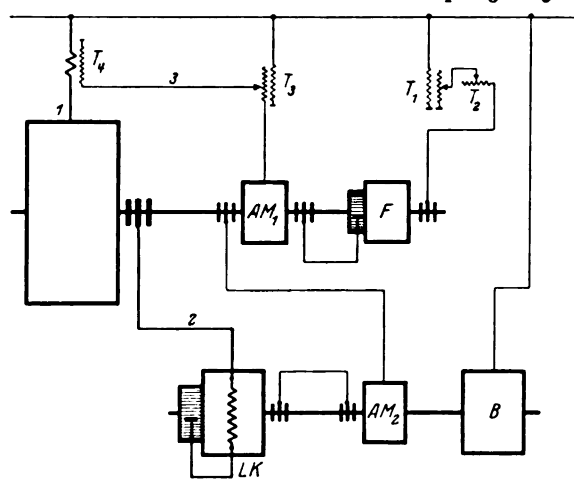


Bild 6. Hilfsapparate im Primärkreis. Die läufererregte Erregermaschine (LK) ist mit der Hauptmaschine elektrisch gekuppelt.

maschine eine Asynchronmaschine ist, die mit dem Schlupf σ' läuft. Beim Lauf gegen das Drehfeld ist die Frequenz an den Schleifringen der LK-Maschine größer als die Umdrehungsfrequenz der Welle, und die Klemmenspannung der LK-Maschine ist gleich ihrer Kommutatorspannung mal $\frac{1}{1+\sigma}$ bzw. $\frac{1-\sigma'}{1-\sigma'+\sigma}$.

Nehmen wir Lauf gegen das Drehfeld an, so ist die Klemmenspannung der LK-Maschine in Bild 6 angenähert gleich

$$[\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha} \sigma](1-\sigma);$$

das ist derselbe Wert wie bei der mechanischen Kupplung (Bild 5). Die Anordnung nach Bild 6 ergibt also die gleichen Verhältnisse [Gleichungen (16), (17) und (18)] wie die Anordnung nach Bild 5, und die Fehler, die in ihr auftreten, sind auch die gleichen wie in jener.

Die mit der LK-Maschine gekuppelte Belastungsmaschine B (Bild 6) braucht nicht eine Synchronmaschine zu sein, sie kann auch eine Asynchronmaschine sein, die mit kleinem Schlupf gebaut ist.

Ordnet man eine weitere Maschine an, wie Bild 7 zeigt, so lassen sich die Fehlspannungen des Bildes 6

$$\mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma^2, \quad -\mathfrak{J}_1\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)x_2]\}\sigma^2 \text{ und } -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)\sigma$$

vermeiden. Die Spannungen der Transformatoren T_3 und T_4 werden mit Hilfe eines Frequenzwandlers F_1 auf Netzperiodenzahl umgeformt und zusammen mit den Spannungen der Transformatoren T_1 und T_2 den Schleifringen eines Frequenzwandlers F_2 zugeführt, der mit der LK-Maschine mechanisch gekuppelt ist. Der Kommutator dieses Frequenzwandlers ist verbunden mit den Schleifringen einer asynchronen Erregermaschine (AEM), die auf der Welle der Hauptmaschine sitzt und deren

Ständer die Erregung der LK-Maschine liefert. Die Belastungsmaschine sei eine Asynchronmaschine. Laufen die Frequenzwandler F_1 und F_2 gegen ihre Drehfelder und die asynchrone Erregermaschine AEM mit ihrem Drehfelde, so ist die Frequenz der Kommutatorspannung der LK-Maschine, unabhängig von den Drehzahlen der beiden Wellen, stets gleich der Schlupffrequenz der Hauptmaschine.

Um uns zu überzeugen, daß die Klemmenspannung der LK-Maschine hier unabhängig ist vom Schlupf der Hauptmaschine und von der Drehzahl ihrer eigenen Welle, nehmen wir für einen Augenblick an, daß der Schlupf der Hauptmaschine sich ändert, während die Drehzahl der LK-Maschine samt Frequenzwandler F_2 konstant bleibt, und zwar etwa gleich der synchronen Drehzahl der Belastungs-

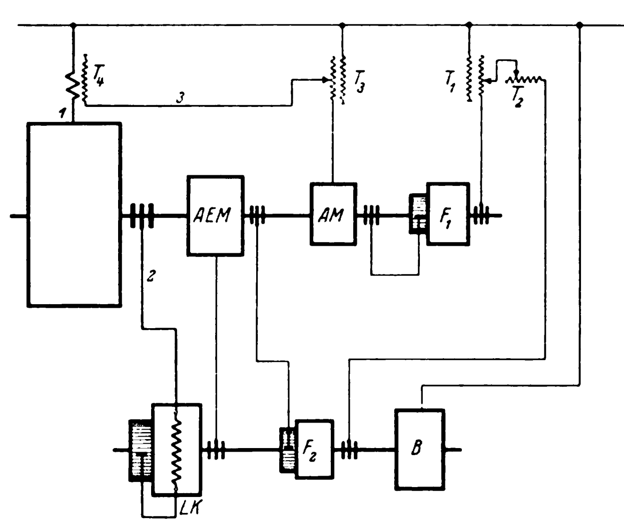


Bild 7. Hilfsapparate im Primärkreis. Die läufererregte Erregermaschine (LK) ist mit der Hauptmaschine elektrisch gekuppelt. Mit Hilfe einer asynchronen Erregermaschine (AEM) sind die Fehlspannungen der Regulieranordnung nach Bild 6 beseitigt.

maschine. Da den Schleifringen des Frequenzwandlers F_2 Spannungen der Netzfrequenz zugeführt werden, so liefert dann ihr Kommutator Gleichstrom und die AEM wird zu einer Synchronmaschine. Ändert sich nun der Schlupf der Hauptwelle, nimmt er etwa von Null in der positiven Richtung zu, so geht die Spannung der AEM herunter, aber im gleichen Maße auch die Frequenz dieser Spannung. Der Abnahme der Spannung der AEM entspricht eine Abnahme der Klemmenspannung der LK-Maschine. Eine Abnahme der Frequenz der von der AEM gelieferten Spannung führt zu einer Zunahme der Klemmenspannung der LK-Maschine, weil nun die Umdrehungsfrequenz der LK-Maschine größer wird als die Frequenz an ihren Schleifringen. Die Klemmenspannung der LK-Maschine bleibt auf diese Weise konstant und zwar gleich

$$\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 \ddot{u}_3 \sigma + j\, \mathfrak{J}_1 k_{13} e^{-j\alpha} \sigma$$

und für den Primärstrom ergibt sich die Beziehung (15), wo Fehlspannungen nicht mehr vorhanden sind.

B. Ständererregte Erregermaschine.

1. Mechanische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine (Bild 8). Während bei der läufererregten Erregermaschine die Erregung mit hoher Frequenz (Netzfrequenz oder Umdrehungsfrequenz) geschieht, führt der Erregerkreis der ständererregten Erregermaschine (im weiteren mit SK-Maschine bezeichnet) Ströme der Schlupffrequenz. Bei der läufererregten Erregermaschine kommt der Widerstand des Erregerkreises gegenüber seiner Induktivität nicht in Frage. Bei



der ständererregten Erregermaschine verhält sich dagegen der Erregerkreis in der Nähe des Synchronismus wie ein Stromkreis, der vorwiegend Ohmschen Widerstand enthält, und bei größeren Schlüpfen wie ein Stromkreis, der vorwiegend induktiv ist. Da hier erwünscht ist, daß die Kommutatorspannung der SK-Maschine ihrem Erregerstrom proportional ist und auch die Phasenverschiebung zwischen Kommutatorspannung und Erregerstrom konstant bleibt, so ist es zweckmäßig, den Erregerkreis in einen solchen Kreis zu verwandeln, der sich bei allen Schlüpfungen wie ein Stromkreis mit reinem Ohmschen Widerstand verhält. Dies läßt sich am zweckmäßigsten durch eine Anordnung erreichen, bei der die induktive Spannungskomponente des Erregerkreises bei jedem Schlupf und bei jedem Erregerstrom automatisch aufgehoben wird. Diesem Zweck dient in dem Bilde 8 der Stromtransformator T_5. Die Primärwicklung dieses Transformators liegt im Erregerkreis der SK-Maschine (Stromkreis 3), die Sekundärwicklung liegt im Stromkreis 5, der

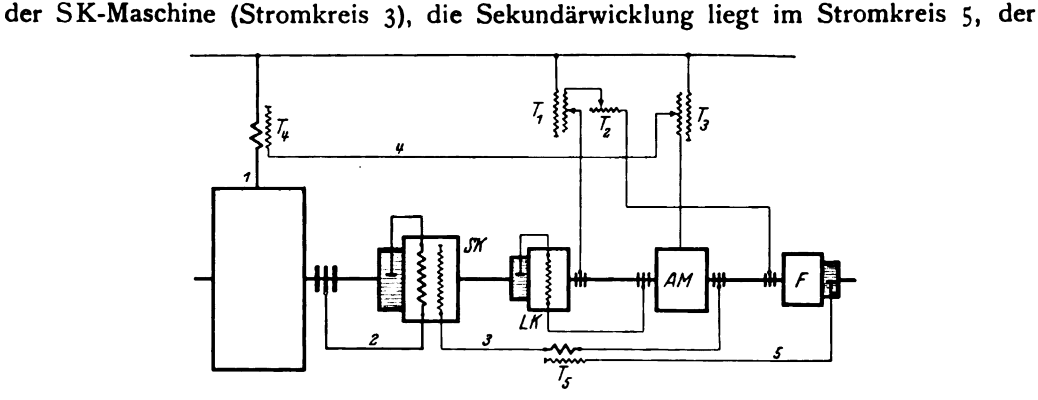


Bild 8. Hilfsapparate im Primärkreis. Die ständererregte Erregermaschine (SK) und die läufererregte Hilfserregermaschine (LK) sind beide mit der Hauptmaschine mechanisch gekuppelt.

zum Kommutator eines Frequenzwandlers F führt[1]. Der Transformator T_5 muß genau wie der Transformator T_4 rückwirkungslos sein. Die in der Sekundärwicklung des Transformators T_5 induzierte Spannung ist dann gleich

$$j\,\mathfrak{J}_3\,k_{35}\,e^{-j\beta}\sigma,$$

wo k_{35} der Wechsel-Blindwiderstand des Transformators ist und β die relative Lage seiner Wicklungen berücksichtigt. Diese Spannung wird vom Frequenzwandler F auf die Netzfrequenz umgeformt und zusammen mit den Spannungen der Transformatoren T_1 und T_2 den Schleifringen einer LK-Maschine zugeführt. Die Sekundärwicklungen der Transformatoren T_3 und T_4 sind wie früher in Reihe geschaltet und mit dem Ständer einer Asynchronmaschine AM verbunden. Der Läufer dieser Asynchronmaschine ist einerseits mit den Klemmen der LK-Maschine, andererseits mit der Erregerwicklung der ständererregten Erregermaschine (SK) verbunden. Die Spannung an den Schleifringen der LK-Maschine ist gleich

$$\mathfrak{P}_1(\lambda + j\,\mu) + j\,\mathfrak{J}_3\,k_{35}\,e^{-j\beta}\sigma.$$

An dem Kommutator der LK-Maschine ist dementsprechend die Spannung gleich

$$[\mathfrak{P}_1(\lambda + j\,\mu) + j\,\mathfrak{J}_3\,k_{35}\,e^{-j\beta}\sigma]\,(1 - \sigma).$$

Die Spannung der Sekundärwicklung der Asynchronmaschine AM beträgt

$$-\mathfrak{P}_1\,\ddot{u}_3\,\sigma + j\,\mathfrak{J}_1\,k_{14}\,e^{-j\alpha}\sigma.$$

Die Erregerspannung der SK-Maschine ist demnach

$$[\mathfrak{P}_1(\lambda + j\,\mu) + j\,\mathfrak{J}_3\,k_{35}\,e^{-j\beta}\sigma]\,(1 - \sigma) - \mathfrak{P}_1\,\ddot{u}_3\,\sigma + j\,\mathfrak{J}_1\,k_{14}\,e^{-j\alpha}\sigma.$$

Für den Erregerkreis (Stromkreis 3) gilt folgende Spannungsgleichung

$$\mathfrak{J}_3\,(r_3 + j\,\sigma\,x_3) = \mathfrak{P}_1\,(\lambda + j\,\mu)\,(1 - \sigma) - \mathfrak{P}_1\,\ddot{u}_3\,\sigma + j\,\mathfrak{J}_1\,k_{14}\,e^{-j\alpha}\sigma + j\,\mathfrak{J}_3\,k_{35}\,e^{-j\beta}\sigma\,(1 - \sigma). \quad (19)$$

[1] Diese vom Verfasser angegebene Methode zur Aufhebung der Induktivität des Erregerkreises der ständererregten Erregermaschinen wird in einer weiteren Arbeit ausführlicher behandelt.

Bildet man den Transformator T_5 so aus, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{35}\cos\beta &= x_3 \\ k_{35}\sin\beta &= r_3, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

so wird

$$\mathfrak{J}_3[r_3(1-\sigma)+(r_3+jx_3)\sigma^2]=\mathfrak{P}_1(\lambda+j\mu)(1-\sigma)-\mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma+j\mathfrak{J}_1k_{14}e^{-j\alpha}\sigma. \tag{21}$$

Das Glied $r_3\sigma^2$ ist verschwindend klein gegenüber $r_3(1-\sigma)$. Mit Rücksicht auf die Größe der Regelspannungen $\mathfrak{P}_1\lambda$ und $j\mathfrak{P}_1\mu$ wird man bei ständererregten Erregermaschinen das Verhältnis $\frac{r_3}{x_3}$ etwa gleich $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{40}$ machen. Setzt man $r_3=1$, so ist bei $\sigma=4\%$ $x_3\sigma^2=0{,}048$ bis $0{,}064$. Meistens kann man also auch das Glied $jx_3\sigma^2$ gegenüber $r_3(1-\sigma)$ vernachlässigen, denn es beeinflußt die Größe des Stromes J_3 fast nicht, seine Phase nur unwesentlich. (Ein Mittel zur Vermeidung dieses Störungsgliedes wird weiter unten angegeben.) Mit dieser Vernachlässigung erhält man für den Erregerkreis (Stromkreis 3) die Gleichung:

$$\mathfrak{J}_3r_3=[\mathfrak{P}_1(\lambda+j\mu)(1-\sigma)-\mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma+j\mathfrak{J}_1k_{14}e^{-j\alpha}\sigma]\frac{1}{1-\sigma}. \tag{21a}$$

In dieser Gleichung ist die Induktivität der Erregerwicklung der SK-Maschine nicht mehr vorhanden. Die Kommutatorspannung der SK-Maschine ist gleich

$$\mathfrak{P}_{SK}=c_{32}\mathfrak{J}_3(1-\sigma)=\frac{c_{32}}{r_3}[\mathfrak{P}_1(\lambda+j\mu)(1-\sigma)-\mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma+j\mathfrak{J}_1k_{14}e^{-j\alpha}\sigma]. \tag{22}$$

Durch passende Einstellung des Transformators T_5 ist es gelungen, den Faktor $(1-\sigma)$ trotz der mechanischen Kupplung der SK-Maschine zu vermeiden. Führt man die Gleichung (22) in die Gleichung (13) an Stelle des Gliedes $\mathfrak{P}_1(\lambda+j\mu)$ ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1(1+\tau_1)r_2 &= -j\mathfrak{P}_1br_2+\mathfrak{P}_1(1+\tau_2)\sigma-\mathfrak{J}_1\{r_1+j[x_1+(1+\tau_1)x_2]\}\sigma+ \\ &+\frac{c_{32}}{r_3}[\mathfrak{P}_1(\lambda+j\mu)(1-\sigma)-\mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma+j\mathfrak{J}_1k_{14}e^{-j\alpha}\sigma] \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Bildet man den Transformator T_4 so aus, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_{32}}{r_3}k_{14}\cos\alpha &= x_1+(1+\tau_1)x_2 \\ \frac{c_{32}}{r_3}k_{14}\sin\alpha &= r_1 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)r_2=\mathfrak{P}_1\left\{\frac{c_{32}}{r_3}(\lambda+j\mu)(1-\sigma)-jbr_2+\left[(1+\tau_2)-\frac{c_{32}}{r_3}\ddot{u}_3\right]\sigma\right\}. \tag{25}$$

Eine Ungenauigkeit in der Regulierung ist hier nur hinsichtlich der Regelspannungen $\mathfrak{P}_1\lambda$ und $j\mathfrak{P}_1\mu$ vorhanden. Diese Spannungen ändern sich mit $1-\sigma$. Bei 4% Schlupf beträgt der Fehler 4%.

Soll nur auf k o n s t a n t e L e i s t u n g reguliert werden, so macht man $\frac{c_{32}}{r_3}\ddot{u}_3=(1+\tau_2)$, damit das Glied mit σ verschwindet. Bildet man in diesem Falle den Transformator T_4 so aus, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_{32}}{r_3}k_{14}\cos\alpha &= x_1+(1+\tau_1)x_2 \\ \frac{c_{32}}{r_3}k_{14}\sin\alpha &= r_1+(1+\tau_1)r_2 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)r_2=\mathfrak{P}_1\left[\frac{c_{22}}{r_3}(\lambda+j\mu)-jbr_2\frac{1}{1-\sigma}\right] \tag{27}$$

und ein kleiner Fehler ist nur noch in der Blindleistung vorhanden.

Ist es erwünscht, das Aggregat kürzer zu halten, so kann man die LK-Maschine, die in Bild 8 mit der SK-Maschine mechanisch und elektrisch gekuppelt ist, mit dieser nur elektrisch kuppeln, wie Bild 9 zeigt. Der Transformator T_5 dient wiederum zur Aufhebung der Induktivität der Erregerwicklung der SK-Maschine. Die dem Kommutator des mit der LK-Maschine gekuppelten Frequenzwandlers F_2 zugeführte Spannung ist

$$\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma + j \mathfrak{J}_3 k_{35} e^{-j\beta} \sigma.$$

Dieser Frequenzwandler soll mit seinem Drehfeld laufen. Dann ist die Klemmenspannung der LK-Maschine gleich ihrer Schleifringspannung mal $\frac{1}{1-\sigma}$, also gleich

$$[\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma + j \mathfrak{J}_3 k_{35} e^{-j\beta} \sigma] \frac{1}{1-\sigma}.$$

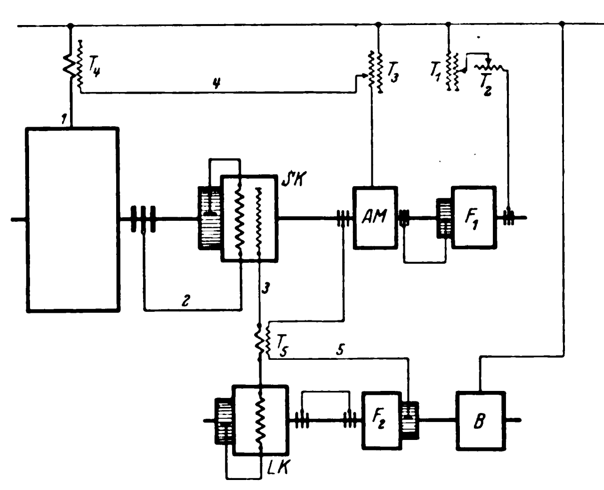


Bild 9. Hilfsapparate im Primärkreis. Die ständererregte Erregermaschine (SK) ist mit der Hauptmaschine mechanisch, die läufererregte Hilfserregermaschine (LK) elektrisch gekuppelt.

Für den Erregerkreis (Stromkreis 3) gilt

$$\mathfrak{J}_3(r_3 + j\sigma x_3) = [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma + j \mathfrak{J}_3 k_{35} e^{-j\beta} \sigma] \frac{1}{1-\sigma} \tag{28}$$

oder

$$\mathfrak{J}_3[r_3 + j\sigma x_3 - j k_{35} e^{-j\beta}(\sigma + \sigma^2 + \sigma^3 + \ldots)] = [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma] \frac{1}{1-\sigma}.$$

Bemißt man den Transformator T_5 so, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{35} &= x_3 \\ \beta &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

so wird

$$\mathfrak{J}_3[r_3 - j x_3(\sigma^2 + \sigma^3 + \ldots)] = [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma] \frac{1}{1-\sigma}. \tag{30}$$

Vernachlässigt man ähnlich wie oben die Glieder $j x_3 \sigma^2$, $j x_3 \sigma^3 \ldots$, so erhält man schließlich

$$\mathfrak{J}_3 r_3 = [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma] \frac{1}{1-\sigma}. \tag{30a}$$

Die Kommutatorspannung der SK-Maschine wird dementsprechend

$$\mathfrak{P}_{SK} = c_{32} \mathfrak{J}_3 (1-\sigma) = \frac{c_{32}}{r_3} [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 ü_3 \sigma + j \mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha} \sigma]. \tag{31}$$

Trotz der mechanischen Kupplung der SK-Maschine mit der Hauptmaschine tritt hier der Faktor $(1-\sigma)$ nicht auf. Er wird aufgehoben durch einen Faktor $\frac{1}{1-\sigma}$, der durch das Zusammenarbeiten des Frequenzwandlers F_2 mit der LK-Maschine an den Klemmen der LK-Maschine auftritt. Bildet man den Transformator T_4 genau so aus wie im Bilde 8 [Gleichung (24)], so ergibt sich

$$\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)\,r_2 = \mathfrak{P}_1\left\{\frac{c_{32}}{r_3}(\lambda + j\mu) - j\,b\,r_2 + \left[(1+\tau_2) - \frac{c_{32}}{r_3}\,\ddot{u}_3\right]\sigma\right\}.$$

Abgesehen von der oben gemachten Vernachlässigung $(x_3\sigma^2 = 0)$ treten Fehler in der Regulierung nicht auf.

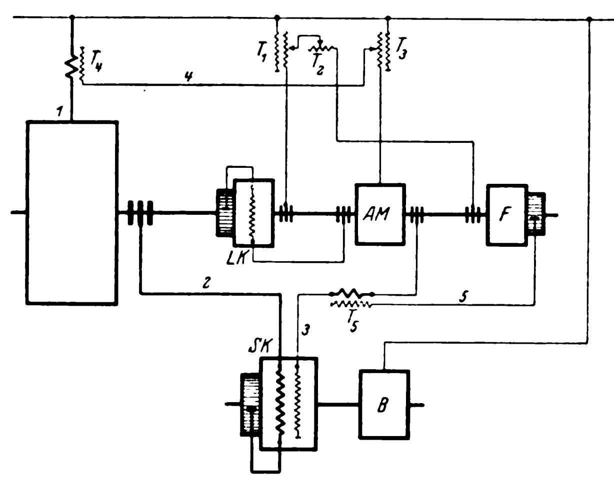


Bild 10. Hilfsapparate im Primärkreis. Die ständererregte Erregermaschine (SK) ist mit der Hauptmaschine elektrisch, die läufererregte Hilfserregermaschine (LK) mechanisch gekuppelt.

2. Elektrische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine. Im Bilde 10 ist die ständererregte Erregermaschine (SK) mit der Hauptmaschine elektrisch gekuppelt, während die LK-Maschine mit der Hauptmaschine mechanisch gekuppelt ist. Die Schaltung der LK-Maschine, die die Spannungen der Transformatoren T_1, T_2 und T_5 aufnimmt, ebenso wie die Schaltungen der Asynchronmaschine AM und des Frequenzwandlers F sind vollkommen die gleichen wie im Bilde 8. Infolgedessen gilt, wie dort, für den Stromkreis 3 (Erregerkreis der SK-Maschine)

$$\mathfrak{J}_3(r_3 + j\sigma x_3) = [\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) + j\,\mathfrak{J}_3 k_{35} e^{-j\beta}\sigma](1-\sigma) - \mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma + j\,\mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha}\sigma.$$

Bemißt man den Transformator T_5 so, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{35} &= x_3 \\ \beta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

und vernachlässigt wiederum das Glied $j x_3\sigma^2$ gegenüber r_3, so wird

$$\mathfrak{J}_3 r_3 = \mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma + j\,\mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha}\sigma.$$

Die Kommutatorspannung der SK-Maschine ist dann

$$\mathfrak{P}_{SK} = c_{32}\mathfrak{J}_3 = \frac{c_{32}}{r_3}[\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \mathfrak{P}_1\ddot{u}_3\sigma + j\,\mathfrak{J}_1 k_{14} e^{-j\alpha}\sigma]. \qquad (33)$$

Das ist dieselbe Beziehung wie bei der Anordnung nach Bild 8 [Gleichung (22)]. Bemißt man den Transformator T_4 genau so wie dort [Gleichung (24) und (26)], so folgt

$$\mathfrak{J}_1(1+\tau_1)\,r_2 = \mathfrak{P}_1\left\{\frac{c_{32}}{r_3}(\lambda + j\mu)(1-\sigma) - j\,b\,r_2 + \left[(1+\tau_2) - \frac{c_{32}}{r_3}\,\ddot{u}_3\right]\sigma\right\} \qquad (34)$$

bzw. bei Regulierung auf konstante Leistung

$$\mathfrak{J}_1 (1 + \tau_1) r_2 = \mathfrak{P}_1 \left[\frac{c_{32}}{r_2} (\lambda + j\mu) - j b r_2 \frac{1}{1-\sigma} \right]. \tag{34a}$$

IV. Hilfsapparate im Sekundärkreis der Asynchronmaschine.

Wir wollen den Primärstrom der Hauptmaschine durch ihren Sekundärstrom ausdrücken. Es wird sich dann zeigen, daß man, um die gestellte Aufgabe zu lösen, die Hilfsapparate auch im Sekundärkreis der Asynchronmaschine anordnen kann. Aus den Gleichungen (1) bis (4) folgt:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{-\mathfrak{E}_1 (\sigma + \mathfrak{Y}_\mu \mathfrak{Z}_2) + \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)}{\mathfrak{Z}_2}. \tag{35}$$

Läßt man die Eisenverluste außer acht ($g = 0$), so wird

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{-\mathfrak{E}_1 [\sigma - j b (r_2 + j\sigma x_2)] + \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)}{r_2 + j\sigma x_2}. \tag{35a}$$

Weiter gilt

$$j b \mathfrak{E}_1 = j b (\mathfrak{J}_1 \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{P}_1) = j b (r_1 + j x_1) \mathfrak{J}_1 - j b \mathfrak{P}_1 \simeq - \tau_1 \mathfrak{J}_1 - j b \mathfrak{P}_1.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2) ergibt sich demnach für den Primärstrom

$$\mathfrak{J}_1 = -j b \frac{\mathfrak{P}_1}{1+\tau_1} - \frac{\mathfrak{E}_1 \sigma - \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)}{(1+\tau_1)(r_2 + j\sigma x_2)} = \mathfrak{J}_{\mu 0} - \frac{\mathfrak{E}_1 \sigma - \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)}{(1+\tau_1)(r_2 + j\sigma x_2)} = \mathfrak{J}_{\mu 0} - \frac{1}{1+\tau_1} \mathfrak{J}_2, \tag{36}$$

d. h. der Primärstrom ist ausgedrückt durch den Magnetisierungsstrom der Maschine bei Leerlauf $\mathfrak{J}_{\mu 0}$ und durch den Sekundärstrom $\mathfrak{J}_2$. Der Strom $\mathfrak{J}_{\mu 0}$ hat eine konstante Größe und steht senkrecht auf der Primärspannung, ist also ein reiner Blindstrom. Die Wirkkomponente von $-\frac{1}{1+\tau_1}\mathfrak{J}_2$ (bezogen auf die Primärspannung der Maschine) ist die gleiche wie die Wirkkomponente von $\mathfrak{J}_1$. Die Blindkomponente von $-\frac{1}{1+\tau_1}\mathfrak{J}_2$ ist um eine konstante Größe ($\mathfrak{J}_{\mu 0}$) kleiner als die von $\mathfrak{J}_1$.

Es folgt daraus, daß es zur Lösung der Aufgabe ausreichend ist, wenn $-\frac{1}{1+\tau_1}\mathfrak{J}_2$ den Bedingungen genügt, die früher in bezug auf den Primärstrom $\mathfrak{J}_1$ gestellt worden sind.

Der Gleichung (36) entnimmt man

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu) + \mathfrak{E}_1 \sigma - j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma. \tag{37}$$

Die beiden dem Schlupf proportionalen Spannungen sind hier $\mathfrak{E}_1 \sigma$ und $-j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma$. Die erste $\mathfrak{E}_1 \sigma$ enthält die vom Hauptfluß induzierte EMK der Maschine, die zweite die Streuspannung der Sekundärwicklung. Soll nun $\mathfrak{J}_2$ hinsichtlich Größe und Phase vom Schlupf unabhängig sein, so müssen die Spannungen $\mathfrak{E}_1 \sigma$ und $-j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma$ mit entgegengesetzten Vorzeichen über eine Drehstrom-Erregermaschine den Schleifringen der Hauptmaschine zugeführt werden. Die Spannung $\mathfrak{E}_1 \sigma$ läßt sich erzeugen mit Hilfe einer Hilfswicklung im Läufer, die an den Zahnköpfen angeordnet ist, die Spannung $-j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma$ mit Hilfe eines Strom-Spannungstransformators im Sekundärkreis der Hauptmaschine.

Liegt die Hilfswicklung nicht an den Zahnköpfen, sondern am Nutengrund, so wird sie auch vom Streufluß der Läuferhauptwicklung induziert. Die in der Hilfswicklung induzierte EMK ist dann gleich

$$\mathfrak{E}_1 \sigma - j \mathfrak{J}_2 x_2' \sigma,$$

wo x_2' dem Teil des Streuflusses der Hauptwicklung entspricht, mit dem die Hilfswicklung verkettet ist. Aus der Gleichung (37) folgt für diesen Fall

$$\mathfrak{E}_1 \sigma - j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma - (\mathfrak{E}_1 \sigma - j \mathfrak{J}_2 x_2' \sigma) = -j \mathfrak{J}_2 (x_2 - x_2') \sigma,$$

d. h. der Strom-Spannungstransformator im Sekundärkreis der Hauptmaschine hat nur noch die Spannung $-j\mathfrak{J}_2(x_2 - x_2')\sigma$ zu liefern. Er wird demnach, wenn die Hilfswicklung am Nutengrund liegt, im Verhältnis $\frac{x_2 - x_2'}{x_2}$ kleiner.

Die Hilfswicklung allein eignet sich nicht für die Regulierung nach Bild 3, wo die Wirkleistung sich proportional mit dem Schlupf ändert, denn die in der Hilfswicklung induzierte EMK $\mathfrak{E}_1\sigma$ ist nicht konstant, sondern von der Größe des Wirk- und Blindstromes der Maschine abhängig. Dafür aber eignet sich die Hilfswicklung sehr gut, wenn auf konstante Leistung nach Bild 2 reguliert werden soll. Man braucht nur die volle Größe $\mathfrak{E}_1\sigma$ bzw. $-j\mathfrak{J}_2 x_2\sigma$ mit entgegengesetzten Vorzeichen über die Drehstrom-Erregermaschine den Schleifringen der Läuferhauptwicklung zuzuführen, um für den Sekundärstrom die gewünschte Beziehung [Gleichung (14)] zu erhalten. Der Strom-Spannungstransformator zur Erzeugung der Spannung $-j\mathfrak{J}_2 x_2\sigma$ wird dabei etwa halb so groß wie der entsprechende Transformator bei den oben angegebenen Lösungen.

Wir werden im weiteren zeigen, daß man durch Anordnung eines zweiten Strom-Spannungstransformators im Sekundärkreis der Hauptmaschine auch die Hilfswicklung für beliebige Regulierung gebrauchsfähig machen kann. Es sollen aber zunächst einige Anordnungen angegeben werden, die sich für Regulierung auf konstante Leistung eignen.

A. Läufererregte Erregermaschine.

1. Mechanische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine. Es sei hier, wie auch bei den weiteren Schemata für konstante Leistung, angenommen, daß die Hilfswicklung an den Zahnköpfen liegt. Dann ist ihre Spannung gleich $\mathfrak{E}_1\sigma$. Die Spannung der Sekundärwicklung des rückwirkungslosen Strom-Spannungstransformators T_3 (Bild 11) beträgt $j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma$. Die Hilfswicklung

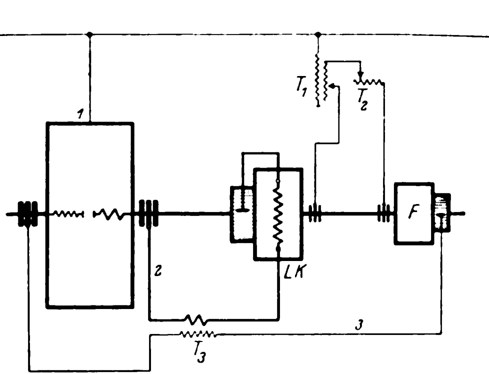


Bild 11. Hilfsapparate im Sekundärkreis. Die läufererregte Erregermaschine (LK) ist mit der Hauptmaschine mechanisch gekuppelt.

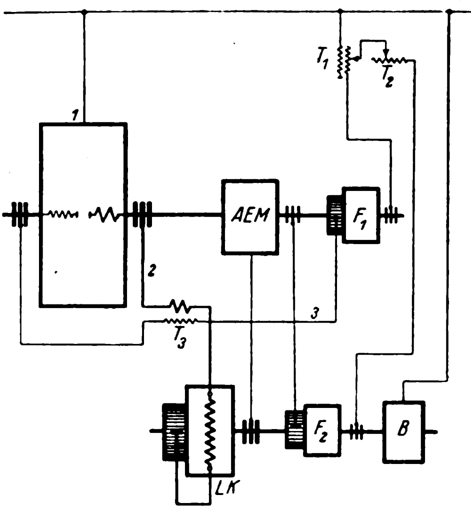


Bild 12. Hilfsapparate im Sekundärkreis. Die läufererregte Erregermaschine (LK) ist mit der Hauptmaschine elektrisch gekuppelt.

und die Sekundärwicklung des Transformators T_3 sind hintereinander geschaltet und an den Kommutator eines Frequenzwandlers F angeschlossen, der die zugeführte Spannung auf Netzfrequenz umformt und zusammen mit den Spannungen der Transformatoren T_1 und T_2 den Schleifringen der LK-Maschine zuführt. Die Spannung am Kommutator der LK-Maschine ist

$$[-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{E}_1\sigma + j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma](1 - \sigma).$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung (37) an Stelle des Gliedes $-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)$ ein, so erhält man für den Sekundärkreis der Hauptmaschine

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)(1-\sigma) + \mathfrak{E}_1\sigma^2 - j\mathfrak{J}_2 x_2\sigma + j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma(1-\sigma). \tag{38}$$

Den Transformator bildet man so aus, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{23}\cos\alpha &= x_2 \\ k_{23}\sin\alpha &= r_2, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

dann wird

$$\mathfrak{J}_2\{r_2(1-\sigma) + [r_2 + j x_2]\sigma^2\} = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)(1-\sigma) + \mathfrak{E}_1\sigma^2 \tag{38a}$$

Die Größe $[r_2 + j x_2]\sigma^2$ kann gegenüber $r_2\ (1-\sigma)$ vernachlässigt werden. Damit ergibt sich

$$\mathfrak{J}_2 r_2(1-\sigma) = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)(1-\sigma) + \mathfrak{E}_1\sigma^2$$

oder

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) + \mathfrak{E}_1(\sigma^2 + \sigma^3 + \cdots) \tag{40}$$

Hier tritt infolge der mechanischen Kupplung derselbe Fehler auf $(\mathfrak{E}_1\sigma^2)$ wie in der Anordnung nach Bild 5. Dieser Fehler muß besonders (s. weiter unten) korrigiert werden.

2. Elektrische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine (Bild 12.) Die Hilfswicklung ist wiederum hintereinandergeschaltet mit der Sekundärwicklung des Transformators T_3 und zum Kommutator eines Frequenzwandlers F_1 geführt, der mit der Hauptwelle mechanisch gekuppelt ist. Die auf Netzfrequenz umgeformte Spannung dieses Frequenzwandlers zusammen mit den Spannungen der Transformatoren T_1 und T_2 wird den Schleifringen eines zweiten Frequenzwandlers F_2 zugeführt, der mit der LK-Maschine starr gekuppelt ist. Der Frequenzwandler F_2 erregt eine asynchrone Erregermaschine AEM, die ihrerseits die Erregung der LK-Maschine liefert.

Abgesehen von der Anordnung der Hilfsapparate, die hier im Sekundärkreis liegen, ist die Regulierung nach Bild 12 vollkommen identisch mit der nach Bild 7. Wie dort bewiesen wurde, tritt in der Klemmenspannung der LK-Maschine der Faktor $(1-\sigma)$ nicht auf, auch wenn die Belastungsmaschine eine Asynchronmaschine ist. Infolgedessen ist die Klemmenspannung der LK-Maschine gleich

$$-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{E}_1\sigma + j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (37) an Stelle des Summanden $-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)$ ein, so ergibt sich für den Sekundärkreis der Hauptmaschine

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - j\mathfrak{J}_2 x_2\sigma + j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma. \tag{41}$$

Den Transformator T_3 bemißt man so, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{23} &= x_2 \\ \alpha &= 0, \end{aligned}\right| \tag{42}$$

dann wird

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu). \tag{43}$$

Fehlspannungen treten hier nicht auf.

B. Ständererregte Erregermaschine.

1. Mechanische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine. Der rückwirkungslose Strom-Spannungstransformator T_4 (Bild 13) dient dazu, die Induktivität der Erregerwicklung der ständererregten Erregermaschine (SK) aufzuheben. Die Sekundärspannung dieses Transformators ist gleich

$$j\mathfrak{J}_3 k_{34} e^{-j\beta}\sigma.$$

Diese Spannung wird vom Frequenzwandler F auf Netzfrequenz umgeformt und zusammen mit den Spannungen der Transformatoren T_1 und T_2 einer LK-Maschine zugeführt. Die Klemmenspannung dieser LK-Maschine beträgt

$$[-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) + j\mathfrak{J}_3 k_{34} e^{-j\beta}\sigma](1-\sigma).$$

Für den Erregerkreis der SK-Maschine (Stromkreis 3) gilt dann die Spannungsgleichung

$$\mathfrak{J}_3 (r_3 + j\,\sigma\, x_3) = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu)(1 - \sigma) - \nu\, \mathfrak{E}_1 \sigma + j\, \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha} \sigma + j\, \mathfrak{J}_3 k_{34} e^{-j\beta} \sigma (1 - \sigma), \qquad (44)$$

wo ν das Übersetzungsverhältnis des Spannungstransformators T_5 bedeutet.

Bildet man den Transformator T_4 so aus, daß

$$\left.\begin{aligned} k_{34} \cos\beta &= x_3 \\ k_{34} \sin\beta &= r_3, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

so wird

$$\mathfrak{J}_3 [r_3 (1 - \sigma) + (r_3 + j\,x_3)\,\sigma^2] = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu)(1 - \sigma) - \nu\, \mathfrak{E}_1 \sigma + j\, \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha} \sigma.$$

Vernachlässigt man wie oben das Glied $(r_3 + j\,x_3)\,\sigma^2$ gegenüber $r_3\,(1 - \sigma)$, so ergibt sich

$$\mathfrak{J}_3 r_3 (1 - \sigma) = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu)(1 - \sigma) - \nu\, \mathfrak{E}_1 \sigma + j\, \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha} \sigma. \qquad (44a)$$

Dementsprechend ist die Klemmspannung der SK-Maschine gleich

$$\mathfrak{P}_{SK} = c_{32}\, \mathfrak{J}_3 (1 - \sigma) = \frac{c_{32}}{r_3} [-\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu)(1 - \sigma) - \nu\, \mathfrak{E}_1 \sigma + j\, \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha} \sigma]. \qquad (46)$$

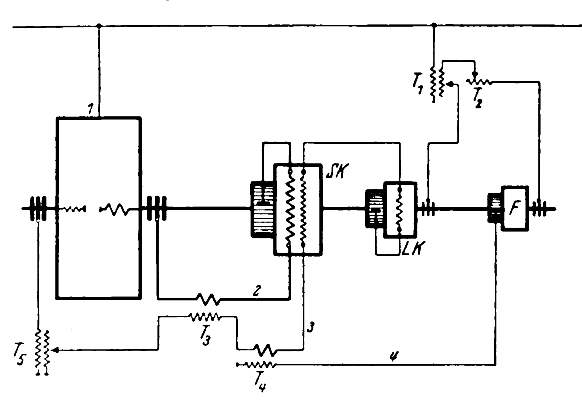


Bild 13. Hilfsapparate im Sekundärkreis. Die ständererregte Erregermaschine (SK) ist mit der Hauptmaschine mechanisch gekuppelt.

Führt man diese Spannung in die Gleichung (37) an Stelle der Spannung $-\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu)$ ein, so gilt für den Sekundärkreis der Hauptmaschine die Beziehung

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu)(1 - \sigma) + \sigma\, \mathfrak{E}_1 \left(1 - \nu \frac{c_{32}}{r_3}\right) - j\, \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma + j\, \frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha} \sigma. \qquad (47)$$

Stellt man den Transformator T_3 so ein, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_{32}}{r_3} k_{23} \cos\alpha &= x_2 \\ \frac{c_{32}}{r_3} k_{23} \sin\alpha &= r_2, \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

so erhält man mit $\nu \frac{c_{32}}{r_3} = 1$ die Beziehung

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\,\mu).$$

Abgesehen von der oben gemachten Vernachlässigung $(j\,x_3 \sigma^2$ gegenüber $r_3)$ erfolgt die Regulierung ohne Fehler.

2. Elektrische Kupplung der Erregermaschine mit der Hauptmaschine (Bild 14). Der einzige Unterschied gegenüber der Anordnung Bild 13 besteht hier darin, daß die SK-Maschine nicht mehr mit der Hauptwelle gekuppelt ist. Die Wirkungsweise aller anderen Teile, der Hilfswicklung, der Transformatoren T_3 und T_4, des Frequenzwandlers F und der LK-Maschine ist vollkommen die gleiche wie in Bild 13. Infolgedessen gilt für den Erregerkreis der SK-Maschine



$$\mathfrak{J}_3 (r_3 + j\sigma x_3) = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \nu \mathfrak{E}_1 \sigma + j \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma + j \mathfrak{J}_3 k_{34} e^{-j\beta}\sigma(1-\sigma). \quad (49)$$

Den Transformator T_4 bemißt man so, daß

$$\left. \begin{array}{l} k_{34} = x_3 \\ \beta = 0 , \end{array} \right\} \quad (50)$$

dann wird

$$\mathfrak{J}_3 (r_3 + j x_3 \sigma^2) = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \nu \mathfrak{E}_1 \sigma + j \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma. \quad (49a)$$

Mit der gleichen Vernachlässigung wie in Bild 13 ($j x_3 \sigma^2$ gegenüber r_3) beträgt die Klemmenspannung der SK-Maschine

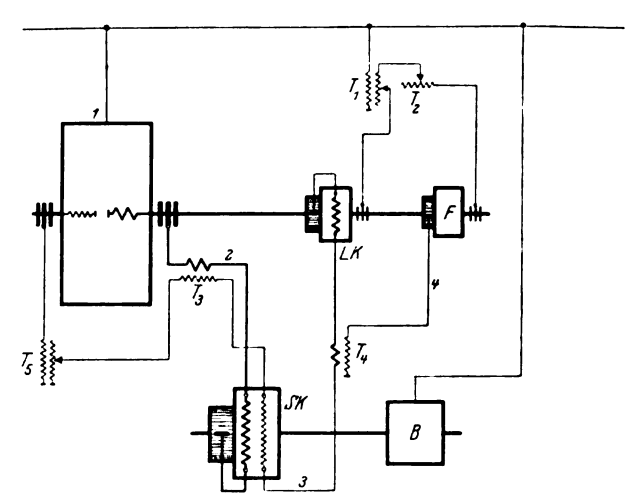


Bild 14. Hilfsapparate im Sekundärkreis. Die ständererregte Erregermeschine (SK) ist mit der Hauptmaschine elektrisch gekuppelt.

$$\mathfrak{P}_{SK} = c_{32} \mathfrak{J}_3 = \frac{c_{32}}{r_3} [-\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \nu \mathfrak{E}_1 \sigma + j \mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma] \cdot \quad (50)$$

Somit gilt für den Sekundärkreis der Hauptmaschine

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) + \sigma \mathfrak{E}_1 \left(1 - \nu \frac{c_{32}}{r_3}\right) - j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma + j \mathfrak{J}_2 \frac{c_{32}}{r_3} k_{23} e^{-j\alpha}\sigma. \quad (51)$$

Bemißt man den Transformator T_3 so, daß

$$\left. \begin{array}{l} \frac{c_{32}}{r_3} k_{23} \cos\alpha = x_2 \\ \frac{c_{32}}{r_3} k_{23} \sin\alpha = r_2, \end{array} \right| \quad (52)$$

so wird mit $\nu \frac{c_{32}}{r_3} = 1$

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu).$$

Die Regulierung erfolgt also mit der gleichen Genauigkeit wie bei mechanischer Kupplung der SK-Maschine nach Bild 13.

Regulierung auf beliebige Charakteristik mit Hilfe einer Asynchronmaschine an Stelle der Hilfswicklung. Wir wollen der Gleichung (37) eine solche Form geben, daß an Stelle der induzierten EMK $\mathfrak{E}_1$ die Klemmenspannung $\mathfrak{P}_1$ auftritt. Wir führen zu diesem Zwecke in die Gleichung (36) den Wert von $\mathfrak{J}_2$ aus Gleichung (9) ein und erhalten

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{\mu 0} + \frac{1}{1+\tau_1} \mathfrak{P}_1 \frac{\sigma + (1+\tau_1)(\lambda + j\mu)}{(1+\tau_1) r_2 + \{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1) x_2]\}\sigma},$$

d. h.

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{P}_1 \frac{1}{1+\tau_1}\sigma - \mathfrak{J}_2 \frac{1}{1+\tau_1}\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)x_2]\}\sigma. \qquad (53)$$

An Stelle des Gliedes $\mathfrak{E}_1\sigma$ der Gleichung 37 tritt hier das Glied $-\mathfrak{P}_1 \frac{1}{1+\tau_1}\sigma$ auf, und an Stelle des Gliedes $-j\mathfrak{J}_2 x_2 \sigma$ das Glied

$$-\mathfrak{J}_2 \frac{1}{1+\tau_1}\{r_1 + j[x_1 + (1+\tau_1)x_2]\}\sigma.$$

Die Gleichung (53) ist ähnlich der Gleichung (13). Der Transformator zur Aufhebung der mit σ veränderlichen Streuspannungen ist größer als nach Gleichung (37). Er ist fast so groß wie bei den Anordnungen nach Bild 5 bis 10. Die Spannung $-\mathfrak{P}_1 \frac{1}{1+\tau_1}\sigma$ kann wie früher durch eine Asynchronmaschine erzeugt werden, die mit der Hauptmaschine mechanisch gekuppelt ist. Mit dieser Asynchronmaschine und dem Strom-Spannungstransformator im Sekundärkreis der Hauptmaschine erhält man weitere Anordnungen, die den Anordnungen nach Bild 11 bis 14 ähnlich sind;

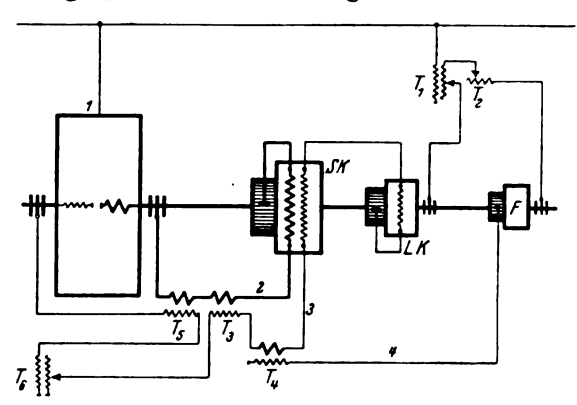


Bild 15. Wie Bild 13. Mit Hilfe des Korrektionstransformators (T 5) und des Spannungstransformators zur Einstellung des Kopplungsgrades (T 6) wird die Hilfswicklung für die Regulierung auf beliebige Charakteristik nach Bild 3 gebrauchsfähig gemacht.

man hat sich nur in den letzten Bildern die Hilfswicklung durch die Sekundärwicklung der Asynchronmaschine ersetzt zu denken. Eine Regulierung auf beliebig mit dem Schlupf veränderliche Charakteristik nach Bild 3 ist ebensogut möglich wie mit den Anordnungen nach Bild 5 bis 10.

Die Theorie der einzelnen Anordnungen mit Asynchronmaschine und Transformator im Sekundärkreis soll nicht weiter angegeben werden, da sie sich leicht mit Hilfe des Vorstehenden entwickeln läßt. Die Einstellung des Transformators T_3 bei Verwendung einer ständererregten Erregermaschine wird bei Regulierung auf geneigte Charakteristik anders erfolgen müssen als bei den Anordnungen nach Bild 13 und 14, und zwar wird man machen müssen

$$\frac{c_{32}}{r_3} k_{23} = x_2 \qquad \text{und} \quad \alpha = 0.$$

Soll die Regulierung auf beliebige Charakteristik mit Hilfe der Hilfswicklung im Läufer der Hauptmaschine möglich sein, so muß gemäß Gleichung (53) mit Hilfe eines rückwirkungslosen Stromtransformators im Sekundärkreis der Hauptmaschine die Spannung der Hilfswicklung erhöht werden, um

$$-\mathfrak{P}_1 \frac{1}{1+\tau_1}\sigma - \mathfrak{E}_1\sigma,$$

d. h. nach Gleichung (8) und (9) um



$$-\mathfrak{P}_1 \frac{1}{1+\tau_1} \sigma - \mathfrak{E}_1 \sigma = -\mathfrak{P}_1 \sigma \left[\frac{1}{1+\tau_1} - \frac{\mathfrak{Z}_2}{(1+\tau_1)\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_1 \sigma}\right] = \frac{1}{1+\tau_1} \mathfrak{J}_2 (r_1 + j x_1) \sigma,$$

falls die Hilfswirkung an den Zahnköpfen liegt bzw. um

$$-\mathfrak{P}_1 \frac{1}{1+\tau_1} \sigma - (\mathfrak{E}_1 - j \mathfrak{J}_2 x_2') \sigma = \frac{1}{1+\tau_1} \mathfrak{J}_2 \{r_1 + j [x_1 + (1+\tau_1) x_2']\} \sigma,$$

falls die Hilfswicklung am Nutengrund liegt. Dem Bild 13 entspricht in diesem Falle das Bild 15. Der Spannungstransformator T_6 dient zur Einstellung der Charakteristik (des Kopplungsgrades). Der Korrektionstransformator T_5, der genau wie der Transformator T_4 als rückwirkungsloser Transformator auszubilden ist, muß im Primärkreis des Spannungstransformators T_6 liegen, damit sein Übersetzungsverhältnis im gleichen Maße geändert wird wie das der Hilfswicklung.

C. Entnahme der Hilfsspannungen von den Hauptschleifringen.

Nach Gleichung (37) sind die Spannungen der Schlupffrequenz, die über die Drehstrom-Erregermaschine den Hauptschleifringen mit entgegengesetztem Vorzeichen zugeführt werden müssen,

$$\mathfrak{E}_1 \sigma \quad \text{und} \quad -j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma.$$

Wir haben diese Spannungen einer Hilfswicklung im Läufer der Hauptmaschine und einem Transformator entnommen. Diese Spannungen werden aber auch in der Läufer-Hauptwicklung induziert. Man könnte also daran denken, die Hauptschleifringe zur Entnahme dieser Spannungen zu verwenden. Es soll gezeigt werden, daß dies nur dann zulässig ist, wenn man in den Läuferkreis der Hauptmaschine zusätzliche Widerstände einbaut und damit die Verluste der Maschine erhöht.

Wir gehen von der Gleichung (37) aus und betrachten etwa die Anordnung zur Regulierung auf konstante Leistung nach Bild 13. Der Transformator T_3 ist nicht mehr vorhanden. Der Stromkreis 3 (der Erregerkreis der SK-Maschine) ist über einen Transformator angeschlossen an die Hauptschleifringe statt an die Hilfsschleifringe. Die Klemmenspannung der LK-Maschine ist gleich

$$[-\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu) + j \mathfrak{J}_3 k_{34} e^{-j\beta} \sigma] (1 - \sigma).$$

Die Spannung an den Hauptschleifringen beträgt

$$\sigma \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{J}_2 (r_2' + j \sigma x_2),$$

wo r_2' den Widerstand der Läuferwicklung der Hauptmaschine allein bedeutet. Somit gilt für den Stromkreis 3

$$\mathfrak{J}_3 (r_3 + j\sigma x_3) = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \nu \mathfrak{E}_1 \sigma + \nu \mathfrak{J}_2 (r_2' + j\sigma x_2) + j \mathfrak{J}_3 k_{34} e^{-j\beta} \sigma (1-\sigma). \quad (54)$$

Der Transformator T_4 soll genau so eingestellt werden wie bei der Anordnung nach Bild 13 [Gleichung (45)]. Mit der gleichen Vernachlässigung wie dort ergibt sich für den Erregerkreis der SK-Maschine

$$\mathfrak{J}_3 r_3 (1-\sigma) = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \nu \mathfrak{E}_1 \sigma + \nu \mathfrak{J}_2 (r_2' + j\sigma x_2) \quad (54a)$$

und für die Klemmenspannung der SK-Maschine

$$\mathfrak{P}_{SK} = c_{32} \mathfrak{J}_3 (1-\sigma) = \frac{c_{32}}{r_3} [-\mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) - \nu \mathfrak{E}_1 \sigma + \nu \mathfrak{J}_2 (r_2' + j\sigma x_2)]. \quad (55)$$

Setzt man diese Spannung in die Gleichung (37) an Stelle des Gliedes $-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)$ ein, so ergibt sich für den Sekundärstrom

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma) + \sigma \mathfrak{E}_1 \left(1 - \nu \frac{c_{32}}{r_3}\right) + \nu \frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{J}_2 (r_2' + j\sigma x_2) - j \mathfrak{J}_2 x_2 \sigma. \quad (56)$$

Macht man $\nu \frac{c_{32}}{r_3} = 1$ (Regulierung auf konstante Leistung), so folgt für den Sekundärstrom

$$\mathfrak{J}_2 (r_2 - r_2') = -\frac{c_{32}}{r_3} \mathfrak{P}_1 (\lambda + j\mu)(1-\sigma). \quad (57)$$

Der Widerstand des Läuferkreises der Hauptmaschine erscheint verkleinert im Verhältnis $\frac{r_2 - r_2'}{r_2}$. Dieses Verhältnis ist etwa gleich 0,2 bis 0,3. Um den gleichen Sekundärstrom $\mathfrak{J}_2$ zu erhalten wie bei Entnahme der Hilfsspannungen von der Hilfswicklung oder von einer Asynchronmaschine, müssen die Regelspannungen $-\frac{c_{32}}{r_3}\mathfrak{P}_1\lambda$ und $-j\frac{c_{32}}{r_3}\mathfrak{P}_1\mu$ etwa 3 bis 5 mal kleiner sein als dort. Baut man keine zusätzlichen Widerstände ein, so werden die Regelspannungen hierbei derart klein, daß die Bürstenübergangswiderstände sich störend bemerkbar machen. Diese Schwierigkeit bei Entnahme der Hilfsspannungen von den Hauptschleifringen rührt davon her, daß an den Hauptschleifringen nicht nur die Spannung $\sigma\mathfrak{E}_1 - j\mathfrak{J}_2\sigma x_2$, sondern auch noch die Ohmsche Spannungskomponente $\mathfrak{J}_2 r_2'$ der Läuferwicklung auftritt, und daß infolgedessen auch diese mit entgegengesetztem Vorzeichen den Hauptschleifringen zugeführt wird.

V. Erzeugung von Spannungen, die σ^2 proportional sind.

Die Regulieranordnung Bild 16 ist in den Hauptteilen identisch mit der Regulieranordnung Bild 11 und dient wie jene zur Konstanthaltung der Leistung der Hauptmaschine. Wie wir oben gesehen haben, arbeitet die Anordnung Bild 11 nicht genau. Infolge der mechanischen Kupplung der LK-Maschine mit der Hauptmaschine ist dort die Aufhebung der Schlupf-EMK $\mathfrak{E}_1\sigma$ unvollkommen, es bleibt eine Restspannung $\mathfrak{E}_1\sigma^2$ übrig, die im Strome Fehler bis zu 30% verursachen kann. Die Korrektionsmaschine KM mit ihrem Antriebsmotor dient nun dazu, eine Spannung zu erzeugen, die dem Schlupf in der zweiten Potenz proportional ist und die die Fehlspannung $\mathfrak{E}_1\sigma^2$ aufhebt[1].

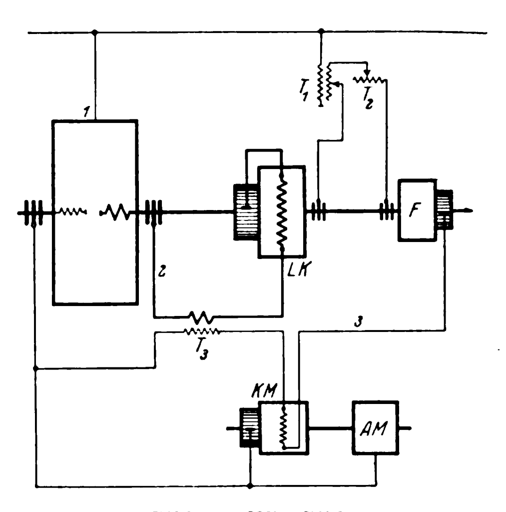


Bild 16. Wie Bild 11.
Mit Hilfe der Korrektionsmaschine (KM) werden die Fehlspannungen, die σ^2 proportional sind, beseitigt.

Der Antriebsmotor der KM ist ein Asynchronmotor, der von einer Spannung der Schlupffrequenz gespeist wird (in Bild 16 von der Hilfswicklung) und dessen Drehzahl infolgedessen der Schlupffrequenz entspricht. Der Kommutator der KM ist an die Hilfswicklung angeschlossen. Die Spannung $\mathfrak{E}_1\sigma$ erzeugt infolgedessen in der KM ein Drehfeld, dessen Geschwindigkeit gegenüber dem Raum der Schlupffrequenz proportional ist. Rotiert der Anker der KM mit dem Drehfeld, so ist die von dem Drehfeld in der Ankerwicklung induzierte EMK gleich Null und in dem Anker fließt ein Gleichstrom, dessen Größe der Spannung $\mathfrak{E}_1\sigma$ proportional ist, d. h. das Feld der KM ist $\mathfrak{E}_1\sigma$ proportional. Da die Drehzahl dieses Drehfeldes σ proportional ist, so ist die in der Ständerwicklung der KM induzierte EMK proportional $\mathfrak{E}_1\sigma^2$.

Die Klemmenspannung der LK-Maschine im Bild 16 beträgt nun

$$[-\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu) - \mathfrak{E}_1\sigma + j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma - \mathfrak{E}_1\sigma^2](1-\sigma).$$

Für den Sekundärkreis der Hauptmaschine gilt

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1(\lambda + j\mu)(1-\sigma) + \mathfrak{E}_1\sigma^3 - j\mathfrak{J}_2 x_2\sigma + j\mathfrak{J}_2 k_{23} e^{-j\alpha}\sigma(1-\sigma) \qquad (58)$$

An Stelle des Störungsgliedes $\mathfrak{E}_1\sigma^2$ tritt hier das Störungsglied $\mathfrak{E}_1\sigma^3$ auf, das nur 1 bis 2% von $\mathfrak{J}_2 r_2$ ausmacht und vernachlässigt werden kann. Stellt man den

[1] Ein anderes einfacheres Mittel zur Aufhebung solcher Fehlspannungen wird in einer weiteren Arbeit mitgeteilt.

Transformator T_3 so ein wie bei der Anordnung Bild 11 [Gleichung (39)], nämlich

$$k_{23} \cos \alpha = x_2$$
$$k_{23} \sin \alpha = r_2,$$

so ergibt sich mit der gleichen Vernachlässigung wie dort

$$\mathfrak{J}_2 r_2 = -\mathfrak{P}_1 (\lambda + j \mu).$$

In gleicher Weise läßt sich das Störungsglied $\mathfrak{J}_3 (r_3 + j x_3) \sigma^2$ beseitigen, das bei Verwendung einer ständererregten Erregermaschine auftritt. Erweitert man z. B. die Regulieranordnung nach Bild 8 durch das beschriebene Aggregat und speist den Kommutator der KM von der Sekundärwicklung des Transformators T_5, so tritt an ihrem Ständer die Spannung $j \mathfrak{J}_3 k_{35} e^{-j\beta} \sigma^2$ auf. Schaltet man den Ständer der KM in Reihe mit der Primärwicklung des Transformators T_5, so verschwindet in der Spannungsgleichung (19) für den Erregerkreis der SK-Maschine die störende Spannungskomponente $-j \mathfrak{J}_3 k_{35} e^{-j\beta} \sigma^2$ und die Gleichung (21a) stimmt genau. Schaltet man dagegen den Ständer der KM in Reihe mit der Sekundärwicklung des Transformators T_5, so bleibt ein Störungsglied übrig, das σ^3 proportional ist, und das ohne weiteres vernachlässigt werden darf.

Über hinreichende Dimensionierungsgleichungen elektrischer Maschinen.

Von

Hermann Weißensee, Braunschweig.

Definition.

Für den Entwurf und den Bau elektrischer Maschinen ist es wertvoll und notwendig, Beziehungen zu besitzen, die den Zusammenhang irgendwelcher Abmessungen einer Maschine mit irgendwelchen Bedingungen über die Beanspruchung, über die Art und das Arbeiten der Maschine vermitteln. Derartige Beziehungen werden Dimensionierungsformeln genannt. Es gibt naturgemäß eine ganze Reihe derartiger Dimensionierungsformeln

$$x, y = f(a, b, c \ldots\ldots)$$

Alle Dimensionierungsformeln sind teils auf theoretischer Grundlage, teils auf der Grundlage der Erfahrung oder der Konstruktion oder des Preises gewonnen. Um nun eine elektrische Maschine mit allen ihren Abmessungen rechnerisch festlegen zu können, ist es zweckmäßig, zunächst diejenigen Abmessungen der Maschine zu bestimmen, die dominierend für die ganze Maschine sind. Es ist klar, daß man bei der Suche nach diesen sogenannten Hauptabmessungen bei der räumlichen Gestalt der Maschine auf drei Größen stoßen wird. Zur Bestimmung dieser drei Größen sind im allgemeinen drei Gleichungen notwendig. Wenn man jedoch, wie das im nachfolgenden geschehen soll, in der Hauptsache drehende Maschinen betrachtet, so lassen sich hier die drei Hauptabmessungen auf zwei Hauptabmessungen zurückführen. Bei der sich drehenden Maschine ist die Zerlegung in zwei Bestandteile, dem Ständer und dem Läufer, gegeben. Mit Rücksicht auf die Gesetze der Mechanik ist man aber gezwungen, dem Läufer die Gestalt eines symmetrischen Körpers und dem Ständer eine zylindrische Bohrung zu geben. Ein Zylinder ist aber bestimmt, wenn sein Durchmesser und seine Länge bestimmt sind. Hier sind also zur Bestimmung der räumlichen Hauptdimensionen zwei Gleichungen erforderlich.

Die Berechnungsweise der rotierenden elektrischen Maschinen wäre somit so aufzubauen, und ist auch so aufgebaut, daß zuerst die beiden Hauptabmessungen,



Zylinderdurchmesser und Zylinderlänge, festzulegen wären und dann die Bestimmung anderer Abmessungen vorgenommen wird. Schreibt man allgemein

$$D = f(a_1, b_1, c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

und

$$l = f(a_2, b_2, c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots),$$

so sind diese Gleichungen die Grunddimensionierungsformeln einer Maschine und sie sollen, entsprechend ihrer Wichtigkeit, im nachfolgenden, wo versucht werden soll, sie aufzubauen, ganz allgemein Dimensionierungsgleichungen genannt werden.

Die hinreichenden und notwendigen Dimensionierungsgleichungen.

Es war bereits kurz darauf hingewiesen worden, daß die Dimensionierungsgleichungen entweder auf theoretischer Grundlage oder auf der Grundlage der Erfahrung erhalten werden können. Es sollen hier die Unterschiede an dem Aufbau der Dimensionierungsgleichungen so festgelegt werden, daß zwischen hinreichenden und notwendigen Dimensionierungsgleichungen unterschieden wird. Es soll eine Dimensionierungsgleichung als hinreichend bezeichnet werden, wenn sie auf der Grundlage der Erfahrung oder des Vergleiches die Festlegung der Hauptabmessungen ermöglicht, ohne daß zu ihrer Aufstellung und Anwendung eine zwingende Notwendigkeit vorliegt. Andererseits soll eine Dimensionierungsgleichung als notwendig bezeichnet werden, wenn sie Forderungen enthält, die bei der Festlegung der Hauptabmessungen unbedingt berücksichtigt werden müssen. Könnte beispielsweise der Durchmesser einer Maschine gegebener Leistung durch Vergleich mit dem Durchmesser einer anderen Maschine gewonnen werden aus der Beziehung

$$D = k \cdot D_1 \cdot \frac{N}{N_1},$$

worin k ein aus der Erfahrung gefundener Korrektionsfaktor ist, so wäre diese Gleichung eine hinreichende. Werden andererseits die Abmessungen festgelegt durch Forderungen gestellter Natur wie Wirkungsgrad, Preis, Drehzahländerung oder Forderungen gegebener Natur, wie Festigkeit, Erwärmung, Herstellung, Transport usw., so sind die für diese Forderungen geltenden Gleichungen notwendige Dimensionierungsgleichungen, wie z. B. die Fliehkraftbeanspruchung, die den Durchmesser festlegt zu

$$D \leqq \frac{60 \cdot v_{max}}{\pi \cdot n}$$

worin v_{max} die maximal zulässige Umfangsgeschwindigkeit und n die Drehzahl bedeuten.

Es ist selbstverständlich, daß man bei der Suche nach Dimensionierungsgleichungen für elektrische Maschinen bestrebt ist, notwendige Dimensionierungsgleichungen zu finden. Leider spielen bekanntlich meistens die Erwärmungsvorgänge mit Rücksicht auf die Isolation die Hauptrolle bei der Ausnutzung der elektrischen Maschine; andererseits ist es außerordentlich schwer, ja fast unmöglich, die Hauptabmessungen in Abhängigkeit von einer bestimmten Übertemperatur festzulegen. Es ist daher nur in wenigen Fällen möglich (langsamlaufende Synchronmaschinen in Abhängigkeit vom Schwungmoment, Turbogeneratoren in Abhängigkeit von der Fliehkraft und der Durchbiegung, große Gleichstrommaschinen in Abhängigkeit von der Reaktanzspannung) notwendige Dimensionierungsgleichungen zu verwenden. Wenn man jedoch diese Spezialfälle ausschließt, so bleibt für die Dimensionierung schließlich nichts weiter übrig, als mit hinreichenden Gleichungen zu arbeiten. Das heißt also, die Abmessungen einer neu zu berechnenden Maschine sind auf der Grundlage des Vergleichs mit anderen bekannten Maschinen derselben Gattung festzulegen. Wenn wir uns daher im nachfolgenden mit dem Aufbau der hinreichenden Dimensionierungsgleichungen beschäftigen wollen, so wird es sich in



der Hauptsache darum handeln, festzustellen, welche Vergleichsgrößen für diese Gleichungen brauchbar sind. Dabei ist zu bedenken, daß für die Gleichungen, die den Grundstock für die weitere Rechnung bilden, nur wenige bekannte Größen in Frage kommen. Sieht man von Spezialfällen ab, so sind meistens nur Leistung, Drehzahl und Spannung bekannt, und nur diese Größen können daher den Ausgangspunkt für die Dimensionierungsgleichung bilden.

Geschichtliches.

Schon in den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts hat man sich in den Kreisen der Dynamobauer bemüht, Ankerdurchmesser, Ankerlänge, Leistung und Drehzahl miteinander in Beziehung zu bringen. Aber erst 1891 gelingt es W. B. Esson, die Dimensionierungsgleichung

$$N = C \cdot D^2 \cdot l \cdot n$$

wissenschaftlich zu begründen. Mit der Entwicklung des Elektromaschinenbaues stellt es sich dann aber heraus, daß der C-Wert der Essonschen Gleichung (Leistungskonstante) nicht, wie von Esson angenommen wurde, konstant ist, sondern stark veränderlich ist und sich hauptsächlich mit dem Ankerdurchmesser ändert. Die Folgezeit bringt daher die Aufstellung von C-Wertkurven (Arnold, Sengel, Rothert).

Zavada (vor ihm wohl schon Nikol. Artjemjew) weist 1916 darauf hin, daß für die Dimensionierung der Dynamomaschinen auch die Leistungsgleichung von der Form

$$N = K \cdot D^3 \cdot l \cdot n$$

gut brauchbar ist.

F. Unger hat 1920 in seinem Aufsatz „Die Abmessungen der Einphasenbahnmotoren" unter Festlegung der maximalen Beanspruchungen, maximale Zahninduktion und Stromdichte, den theoretischen Aufbau des Essonschen C-Wertes, bezogen auf Drehmoment für diese Motoren, angegeben.

Erst 1922 zeigt Emde, daß man, wenn man nach der mechanischen Bedeutung fragt, den Essonschen C-Wert als mittlere drehende Schubspannung in der Leistungsgleichung festsetzen kann. Emde schreibt

$$N = \sigma \cdot \pi^2 \cdot D^2 \cdot l \cdot n_s,$$

worin σ als mittlerer Drehschub, also als Maß der Oberflächenausnutzung einzusetzen ist. 1924 hat dann Metzler die Änderung des mittleren Drehschubes mit dem Ankerdurchmesser bei Gleichstrommaschinen untersucht.

Die Schubbelastung.

Wenn man von der geschichtlichen Entwicklung der Dimensionierungsgleichungen ausgeht, so erscheint es zweckmäßig, Vergleichsfunktionen auf der Grundlage

$$\frac{N}{n} = f(D, l)$$

zu entwickeln.

Die Leistung N wird meistens in kW, die Drehzahl n in $\frac{1}{\min}$ angegeben. Wir wollen daher den Quotienten

$$\frac{60\,N}{n} = A$$

als Leistungsquotienten in kJoule bezeichnen und in die Rechnung einführen.

Sind nun von einer Anzahl Maschinen die Leistungsquotienten A_1, A_2.... und die zugehörigen Ankerdurchmesser D_1, D_2.... und die Ankerlängen l_1, l_2.... bekannt, so könnte man versuchen, die Hauptabmessungen einer neu zu entwerfenden Maschine mit Hilfe der einfachen Vergleichsfunktion



$$D \cdot l = \frac{A}{m}\left(\frac{D_1 \cdot l_1}{A_1} + \frac{D_2 \cdot l_2}{A_2} + \dots \frac{D_m \cdot l_m}{A_m}\right) \cdot k = \frac{A \cdot k}{m} \cdot \sum_1^m \frac{D_x \cdot l_x}{A_x}$$

zu ermitteln. m ist die Anzahl der Maschinen und k ein aus der Erfahrung gewonnener Korrektionsfaktor. Die Erfahrung lehrt jedoch, daß der Korrektionsfaktor k keine Konstante ist, sondern eine von der Anzahl m und den gewählten Größen stark abhängige Veränderliche. Es ist daher vorteilhaft, auf Erfahrungswerte zu verzichten und $m = 1$, $D_1 = 1$ m, $l_1 = 0{,}1$ m zu setzen, dann wird

$$D \cdot l = A \cdot \frac{1 \cdot 0{,}1}{A_1} \cdot k = A \cdot k'. \tag{2}$$

Um dieser Vergleichsfunktion Gleichung (2) einen Sinn zu geben, ist es am einfachsten, nach der mechanischen Bedeutung von k' zu fragen. Geht man dabei von der allgemein gültigen Bewegungsgleichung aus, so ist:

$$N = P \cdot v \cdot \cos(P, v).$$

Für die Drehbewegung kann man schreiben

$$P \cdot \cos(P, v) = P_t \text{ und } v = \frac{D \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{D}{2} \cdot \omega$$

und

$$N = P_t \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega.$$

Nun ist

$$P_t \cdot \frac{D}{2} = M_d; \quad N = M_d \cdot \omega.$$

Ist N die Gesamtleistung einer Maschine, so ist

$$P_t' = \sum_{D\pi l} P_t$$

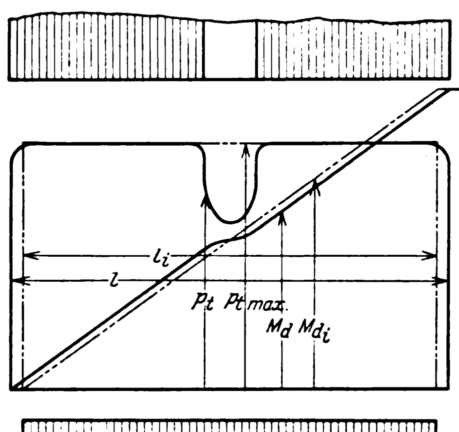


Bild 1. Schubbelastung und Drehmoment bei einem Anker mit einem Kühlschlitz.

$$p_t = f(l); \quad p_{t\,max}; \quad l_i;$$
$$M_d = \int p_t \cdot \frac{D}{2} \cdot d\,l; \quad M_{d\,i}.$$

die Summe aller Tangentialkräfte auf der Ankeroberfläche und

$$M_d = \sum_{D\pi l} P_t \cdot \frac{D}{2}$$

das resultierende Drehmoment aller Tangentialkräfte.

Teilt man den Anker in unendlich viele Scheiben von der Stärke d l ein, so kann man M_d leicht bestimmen, indem man es als resultierendes Moment aller an den parallelen Scheiben wirkenden Momente auffassen kann. Diese Zerlegung bringt, da der Momentvektor einer Kraft in bezug auf eine Gerade linienflüchtig ist (algebraische Addition aller Teilmomente) die einfache Formel

$$M_d = \int_0^l m_d \cdot d\,l.$$

Zur Lösung dieses Integrals müssen Aussagen über m_d gemacht werden. Dabei soll der übliche Weg eingeschlagen werden, indem man sich entsprechend Bild 1 den Anker einer Maschine von der Länge l überführt denkt in den sogenannten homogenen Anker von der gedachten Länge l_i. Dann gilt

$$l_i = \frac{\int_0^l p_t \cdot dl}{p_{t\,max}}$$

und

$$M_d = \int_0^l m_d \cdot dl = p_{t_{max}} \cdot \frac{D}{2} \cdot \int_0^{l_i} dl = p_{t_{max}} \cdot \frac{D}{2} \cdot l_i . \qquad (3)$$

Darin ist $p_{t_{max}}$ die maximal am Anker auftretende Tangentialkraft der gedachten Scheibe von der Stärke d l. Man wird daher, wenn man sich an die Bezeichnungen der Mechanik anlehnt, $p_{t_{max}}$ die maximale drehende Schubbelastung des Ankers nennen. Nun war

$$N = M_d \cdot \omega$$

also

$$N = p_{t_{max}} \cdot D \cdot l_i \cdot \frac{\pi \cdot n}{60} \qquad (4)$$

oder

$$A = p_{t_{max}} \cdot \pi \cdot D \cdot l_i \qquad (4a)$$

und schließlich

$$k' = \frac{p_{t_{max}}}{\pi} \cdot \frac{l_i}{l} .$$

Um die abgeleitete Dimensionierungsgleichung 4a als spezialisierte Größengleichung schreiben zu können, ist zu beachten, daß A in kJoule gegeben ist. Führt man D und l in m ein, so ergibt sich die Dimension von $p_{t_{max}}$ zu $\frac{\text{kJoule}}{\text{m}^2}$. Das hat den Vorteil, daß man auch $p_{t_{max}}$ entsprechend seiner mechanischen Bedeutung in kg/cm angeben kann, da

$$\frac{1\ \text{kJoule}}{\text{m}^2} = 1{,}02\ \text{kg/cm} = \sim 1\ \text{kg/cm}$$

ist. Wenn man nun diese Dimensionierungsgleichung an Hand ausgeführter Maschinen auf ihre Brauchbarkeit untersucht, so ergibt sich die Tatsache, daß die Art, das Arbeiten und die Konstruktion bei elektrischen Maschinen einen sehr großen Einfluß auf die zulässige Schubbelastung haben. Ferner ergibt sich die Tatsache, daß die Schubbelastung fast linear mit dem Durchmesser D wächst. Um diese Verhältnisse näher betrachten zu können, soll im nachfolgenden der Zusammenhang der Schubbelastung mit den elektromagnetischen Größen untersucht werden.

Der Zusammenhang der Schubbelastung mit den elektromagnetischen Größen.

Wenn auch für die Dimensionierung elektrischer Maschinen die Kenntnis eines Zusammenhanges der Schubbelastung mit den elektromagnetischen Größen nicht notwendig ist, so soll doch aus den eben gegebenen Gründen dieser Zusammenhang gesucht werden. Man kann nun auf verschiedenen Wegen zu einer Beziehung zwischen Schubbelastung und elektromagnetischen Größen kommen. Es soll hier jener Weg eingeschlagen werden, der bisher vielfach bei der Ableitung der Essonschen Leistungskonstanten benutzt wurde. Setzen wir

$$N = m \cdot E \cdot J \cdot \cos \varphi,$$

so ist für alle Maschinen

$$E = 4 \cdot \xi_E \cdot w \cdot \frac{n}{60} \cdot p \cdot \xi \cdot \Phi,$$

worin ξ_E der Formfaktor und ξ der Wicklungsfaktor ist. Drücken wir noch den Kraftfluß Φ durch den zeitlichen Höchstwert der Induktion aus

$$\Phi = \alpha_i \cdot B_{l_{max}} \cdot \frac{\pi \cdot D}{2\,p} \cdot l_i,$$

so wird



$$N = m \cdot 2 \cdot \xi_E \cdot w \cdot \frac{n}{60} \cdot \xi \cdot \alpha_i B_{l_{max}} \cdot \pi \cdot D \cdot l_i \cdot J \cdot \cos\varphi . \tag{5}$$

Nun ist jedoch $2 \cdot m \cdot w \cdot J = \Theta$ der effektiven Gesamtdurchflutung des Ankers (absolut genommen ist $\Theta = 0$) und somit

$$N = \xi_E \cdot \xi \cdot \alpha_i \cdot B_{l_{max}} \cdot \Theta \cdot D \cdot \pi \cdot l_i \cdot \frac{n}{60} \cdot \cos\varphi . \tag{5 a}$$

Daraus ergibt sich

$$p_{t_{max}} = \xi_E \cdot \xi \cdot \alpha_i \cdot B_{l_{max}} \cdot \Theta \cdot \cos\varphi = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit.}} \cdot \Theta \cdot \cos\varphi .$$

Bei Wechselstrommaschinen werden die Hauptabmessungen nicht durch die Wirkleistung, sondern durch die Scheinleistung

$$N_S = \frac{N}{\cos\varphi} \tag{6}$$

bestimmt.

Führen wir demzufolge die scheinbare Schubbelastung $p_{t_{max}S}$ ein, so ergibt sich

$$p_{t_{max}S} = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit.}} \cdot \Theta . \tag{6 a}$$

Diese Beziehung Gleichung (6 a) für $p_{t_{max}S}$ gilt ganz allgemein für jede elektrische Maschine und wir werden im nachfolgenden den Einfluß der 4 Faktoren ξ_E, ξ, $B_{l_{mit.}}$ und Θ zu untersuchen haben.

Bei der Gleichsetzung der mechanischen Leistung mit der elektrischen Leistung hätte müssen exakt die innere Leistung eingeführt werden. Die innere Leistung ist beim Generator um die Strom- und Eisenverluste größer als die abgegebene Leistung, beim Motor um die Reibungs- und Eisenverluste. Nach Richter ist annähernd

$$N_{in} = \sim \frac{1+\eta}{2\eta} \cdot N ,$$

worin η der Wirkungsgrad ist. Entsprechend wäre die auf die abgegebene Leistung bezogene Schubbelastung mit $\frac{1+\eta}{2\eta}$ zu multiplizieren, wenn sie mit der aus den elektromagnetischen Größen ermittelten Schubbelastung verglichen werden soll.

Die Wicklungs- und Formfaktoren.

Die Bestimmung der Form- und Wicklungsfaktoren ist in der Literatur teilweise bereits eingehend behandelt worden. Es brauchen daher die Gleichungen für diese Größen insbesondere für Wechselstrommaschinen nur kurz zusammengestellt zu werden, um ihren Einfluß auf die Schubbelastung zu erkennen.

Die Gleichstrommaschine.

Ist E_m der Mittelwert der in einer Wicklung induzierten EMK während eines beliebigen Zeitabschnittes T und e die zur Zeit t induzierte EMK, so ist bekanntlich der Formfaktor

$$\xi_E = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^2 \cdot dt}}{E_m} \tag{7}$$

oder nach einigen Umformungen

$$\xi_E = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\Phi_{w_1}^2 + 4\,\Phi_{w_2}^2 + 9\,\Phi_{w_3}^2 + \ldots}}{\Phi_w} ,$$

worin Φ_w der mit der Wicklung verkettete Induktionsfluß ist. Bei der Gleichstrommaschine ist der Formfaktor $\xi_E = 1$, wenn man die geringen Schwankungen des



Wicklungsflusses, hervorgerufen durch die endliche Stromwenderstegzahl, vernachlässigt.

Für den Wicklungsfaktor ξ, dessen Bezeichnung hier bei der Gleichstrommaschine beibehalten werden soll, gilt

$$\xi = \frac{\Phi_w}{\Phi} = \frac{B_{mw}}{B_m}, \tag{8}$$

worin $B_{mw} = \frac{\Phi_w}{T_p \cdot l_i}$ ist und Φ_w der mit der unter Bürstenmitte liegenden Spule verkettete Fluß ist.

Es ist nun allgemein

$$B_m = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} f(x) \cdot dx.$$

Dann gilt für B_{mw}

$$B_{mw} = \xi \cdot B_m = \frac{1}{T_p} \cdot \int_{\frac{T_p - W}{2}}^{\frac{T_p + W}{2}} f(x) \cdot dx,$$

also

$$\xi = \frac{\int_{\frac{T_p - W}{2}}^{\frac{T_p + W}{2}} f(x)\, dx}{\int_0^{T_p} f(x)\, dx},$$

worin W die Spulenweite ist.

Schreibt man nun für f(x) allgemein die Fouriersche Reihe

$$f(x) = B_0 + \sum_{v=1}^{\infty} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v),$$

worin v alle ganzen Zahlen durchlaufen kann, und führt man diesen Wert in unsere Gleichung für ξ ein, so erhält man

$$\xi = \frac{\int_{\frac{T_p - W}{2}}^{\frac{T_p + W}{2}} \sum_{v=1}^{\infty} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v)\, dx}{\int_0^{T_p} \sum_{v=1}^{\infty} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v)\, dx}.$$

Daraus ersieht man, daß der Wicklungsfaktor im allgemeinen nicht nur von der Schrittverkürzung allein, sondern auch von der räumlichen Verteilung der Induktion über die Durchmesserwindung abhängig ist. Es bleibt daher für die allgemeine Lösung nichts weiter übrig, als für jede Harmonische den Wicklungsfaktor zu bestimmen, der dann nur noch von der Schrittverkürzung allein abhängt. Dabei ist zu schreiben

$$\xi_v = \frac{\Phi_{vw}}{\Phi_v} = \frac{B_{vw}}{B_v} = \frac{\int\limits_{\frac{T_p - W}{2}}^{\frac{T_p + W}{2}} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v) \cdot d x}{\int\limits_0^{T_p} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v) \cdot d x} \quad . \tag{9}$$

Nach Integration und Division ergibt sich

$$\xi_v = \sin\frac{v \cdot \pi}{2} \cdot \sin\frac{v W}{2},$$

worin W in elektrischen Geraden einzusetzen ist und v alle ungeraden Zahlen durchläuft. Da sehr häufig das Verhältnis $\frac{W}{T_p}$ gegeben ist, kann man ξ_v auch schreiben

$$\xi_v = \sin\frac{v \cdot \pi}{2} \cdot \sin v \cdot \frac{W \cdot \pi}{T_p 2}, \tag{10}$$

sowohl für $W < T_p$ als auch für $W > T_p$.

Dabei gilt dann für ξ

$$\xi = \sqrt{\frac{(\xi_1 \cdot B_1)^2 + (\xi_3 \cdot B_3)^2 + \ldots}{B_1^2 + B_3^2 + \ldots}}, \tag{11}$$

worin B_1, B_3, ... die Amplituden der einzelnen Harmonischen der Feldkurve bedeuten.

Der Wicklungsfaktor kann nun außer der Wahl des Wickelschrittes auch durch eine Verschiebung der Bürsten aus der neutralen Zone beeinflußt werden.

Es gilt entsprechend dem Vorangegangenen

$$\xi_{\text{Bürst.}} = \frac{\int\limits_{\alpha}^{T_p + \alpha} \sum\limits_{v=1}^{\infty} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v)\, d x}{\int\limits_0^{T_p} \sum\limits_{v=1}^{\infty} B_v \cdot \sin(v x + \beta_v)\, d x}, \tag{12}$$

wenn α der Bürstenverschiebungswinkel ist.

Es ist leicht zu ersehen, daß $\xi_{\text{Bürst.}}$ und ξ einander gleich werden, wenn

$$\alpha = \frac{T_p - W}{2}$$

wird.

Zusammenfassend kann bei der Gleichstrommaschine gesagt werden, daß bei Durchmesserwicklung und Stellung der Bürste in der neutralen Zone $\xi_E \cdot \xi = 1$ ist. Andererseits ergeben geringe Abweichungen von der Durchmesserwicklung bzw. Bürstenstellung kaum merkbare Abweichungen des Produktes von der Einheit.

Die Wechselstrommaschinen.

Bei der Synchronmaschine gilt für den Formfaktor ξ_E ebenfalls die bekannte Formel

$$\xi_E = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int\limits_0^T e^2 \cdot dt}}{E_m}, \tag{7}$$

aus der sich nach einigen Umformungen bei symmetrischer Feldkurve, d. h. wenn die negative Halbwelle das Spiegelbild der positiven in bezug auf die Zeitachse ist, die Beziehung

$$\xi_E = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\Phi_{W_1}^2 + 9\,\Phi_{W_3}^2 + 25\,\Phi_{W_5}^2 + \ldots}}{\Phi_W}$$

herleiten läßt.

Bei sinusförmiger EMK ergibt sich somit

$$\xi_E = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11. \tag{7a}$$

Entsprechend den eben gegebenen Beziehungen kann man auch schreiben

$$\xi_E \cdot \xi = \frac{\sqrt{(\xi_1 \cdot B_1^2) + (\xi_3 \cdot B_3^2) + (\xi_5 \cdot B_5^2) + \ldots}}{\sqrt{2} \cdot B_{mit.}}, \tag{13}$$

wofür angenähert gilt

$$\xi_E \cdot \xi = \sim 1{,}11\,\xi_1. \tag{13a}$$

Für die Wicklungsfaktoren ξ_v der Harmonischen gelten dieselben Beziehungen wie bei der Gleichstrommaschine. So ergibt sich z. B. bei der gewöhnlichen einschichtigen m-Phasenwicklung bei q Nuten pro Pol und Phase

$$\xi_v = \frac{\sin v \cdot \frac{\pi}{2 \cdot m}}{q \cdot \sin \frac{v \cdot \pi}{2 \cdot q \cdot m}}. \tag{14}$$

Ganz entsprechend wird bei der einschichtigen Einphasenwicklung mit Q-Nuten pro Pol, von denen q bewickelt sind

$$\xi_v = \frac{\sin \frac{v \cdot q \cdot \pi}{2 \cdot Q}}{q \cdot \sin \frac{v \cdot \pi}{2 \cdot Q}}.$$

Bei unendlich fein verteilter Dreiphasenwicklung ($q = \infty$, $m = 3$) wird $\xi_1 = 0{,}955$ und bei unendlich fein verteilter Einphasenwicklung ($q = \infty$) mit $\frac{q}{Q} = \frac{2}{3}$ wird $\xi_1 = 0{,}827$.

Für die Dreiphasenmaschine kann daher $\xi_E \cdot \xi \approx \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot 0{,}955 = 1{,}06$ und für die Einphasenmaschine $\xi_E \cdot \xi \approx \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot 0{,}827 = 0{,}918$ gesetzt werden.

Die mittlere Luftinduktion $B_{l_{mit.}}$ und die Durchflutung Θ.

Nachdem für die Gleichung $p_{t_{max}} = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit.}} \Theta$ der Einfluß des Formfaktors ξ_E und des Wicklungsfaktors kurz betrachtet worden ist, sollen nunmehr die beiden anderen Faktoren $B_{l_{mit.}}$ und Θ einer Betrachtung unterzogen werden. Dabei erscheint es zweckmäßig, diese beiden Faktoren nicht direkt zu untersuchen, sondern die Nut-Zahnschicht in die Betrachtungen mit hineinzubeziehen. Um dabei die Behandlung dieser Frage einfach zu gestalten, soll hinsichtlich der Nut-Zahnschicht eine Einschränkung gemacht werden. Es soll nämlich im nachfolgenden nur der Fall der parallelflankigen Nut unter Vernachlässigung des Nutverschlusses behandelt werden. Es dürfte dann unschwer sein, auch den Fall des parallelflankigen Zahnes selber zu entwickeln.



In Bild 2 ist beispielsweise ein Ankerblech mit solchen parallelwandigen offenen Nuten gezeichnet, und zwar für einen Innenanker. Bezeichnet man das Verhältnis von Nutbreite b_n zur mittleren Nutteilung τ_n als Nutverhältnis v_n

$$v_n = \frac{b_n}{\tau_n}, \tag{15}$$

so läßt sich leicht zeigen, daß die Konizität der Zähne a

$$a = \frac{z_{max}}{z_{min}}$$

ausgedrückt werden kann durch die Formel

$$a = \frac{1 - v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right)}{1 - v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2 \cdot \frac{h_n}{D}}. \tag{16}$$

Außerdem ist aus Bild 2 leicht zu ersehen, daß zwischen der maximalen Luftinduktion und der maximalen ideellen Zahninduktion das Verhältnis besteht

$$B_{l_{max}} = B_{zi_{max}} \cdot \frac{l_e}{l_i} \left[1 - v_n \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2 \frac{h_n}{D}\right].$$

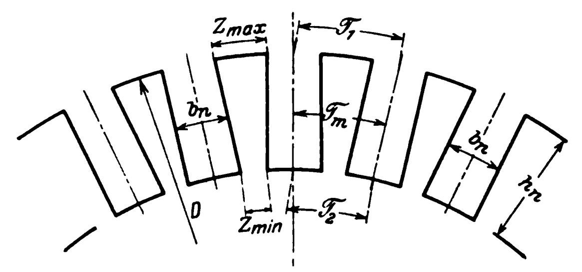


Bild 2. Blechschnitt eines Innenankers.

Hierin ist l_e die reine Eisenlänge und l_i die bereits früher definierte ideelle Ankerlänge. Bezeichnet man zur Abkürzung

$$1 - v_n . \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2 \frac{h_n}{D} = y, \tag{17}$$

so ist

$$B_{l_{mit.}} = \alpha_i \cdot \frac{l_e}{l_i} \cdot y \cdot B_{zi_{max}}. \tag{18}$$

Für die Durchflutung Θ des Ankers läßt sich schreiben $\Theta = z \cdot i_a$, worin z die in Reihe geschaltete Stabzahl ist und i_a der entsprechende Stabstrom. Nun ist ferner $i_a = q_S \cdot j$ und $z = N \cdot n$, worin N die Nutzahl und n die Stäbe pro Nut sind, und schließlich $q_S \cdot n = f_{Cu} \cdot h_n \cdot b_n$, wo f_{Cu} der Nutenfüllfaktor ist. Somit wird

$$\Theta = \frac{D \cdot \pi}{\tau_1} \cdot f_{Cu} \cdot h_n \cdot b_n \cdot j$$

$$\Theta = D^2 \cdot \pi \cdot f_{Cu} \cdot j \cdot \left[\frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right)\right].$$

Bezeichnet man wiederum zur Abkürzung

$$\frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) = v, \tag{19}$$

so ist

$$\Theta = D^2 \cdot \pi \cdot f_{Cu} \cdot v \cdot j \tag{20}$$

oder auch die mittlere Durchflutung pro Flächeneinheit.

$$\vartheta = \frac{\Theta}{D^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 4 \cdot f_{Cu} \cdot v \cdot j. \tag{21}$$

Nach den eben gegebenen Beziehungen würde die Gleichung (6 a) $p_{t_{max}} = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit.}} \cdot \Theta$ sich nun folgendermaßen schreiben:

$$p_{t_{max}} = \xi_E \cdot \xi \cdot \alpha_i \cdot \frac{l_e}{l_i} \cdot B_{zi_{max}} \cdot \left[1 - v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2\frac{h_n}{D}\right] \cdot$$
$$\cdot D^2 \cdot \pi \cdot f_{Cu} \cdot j \cdot \left[\frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right)\right]$$

oder

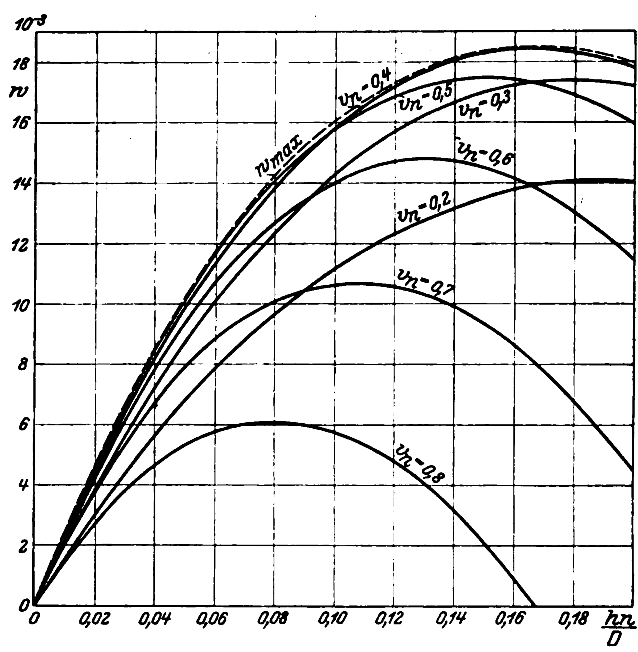


Bild 3. $w = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ beim Innenanker.

$$p_{t_{max}} = \xi_E \cdot \xi \cdot \alpha_i \cdot \frac{l_e}{l_i} \cdot B_{zi_{max}} \cdot f_{Cu} \cdot j \cdot D^2 \cdot \pi \cdot w, \tag{22}$$

wenn

$$w = y \cdot v = \left[1 - v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2 \cdot \frac{h_n}{D}\right] \cdot \left[\frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right)\right] \tag{23}$$

ist.

$w = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ ist in Bild 3 dargestellt.

Es zeigt sich, daß w für ein bestimmtes Nutverhältnis v_n einen Maximalwert erreichen kann. Um zu bestimmen, bei welchem Verhältnis $\frac{h_n}{D}$ dieses Maximum eintritt, braucht nur $\frac{dw}{d\left(\frac{h_n}{D}\right)}$, v_n = konstant, gebildet und gleich Null gesetzt werden. Indem man beachtet, daß

$$w = y \cdot v$$

und danach

$$d w = y \cdot d v + v \cdot d y$$

ist, ergibt sich

$$\frac{d w}{d\left(\frac{h_n}{D}\right)} = \left(\frac{h_n}{D}\right)^2 \cdot (6 v_n - 3 v_n^2) + \frac{h_n}{D} \cdot (4 v_n^2 - 6 v_n) + (v_n - v_n^2) = 0$$

und hieraus das günstigste Verhältnis $\frac{h_n}{D}$ für ein gegebenes Nutverhältnis v_n zu

$$\frac{h_n}{D} = \frac{(6 - 4 v_n) - \sqrt{(6 - 4 v_n)^2 - 4(6 - 3 v_n) \cdot (1 - v_n)}}{2 \cdot (6 - 3 v_n)} . \tag{24}$$

Für den hier vorliegenden Fall hat jedoch die Frage, welchen maximalen Wert kann w für ein gegebenes $\frac{h_n}{D}$ annehmen, das Hauptinteresse. Da sich, wie

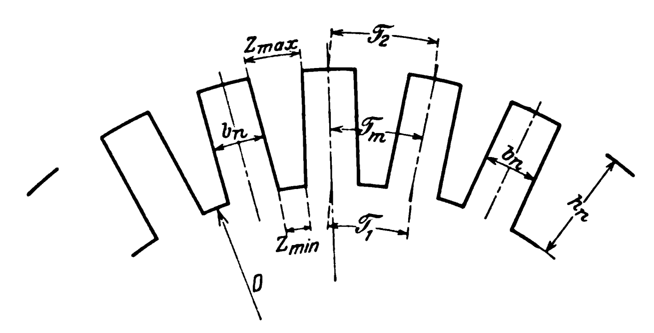


Bild 4. Blechschnitt eines Außenankers.

Bild 3 zeigt, die w-Kurven schneiden, kann man sie wie eine konsekutive Schar sich schneidender Kurven behandeln. Konsekutiv, wenn man v_n als Parameter auffaßt. Es ist mit Hilfe der Differentialrechnung leicht, die Einhüllende einer solchen konsekutiven Kurvenschar zu berechnen. Setzt man

$$w - \left[1 - v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2 \frac{h_n}{D}\right] \cdot \left[\frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right)\right] = 0 ,$$

so muß

$$\frac{\partial f\left(\frac{h_n}{D}, w, v_n\right)}{\partial v_n} = 0$$

auch für die Einhüllende erfüllt sein.

Die partielle Differentiation nach v_n ergibt

$$\left[\frac{h_n}{D} - \left(\frac{h_n}{D}\right)^2\right] \cdot \left[1 - v_n \cdot \left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2 \frac{h_n}{D}\right] + \left[\frac{h_n}{D} - 1\right] \cdot \left[v_n \cdot \left(\frac{h_n}{D} - \left(\frac{h_n}{D}\right)^2\right)\right] = 0$$

und daraus ergibt sich das günstigste Nutverhältnis zu

$$v_{n_{max}} = \frac{1 - 2 \frac{h_n}{D}}{2 - 2 \frac{h_n}{D}} . \tag{25}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für w ein, so ergibt sich die Gleichung der Einhüllenden nach einigen Umformungen zu

$$w_{max} = \frac{\left(\frac{h_n}{D}\right)^5 - 3\left(\frac{h_n}{D}\right)^4 + 3{,}25\left(\frac{h_n}{D}\right)^3 - 1{,}5\left(\frac{h_n}{D}\right)^2 + 0{,}25 \frac{h_n}{D}}{\left(1 - \frac{h_n}{D}\right)^2} . \tag{26}$$

Die w_{max}-Kurve ist ebenfalls in Bild 3 (gestrichelt) eingezeichnet. Sie ist insofern von Wichtigkeit, als sie bei gegebener maximaler Zahninduktion $B_{zi\,max}$ und gegebener Stromdichte j die maximal mögliche Schubbelastung für jedes Verhältnis $\frac{h_n}{D}$ festlegt. Sie zeigt außerdem, daß w_{max} sein Maximum bei $\frac{h_n}{D} = \frac{1}{6}$ erreicht.

Ganz ähnliche Verhältnisse ergeben sich für den Außenanker. In Bild 4 ist ein Ankerblech mit parallelwandigen offenen Nuten für einen Außenanker gezeichnet. Bezeichnet wiederum b_n die Nutbreite, τ_m die mittlere Nutteilung, so sei auch wiederum

$$v_n = \frac{b_n}{\tau_m}. \tag{15}$$

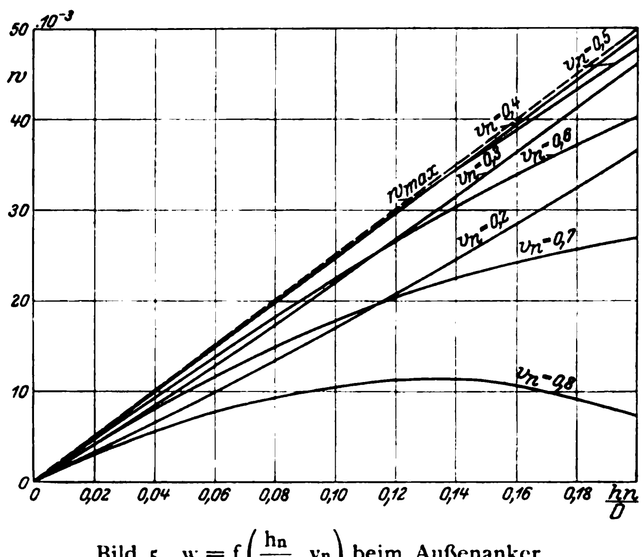


Bild 5. $w = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ beim Außenanker.

Dann ergibt sich für die Konizität der Zähne a

$$a = \frac{z_{max}}{z_{min}}$$

hier die Gleichung

$$a = \frac{1 - v_n\left(1 + \frac{h_n}{D}\right) + 2 \cdot \frac{h_n}{D}}{1 - v_n\left(1 + \frac{h_n}{D}\right)}. \tag{27}$$

Soll auch hier wieder zwischen der Luftinduktion und der ideellen maximalen Zahninduktion die Beziehung Gleichung (18) bestehen

$$B_{l\,mit.} = \alpha_i \cdot \frac{l_e}{l_i} \cdot y \cdot B_{zi\,max},$$

so ergibt sich für y

$$y = 1 - v_n \cdot \left(1 + \frac{h_n}{D}\right). \tag{28}$$

Für die Durchflutung Θ war beim Innenanker geschrieben worden

$$\Theta = D^2 \cdot \pi \cdot f_{Cu} \cdot v \cdot j. \tag{20}$$

Soll auch hier beim Außenanker diese Beziehung gelten, so läßt sich aus Bild 4 leicht zeigen, daß v den Wert

$$v = \frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 + \frac{h_n}{D}\right) \tag{29}$$

erhalten muß.

Somit würde sich für die Schubbelastung $p_{t\,max}$ auch beim Außenanker ergeben

$$p_{t\,max} = \xi_E \cdot \xi \cdot \alpha_i \cdot \frac{l_e}{l_i} \cdot B_{zi\,max} \cdot f_{Cu} \cdot j \cdot D^2 \cdot \pi \cdot w, \tag{22}$$

worin

$$w = y \cdot v = \left[1 - v_n \cdot \left(1 + \frac{h_n}{D}\right)\right] \cdot \left[\frac{h_n}{D} \cdot v_n \cdot \left(1 + \frac{h_n}{D}\right)\right] \tag{30}$$

ist.

Der Verlauf der w-Kurven ist in Bild 5 dargestellt.

Das Hauptinteresse hat auch hier die Frage nach w_{max} für ein gegebenes Verhältnis $\frac{h_n}{D}$. Bildet man daher ganz analog wie beim Innenanker

$$\frac{\partial f\left(\frac{h_n}{D}, w, v_n\right)}{\partial v_n} = 0,$$

so ergibt sich

$$-\left(1 + \frac{h_n}{D}\right) \cdot \left[\frac{h_n}{D} \cdot v_n \left(1 + \frac{h_n}{D}\right)\right] + \left[1 - v_n \left(1 + \frac{h_n}{D}\right)\right] \cdot \left[\frac{h_n}{D}\left(1 + \frac{h_n}{D}\right)\right] = 0$$

und daraus

$$v_{n\,max} = \frac{1}{2 \cdot \left(1 + \frac{h_n}{D}\right)} \tag{31}$$

und schließlich

$$w_{max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h_n}{D}. \tag{32}$$

Im Gegensatz zum Innenanker hat hier w_{max} keinen ausgezeichneten Maximalwert, sondern steigt mit zunehmenden $\frac{h_n}{D}$ geradlinig an. Der Verlauf von w_{max} ist in Bild 5 gestrichelt eingezeichnet.

Die Zahninduktion und die Stromdichte unter Berücksichtigung der Erwärmung.

Nachdem im vorigen Abschnitt die beiden Faktoren $B_{l\,mit.}$ und Θ auf die beiden Größen $B_{zi\,max}$ und j zurückgeführt worden sind [Gleichung (18) und (20)], wird es jetzt unsere Aufgabe sein, die maximale Zahninduktion sowohl als auch die Stromdichte j numerisch festzulegen.

a) Die Stromdichte unter Berücksichtigung der Erwärmung.

Es sind erfahrungsgemäß sehr viele Größen, die die Wahl der Stromdichte bei einer Maschine beeinflussen können. So z. B. die Erwärmung, der Spannungsabfall, die Streuung, die Ankerrückwirkung usw. Die wichtigste Größe dürfte jedoch die Erwärmung sein.

Eine einwandfreie ausreichende Beziehung zwischen der Stromdichte und der zulässigen Kupfertemperatur dürfte nach dem heutigen Stande der Forschung kaum und nur nach Überwindung außerordentlicher mathematischer Schwierigkeiten zu erlangen sein. Es dürfte daher für die vorliegenden Zwecke hinreichend sein, wenn hinsichtlich der Erwärmung eine elementare mathematische Formulierung gewählt wird.

Unterscheidet man nun zwischen Maschinenreihen mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit (Gleichstrommaschinen) und solchen mit gleicher Drehzahl (Synchron-



und Asynchronmaschinen), so kann man für die numerische Festlegung der maximalen Zahninduktion und der Stromdichte die beiden einfachen Beziehungen verwenden:

1. Bei konstanter Umfangsgeschwindigkeit sind die pro Flächeneinheit der Mantelfläche zulässigen Verluste konstant

$$\frac{V_{Watt}}{\pi \cdot D \cdot l} \approx C_7 . \tag{33}$$

2. Bei konstanter Drehzahl sind die pro Flächeneinheit der Mantelfläche zulässigen Verluste proportional dem Durchmesser

$$\frac{V_{Watt}}{\pi \cdot D \cdot l} \approx C_8 \cdot D . \tag{33a}$$

Um jedoch die Einfachheit dieser beiden Beziehungen für die weitere Rechnung beibehalten zu können, muß noch eine Voraussetzung gemacht werden. Das ist die gleiche prozentuale Verlustaufteilung für die zu vergleichenden Maschinen. Wird diese Voraussetzung gemacht, so können an Stelle der Gesamtverluste V_{Watt} die Einzelverluste gesetzt werden.

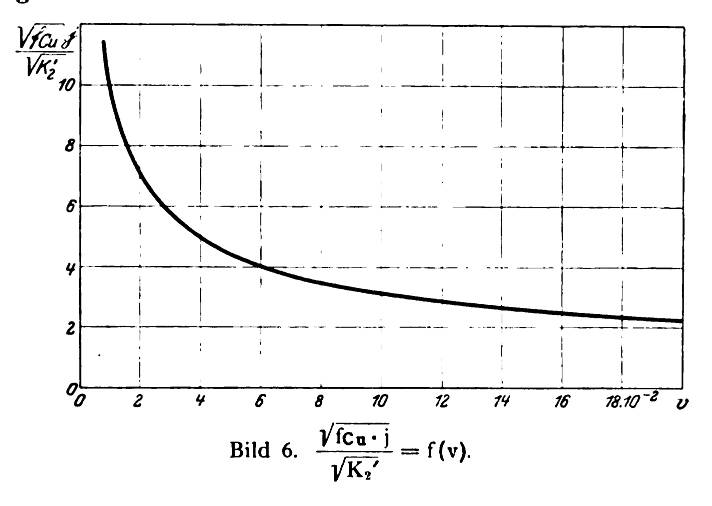


Bild 6. $\frac{\sqrt{f_{Cu} \cdot j}}{\sqrt{K_2'}} = f(v)$.

Die Kupferverluste der im Ankereisen eingebetteten Wicklung lassen sich bekanntlich schreiben

$$V_{Cu}' = m \cdot \frac{2 \cdot w \cdot l}{\lambda \cdot q} \cdot J^2 = 2 \cdot m \cdot \varrho \cdot w \cdot l \cdot J \cdot j = \varrho \cdot \Theta \cdot j \cdot l .$$

Da nun gemäß den eben angestellten Betrachtungen (Gleichung 33)

$$\frac{V_{Cu}'}{D \cdot \pi \cdot l} = K_1 \quad \text{eventuell [nach Gleichung (33a)]} \quad \frac{V_{Cu}'}{D \cdot \pi \cdot l} = K_2 \cdot D$$

sein soll, ergibt sich zunächst für konstante Umfangsgeschwindigkeit

$$K_1 = \frac{\varrho \cdot \Theta \cdot j}{D \cdot \pi}$$

und da man für Θ entsprechend dem vorangegangenen Kapitel

$$\Theta = D^2 \cdot \pi \cdot f_{Cu} \cdot j \cdot v$$

schreiben kann

$$K_1 = \varrho \cdot D \cdot f_{Cu} \cdot v \cdot j^2 . \tag{34}$$

Daraus ergibt sich

$$j = \sqrt{\frac{K_1}{\varrho \cdot f_{Cu} \cdot D \cdot v}}$$

oder auch



$$\sqrt{f_{Cu}} \cdot j = \sqrt{\frac{K_1}{\varrho \cdot D \cdot v}} = \sqrt{\frac{K_1'}{D \cdot v}}. \tag{35}$$

Andererseits wird für konstante Drehzahl entsprechend der Beziehung

$$\frac{V_{Cu}'}{D \cdot \pi \cdot l} = K_2 \cdot D$$

$$j = \sqrt{\frac{K_2}{\varrho \cdot f_{Cu} \cdot v}}$$

oder auch

$$\sqrt{f_{Cu}} \cdot j = \sqrt{\frac{K_2'}{v}}, \tag{35a}$$

worin $K_2' = \frac{K_2}{\varrho}$ ist.

Diese einfache Beziehung Gleichung (35 a) für die numerische Festlegung von $\sqrt{f_{Cu}} \cdot j$ ist in Bild 6 gezeigt.

b) Die maximale Zahninduktion unter Berücksichtigung der Erwärmung.

Ganz analog wie bei der Stromdichte läßt sich auch eine Beziehung zwischen der maximalen Zahninduktion und dem Ankerdurchmesser unter Berücksichtigung

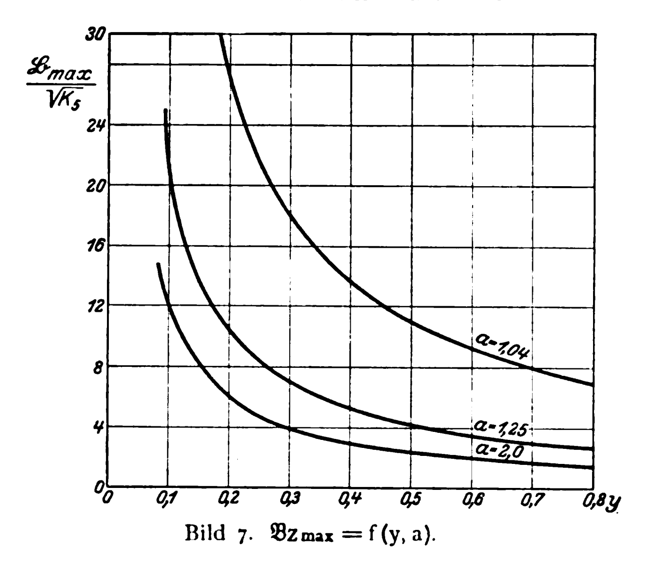


Bild 7. $\mathfrak{B}z_{max} = f(y, a)$.

der zulässigen Erwärmung aufstellen. Es sei jedoch hier gleich erwähnt, daß außer der Erwärmung für die Begrenzung von $B_{zi_{max}}$ noch andere Faktoren, wie die Erregung und die Wirbelstrombildung in den Leitern durch das Nutenlängsfeld sehr stark in Frage kommen. Auf diese Faktoren wird später eingegangen.

Aus den Bildern 2 und 4 geht hervor, daß die Eisenverluste pro Zahn sich zu

$$v_z = \int_0^{h_n} v_e \cdot s \cdot l_e \cdot x \cdot dy$$

ergeben, wenn v_e die spezifischen Eisenverluste, s das spezifische Gewicht, l_e die reine Eisenlänge und x die Breite des Zahnes an der Stelle y sind.

Zur Lösung des Integrales soll die hinreichend genaue Annahme gemacht werden, daß die spezifischen Eisenverluste proportional dem Quadrate der Induktion seien.

$$v_e = k \cdot B_z^2 .$$

Und indem man beobachtet, daß

$$B_{z_x} \cdot x = B_{z_{max}} \cdot z_{min}$$

ist, ergibt sich

$$v_z = k \cdot B_{z_{max}}^2 \cdot z_{min} \cdot l_e \cdot s \cdot h_n \cdot \int_0^{h_n} \frac{dy}{h_n - (1 - a) \cdot y} .$$

Nach Integration wird

$$v_z = \frac{k \cdot B_{z_{max}}^2 \cdot z_{min} \cdot l_e \cdot s \cdot h_n \cdot \ln(a)}{(a - 1)} . \tag{36}$$

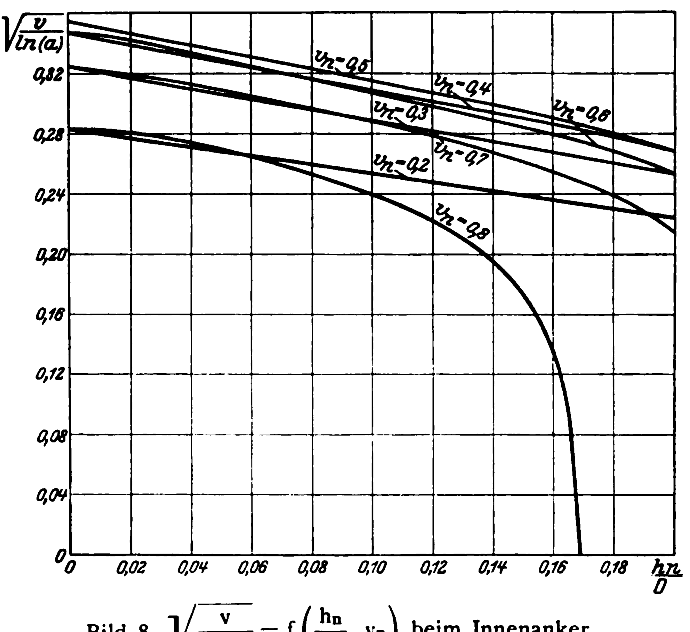


Bild 8. $\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}} = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ beim Innenanker.

Die gesamten Zahneisenverluste bei N Zähnen werden $V_z = N \cdot v_z$ und die Zahneisenverluste pro Flächeneinheit der Ankeroberfläche

$$\frac{V_z}{D \cdot \pi \cdot l} = \frac{k \cdot B_{z_{max}}^2 \cdot z_{min} \cdot l_e \cdot s \cdot h_n \cdot \ln(a) \cdot N}{(a - 1) \cdot D \cdot \pi \cdot l} .$$

Setzt man das Verhältnis $\frac{l_e}{l}$ von reiner Eisenlänge zur gesamten Ankerlänge $\approx 0{,}8$, so ergibt sich nach einigen Umformungen zunächst für Maschinenreihen mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit, wo ja $\frac{V_z}{D \cdot \pi \cdot l} = K_3$ ist,

$$K_3 = \frac{k \cdot B_{z_{max}}^2 \cdot s \cdot y \cdot h_n \cdot \ln(a) \cdot 0{,}8}{(a - 1)} , \tag{36a}$$

woraus weiter

$$B_{z_{max}}^2 = \frac{K_3 \cdot 2}{0{,}8 \cdot s \cdot k} \cdot \frac{1}{D \cdot y^2 \cdot \ln(a)}$$

folgt. Setzt man

$$\frac{2 K_3}{0{,}8 \cdot s \cdot k} = K_4 ,$$

so wird



$$B_{z\,max} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{K_4}{D \cdot \ln(a)}}. \tag{37}$$

Setzt man für $K_4 = K_5 \cdot D$ bei Maschinenreihen gleicher Drehzahl, so gilt für diese

$$B_{z\,max} = \frac{1}{y} \cdot \sqrt{\frac{K_5}{\ln(a)}}. \tag{37a}$$

Der Verlauf dieser Funktion Gleichung (37 a) ist in Bild 7 gezeigt.

Es ist nun jedoch zu beachten, daß die sich aus diesen Formeln ergebende maximale Zahninduktion genau genommen die tatsächliche vorhandene Induktion an der Stelle z_{min} ist, während andererseits die ideelle Induktion für z_{min}, die ja um das Nutenlängsfeld größer ist, numerisch festzulegen ist. Es soll jedoch hier die Vernachlässigung gemacht werden und $B_{z\,max} = B_{zi\,max}$ gesetzt werden, was z. T. auch durch die Vereinfachung der gemachten Annahmen zulässig ist.

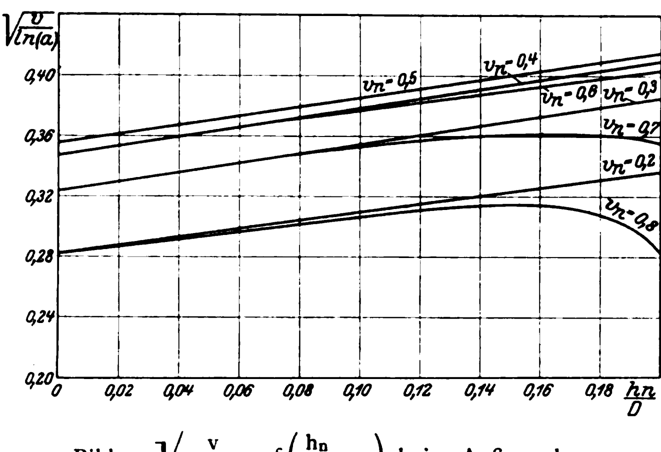


Bild 9. $\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}} = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ beim Außenanker.

Führt man nun die für die Stromdichte j und die maximale Zahninduktion aus den Gleichungen (35) und (37) gefundenen Werte in die Gleichung (22) für die Schubbelastung ein, so ergibt sich

$$p_{t\,max} = \xi_E \cdot \xi \cdot \frac{l}{l_i} \cdot y \cdot v \cdot \sqrt{f_{Cu}} \cdot \sqrt{\frac{K_1'}{D \cdot v}} \cdot \alpha_i \cdot \frac{1}{y}\sqrt{\frac{K_4}{D \cdot \ln(a)}} \cdot \pi \cdot D^2$$

$$p_{t\,max} = \xi_E \cdot \xi \cdot \frac{l}{l_i} \cdot \sqrt{f_{Cu}} \cdot \alpha_i \cdot \sqrt{\frac{v}{\ln(a)}} \cdot K_6 \cdot D$$

$$p_{t\,max} = \alpha_i \sqrt{f_{Cu}} \cdot \sqrt{\frac{v}{\ln(a)}} \cdot K_8 \cdot D \tag{38}$$

für Maschinenreihen mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit, und

$$p_{t\,max} = \alpha_i \cdot \sqrt{f_{Cu}} \cdot \sqrt{\frac{v}{\ln(a)}} \cdot K_9 \cdot D^2 \tag{38 a}$$

für Maschinenreihen mit gleichen Drehzahlen.

Zur Charakterisierung dieser Gleichungen (38) und (38a) für $p_{t\,max}$ ist in Bild 8 für den Innenanker und in Bild 9 für den Außenanker $\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}}$ als Funktion von $\frac{h_n}{D}$ und v_n dargestellt. Auch hier ergeben sich konsekutive Kurvenscharen mit v_n

als Parameter. Es läßt sich daher der Maximalwert für $\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}}$ für ein vorgegebenes Verhältnis $\frac{h_n}{D}$ leicht berechnen, wenn man beachtet, daß

$$\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}}\right)}{\partial v_n} = 0$$

sein muß.

Setzt man die bekannten Werte für v aus Gleichung (19) und a aus Gleichung (16) ein und differenziert, so ergibt sich zunächst für den Innenanker

$$\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}}\right)}{\partial v_n} = \frac{\ln\left[\frac{1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right)}{1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right) - 2\frac{h_n}{D}}\right] - \frac{v_n \cdot 2 \cdot \frac{h_n}{D}\cdot\left(1-\frac{h_n}{D}\right)}{\left[1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right)\right]\left[1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right) - 2\frac{h_n}{D}\right]}}{2\cdot\sqrt{\left(\ln\left[\frac{1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right)}{1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right) - 2\frac{h_n}{D}}\right]\right)^3 \cdot \frac{h_n}{D}\cdot v_n\cdot\left(1-\frac{h_n}{D}\right)}} = 0$$

oder für den vorliegenden Fall auch

$$\ln(a) - \frac{2\frac{h_n}{D}\cdot v_n\cdot\left(1-\frac{h_n}{D}\right)}{\left[1 - v_n\left(1-\frac{h_n}{D}\right)\right]\cdot\left[1 - v_n\cdot\left(1-\frac{h_n}{D}\right) - 2\frac{h_n}{D}\right]} = 0.$$

Die graphische Lösung dieser Gleichung ergibt das günstigste Nutverhältnis v_n mit Rücksicht auf $p_{t_{max}}\cdot v_n = f\left(\frac{h_n}{D}\right)$ ist in Bild 10 eingetragen und mit v_{n_p} bezeichnet. Zum Vergleich ist auch das günstigste Nutverhältnis v_n mit Rücksicht auf w_{max} eingezeichnet.

$$\left(v_{n_{max}} = \frac{1 - 2\frac{h_n}{D}}{2 - 2\frac{h_n}{D}}\right) \tag{25}$$

und mit v_{n_w} bezeichnet. Die Abweichungen zwischen den beiden Kurven sind nicht groß.

Ganz analog ergibt die Differentiation für den Außenanker

$$\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{v}{\ln(a)}}\right)}{\partial v_n} = \frac{\ln\left[\frac{1 - v_n\left(1+\frac{h_n}{D}\right) + 2\frac{h_n}{D}}{1 - v_n\left(1+\frac{h_n}{D}\right)}\right] - \frac{2\cdot\frac{h_n}{D}\cdot v_n\cdot\left(1+\frac{h_n}{D}\right)}{\left[1 - v_n\cdot\left(1+\frac{h_n}{D}\right) + 2\frac{h_n}{D}\right]\left[1 - v_n\left(1+\frac{h_n}{D}\right)\right]}}{2\cdot\sqrt{\left(\ln\left[\frac{1 - v_n\left(1+\frac{h_n}{D}\right) + 2\frac{h_n}{D}}{1 - v_n\left(1+\frac{h_n}{D}\right)}\right]\right)^3 \cdot \frac{h_n}{D}\cdot v_n\cdot\left(1+\frac{h_n}{D}\right)}} = 0$$

oder auch

$$\ln(a) - \frac{v_n\cdot 2\cdot\frac{h_n}{D}\cdot\left(1+\frac{h_n}{D}\right)}{\left[1 - v_n\cdot\left(1+\frac{h_n}{D}\right) + 2\frac{h_n}{D}\right]\cdot\left[1 - v_n\cdot\left(1+\frac{h_n}{D}\right)\right]} = 0.$$

Das günstigste Nutverhältnis, das auch hier die graphische Lösung dieser Gleichung ergibt, ist als Funktion von $\frac{h_n}{D}$ in Bild 11 aufgezeichnet und auch hier wiederum zum Vergleich das günstigste Nutverhältnis mit Rücksicht auf w_{max} mit eingetragen [Gleichung (31)]

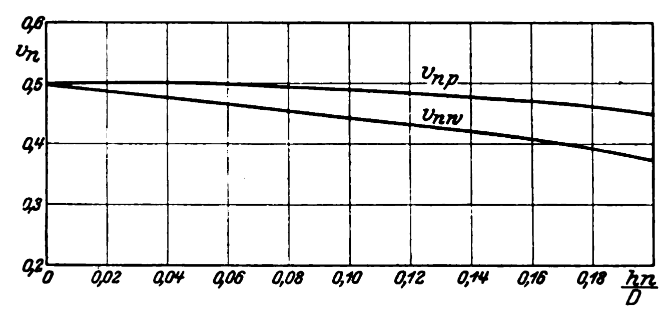


Bild 10. Günstigstes Nutverhältnis beim Innenanker.

$$\left(v_{n\,max} = \frac{1}{2 \cdot \left(1 + \frac{h_n}{D}\right)}\right)$$

und mit $v_{n\,w}$ bezeichnet. Auch hier ist die Abweichung der beiden Kurven voneinander klein.

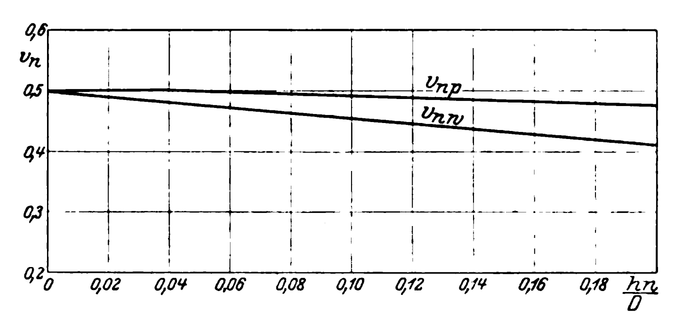


Bild 11. Günstigstes Nutverhältnis beim Außenanker.

Sonstige Einflüsse.

Wenn die Wahl der elektromagnetischen Beanspruchungen mit Rücksicht auf die Nut-Zahnschicht und die Erwärmung bisher durch einfache Beziehungen erfolgte, so war doch dabei klar, daß neben der Erwärmung auch andere Einflüsse die elektromagnetischen Größen festlegen können. Wenn daher im nachfolgenden nur die maximale Zahninduktion unter Betrachtung des magnetischen Widerstandes der Zahnschicht und der Wirbelstrombildung in dem Nutenkupfer in ihrer Größe festgelegt wird, so braucht wohl nicht besonders betont zu werden, daß noch eine Menge anderer Faktoren evtl. für die Zahninduktion und die Stromdichte zu berücksichtigen sind. Sie alle zu betrachten ist unmöglich und auch überflüssig, da sie bei einer richtigen Formgebung der Maschine nur in einigen wenigen Fällen beeinflussend in Erscheinung treten.

Die Erregeramperewindungen.

Je höher die Zahninduktion B_z ist, desto größer ist auch der magnetische Widerstand der Zahnschicht:

$$\mathfrak{R} = \sum_{0}^{h_n} \frac{\Delta h_n}{\mu \cdot Q} \tag{39}$$

und desto größer ist die notwendige MMK. Da nun aber das Ebenmaß der Maschine ein gewisses Verhältnis zwischen Ankerdurchmesser und Außenmaß verlangt, und andererseits der Preis ein Minimum an Erregerkupfer, so ist man mit der Höhe der Zahninduktion begrenzt. Im nachfolgenden soll eine einfache Formulierung dieser Gesichtspunkte gegeben werden.

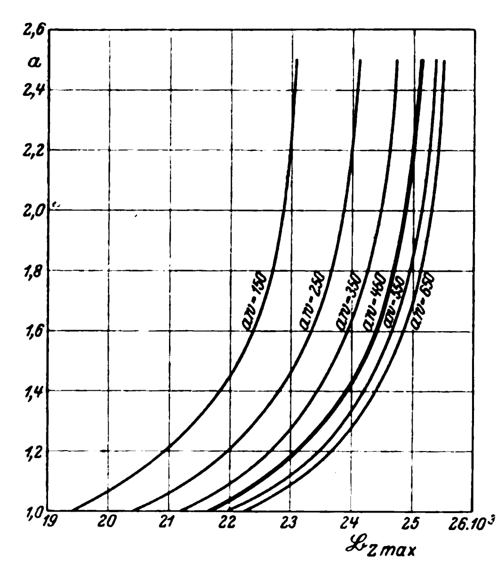


Bild 12. $a = f(\mathfrak{B}z_{max})$ für $a\,w$ = konstant.

Die im Mittel für die Zahnschicht aufzuwendenden Amperewindungen pro Längeneinheit sind

$$a\,w_{mit.} = \frac{1}{h_n}\int_0^{h_n} a\,w_x \cdot d\,x\,. \tag{40}$$

Ist die Konizität a der Zähne und die maximale Zahninduktion $B_{z_{max}}$ bekannt, so kann man das Integral für eine bestimmte Blechsorte auswerten. In Bild 12 ist dies für gewöhnliches Dynamoblech, wie es im Elektromaschinenbau wohl meistens verwandt wird, geschehen. Die Kurven zeigen $a\,w_{mit.}$ als Funktion von $B_{z_{max}}$ und a. Dabei zeigt sich deutlich, daß hohe Zahninduktionen nur unter Aufwendung sehr hoher Werte von $a\,w_{mit.}$ zu erreichen sind. Während bei einer Steigerung von $a\,w_{mit.}$ von 350 um 100 aw auf 450 aw die Zahninduktion im Mittel um 500 Gauß steigt, steigt sie bei weiterer Steigerung der aw um 100 auf 550 aw nur noch im Mittel um 200 Gauß. Man kann daher mit einiger Berechtigung ein gewisses $a\,w_{mit.}$ als Rentabilitätsgrenze für die gemachten Annahmen festsetzen, d. h.

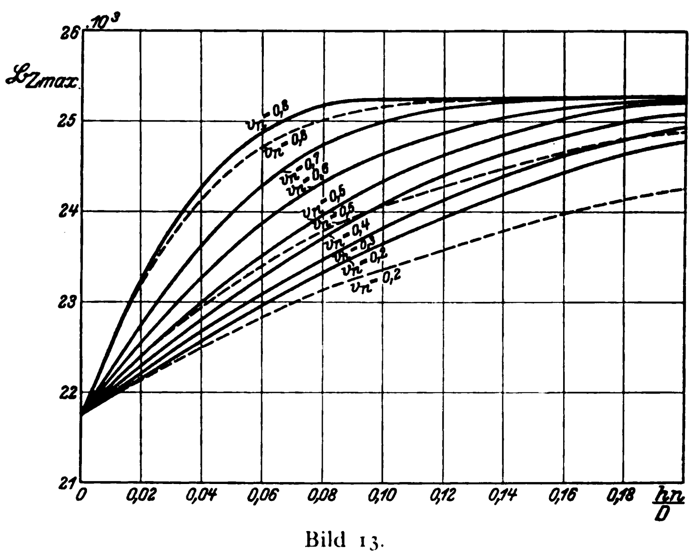


Bild 13.

$\mathfrak{B}z_{max} = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ für $a\,w$ = konstant = 450. ——— Innenanker. - - - Außenanker.

$$\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n} aw_x \cdot dx \leqq C. \tag{41}$$

Wie aus Bild 12 zu ersehen ist, würde die Rentabilitätsgrenze bei ~ 450 aw festzusetzen sein. Es ist dabei jedoch zu beachten, daß bei Außenpolmaschinen mit Rücksicht auf die Platzfrage eine höhere Rentabilitätsgrenze möglich ist als bei Innenpolmaschinen.

Erinnert man sich der Beziehungen

$$a = \frac{1 - v_n\left(1 - \frac{h_n}{D}\right)}{1 - v_n\left(1 - \frac{h_n}{D}\right) - 2\frac{h_n}{D}} \tag{16}$$

für Innenanker und

$$a = \frac{1 - v_n\left(1 + \frac{h_n}{D}\right) + 2\frac{h_n}{D}}{1 - v_n\left(1 + \frac{h_n}{D}\right)} \tag{27}$$

für Außenanker, so kann man mit der angenommenen Rentabilitätsgrenze leicht $B_{z_{max}} = f\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ für $aw = 450$ darstellen. Dies ist in Bild 13 sowohl für Innenanker, als auch für Außenanker (gestrichelt) geschehen.

Das Nutenlängsfeld.

Neben den Erregeramperewindungen spielt auch das Nutenlängsfeld bei der Begrenzung der Zahninduktion eine Rolle insofern, als bei zunehmender Zahninduktion ein immer größer werdender Anteil des Kraftflusses durch die Nut geht (Nutenlängsfeld) und hier in den Leitern Wirbelstrombildungen veranlaßt. Um eine unnötige Erschwerung der mathematischen Seite zu vermeiden, sei hier nur die offene Nut behandelt, auf die wir uns auch immer bisher beschränkt hatten.

Die in der Raumeinheit eines Leiters entwickelte Wirbelstromwärme ist ja

$$V_{wirb} = \frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} j^2 \cdot \varrho \cdot db = \frac{4}{3\varrho} \cdot (b \cdot f \cdot \xi_E \cdot B)^2\,*, \tag{42}$$

worin b die Leiterbreite und ϱ der spezifische Widerstand des Leitermaterials ist.

Bei sinusförmiger Feldkurve wird entsprechend der früheren Betrachtungen $\xi_E = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$. Anderseits ist die Induktion im Nutenraum numerisch gleich der Feldstärke in den Zähnen, $B_N = H_Z$. Infolge der starken Krümmung der Magnetisierungskurve erhält H_Z trotz sinusförmigen Verlaufs der Zahninduktion starke Oberschwingungen, die mitsamt ihrer Rückwirkung infolge ihrer hohen Frequenz nicht vernachlässigt werden dürfen.

Damit geht die angegebene Gleichung über in

$$V_{wirb} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{b^2}{\varrho} \sum_{v=1}^{\infty} \cdot k_v \cdot (f_v \cdot B_{Nv}')^2,$$

worin B_{Nv}' der quadratische Mittelwert der Nutrauminduktion B_{Nv} über die Nuthöhe

* Siehe J. Thomson, Electrician 1892, S. 599.

$$B_N' = \sqrt{\frac{1}{h_n} \cdot \int_0^{h_n} B_{N\nu} \cdot dh} \tag{43}$$

und k_ν der Rückwirkungsfaktor ist, der sich zu

$$k_\nu = \frac{6}{\xi_\nu^3} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta_\nu - \sin\zeta_\nu}{\mathfrak{Cos}\,\zeta_\nu + \cos\zeta_\nu} \tag{44}$$

ergibt, worin ζ_ν bei großer Leiterhöhe im Verhältnis zur Nutbreite sich zu

$$\zeta_\nu = b \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot f_\nu}{\varrho}} \tag{45}$$

ergeben würde.

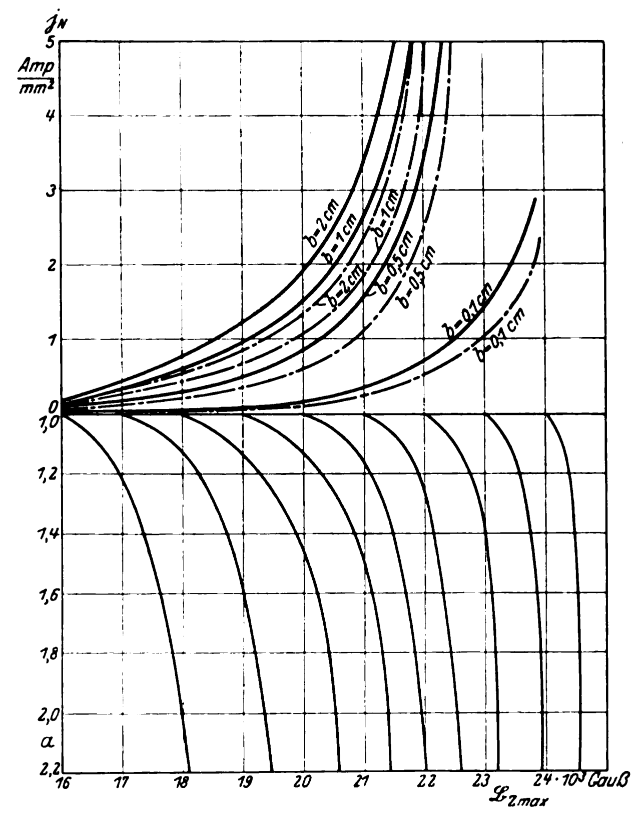


Bild 14. $j_N = f(\mathfrak{B}_{z\,max}, a)$. ———— 50 Perioden. — · — · — 35 Perioden.

Da diese Voraussetzung nicht erfüllt ist und ja auch trapezförmige Zähne vorhanden sind, soll hier

$$\zeta_\nu = (0{,}9 \div 0{,}6) \cdot b \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot f_\nu}{\varrho}} \tag{45a}$$

für $a = 1 \div a = 2{,}5$ gesetzt werden.

Der quadratische Mittelwert der Stromdichte ergibt sich nunmehr an Hand der gemachten Festsetzungen zu

$$j_N' = \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} j_N^2 \cdot db} = \sqrt{\frac{V_{wirb}}{\varrho}}$$

$$j_N' = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{b}{\varrho} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu \cdot \left(\frac{f_\nu}{100} \cdot \frac{B_{N\nu}'}{100}\right)^2} \tag{46}$$

als spezialisierte Größengleichung in Amp/mm², wenn man b in cm, ϱ in Ω mm²/m, f in Hertz nnd B_N in Gauß einsetzt.

Unter Annahme von gewöhnlichem Dynamoblech ist zunächst in Bild 14 die Wirbelstromdichte für parallelflankige Zähne (a = 1) für verschiedene Leiterbreiten und den Frequenzen 35 und 50 Hertz ($\varrho = 0{,}02\ \Omega$ mm²/m) bestimmt. Dann sind für verschiedene Konizitäten a und maximalen Zahninduktionen die quadratischen Mittelwerte der einzelnen Harmonischen der Nutinduktionen über die Nuthöhe ermittelt und mit ihnen die Wirbelstromdichte bei trapezförmigen Zähnen für b = 1 cm berechnet. Die Verbindung der Punkte gleicher Stromdichte ergeben die untere Kurvenschar in Bild 14. b = 1 cm wurde als mittlere Leiterbreite gewählt, da infolge der Rückwirkungsfaktoren die untere Kurvenschar als Funktion von a und $B_{z_{max}}$ für alle Leiterbreiten nicht eindeutig festliegt. Das so aufgestellte Diagramm Bild 14 ermöglicht es nun, unter Annahme einer gewissen zulässigen Wirbelstromdichte j_N, $B_{z_{max}}$ als Funktion von a und damit auch als Funktion von $\left(\frac{h_n}{D}, v_n\right)$ festzulegen.

An Hand der hier gegebenen Betrachtungen ist es nunmehr möglich, die numerisch möglichen Werte für die Schubbelastung zu ermitteln. Mit Rücksicht auf den Platz muß jedoch eine derartige Erörterung leider unterbleiben.

Die mittlere drehende Schubspannung.

Nachdem nunmehr die Verhältnisse der Schubbelastung bei elektrischen Maschinen dargelegt sind und die Gleichungen (38) und (38a) zeigen, daß $p_{t_{max}}$ fast geradlinig mit D steigt, liegt natürlich die Frage nahe, ob nicht das Produkt $D^2 \cdot l$ besser für eine hinreichende Dimensionierungsgleichung geeignet ist. Ist $M_d = P_t \cdot \frac{D}{2}$ entsprechend den früher gemachten Angaben, so wird

$$\frac{N \cdot 60}{\pi^2 \cdot D^2 \cdot l \cdot n} = \sigma, \tag{47}$$

worin σ, wenn man nach seiner mechanischen Bedeutung fragt, die mittlere drehende Schubspannung ist. Die Frage des Drehschubes (Abkürzung für mittlere drehende Schubspannung) ist von Emde 1922 eingehend geklärt. Emde gibt zur Frage des Zusammenhanges von σ mit den elektromagnetischen Größen mit Hilfe der Maxwellschen fiktiven Spannungen die Beziehung

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} H_u \cdot B_r \cdot d\varphi \tag{48}$$

an, worin H_u die Komponente der Feldstärke in der Umfangsrichtung und B_r die Komponente der Induktion in der radialen Richtung bedeuten.

Denkt man sich nun die wirkliche Ankerströmung durch eine stetig über den Ankermantel verteilte Strömung ersetzt, die bei gleicher Durchflutung unendlich dünn ist, so kann man wie folgt schreiben. Ist $\Theta = \sum^m J$ die gesamte Ankerdurchflutung, so gilt für die eben gemachte Annahme

$$\Theta = \int_0^{D \cdot \pi} A_x \cdot dx,$$



worin A_x die lineare Stromdichte oder den sogenannten Strombelag bedeutet. Da nun andererseits $\Theta = \oint H \cdot dx$ ist, so kann man sich H_u durch A_x ersetzt denken und somit

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} A_\varphi \cdot B_r \cdot d\varphi \tag{49}$$

schreiben.

An Hand dieser Gleichung sollen nun die Drehschubverhältnisse der Kürze wegen nur bei der Gleichstrommaschine und bei der Synchronmaschine behandelt werden.

Bei der Gleichstrommaschine ist, wenn man die Kommutierungszone vernachlässigt, der Strombelag über die Polteilung gleichmäßig verteilt, wie Bild 15 zeigt. $\left(A = \frac{\Theta}{D \cdot \pi}\right)$. Somit wird

$$\sigma = A \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} B_r \cdot d\varphi = A \cdot B_{l\,mit}, \tag{50}$$

wie aus Bild 15 ersichtlich ist.

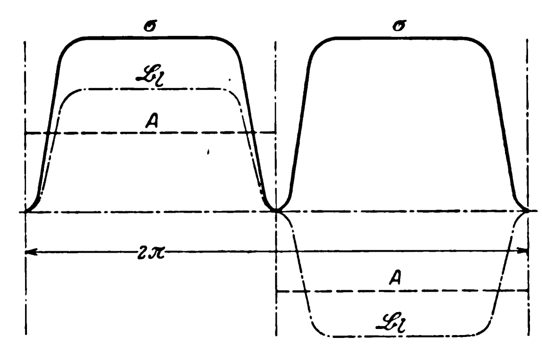


Bild 15. Drehschubverteilung beim Gleichstromanker.

Bei der Schubbelastung war darauf hingewiesen, daß

$$B_{l\,mit} = \alpha_l \cdot \frac{l_e}{l_i} \cdot y \cdot B_{z\,max} \tag{18}$$

ist. Andererseits war $A = \frac{\Theta}{D \cdot \pi}$ und da

$$\Theta = \pi \cdot D^2 \cdot f_{Cu} \cdot v \cdot j \tag{20}$$

ist, so wird

$$A = f_{Cu} \cdot v \cdot j \cdot D. \tag{51}$$

Etwas präziser sollen jedoch die Drehschubverhältnisse bei der Synchronmaschine erörtert werden. In Bild 16 ist beispielsweise für eine dreiphasige Maschine an Hand des Strom-Zeitdiagrammes der Strombelag für verschiedene Zeitmomente ermittelt. Das Produkt aus dem Strombelag und der ebenfalls eingezeichneten Feldkurve ergibt dann die Schubspannung, die ebenfalls eingezeichnet ist und für deren Mittelwert ja gilt:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} B_r \cdot A_\varphi \cdot d\varphi. \tag{49}$$

Für die Feldkurve gelte allgemein die Fouriersche Reihe,

$$B_r = f(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu\,max} \cdot \sin(\nu\varphi + \psi_\nu),$$

während der Strombelag, wie Bild 16 zeigt, nicht nur mit dem Ort sondern auch mit der Zeit veränderlich ist.

$$A = f(\varphi, t).$$

Man kann jedoch eine der beiden Variablen leicht entfernen, indem man sich der Beziehung $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ erinnert. Da gleichmäßige Winkelgeschwindigkeit (ω = const.) angenommen werden kann, so gilt $\varphi = \omega \cdot t$ und man kann für A auch schreiben

$$A = f(\varphi, \omega).$$

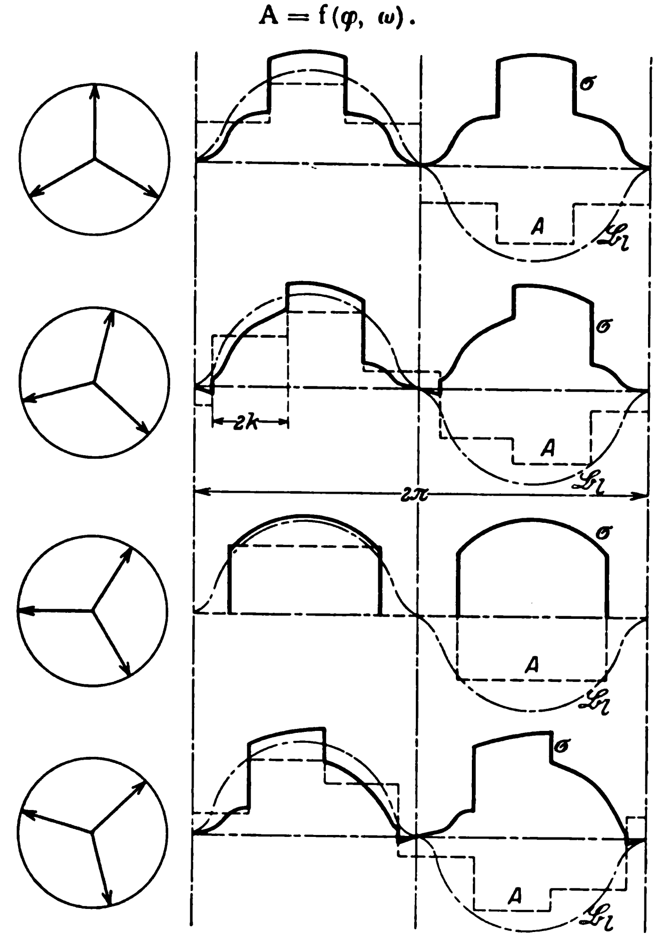


Bild 16. Drehschubverteilung bei der Synchronmaschine in verschiedenen Zeitmomenten.

Da der scheinbare Drehschub ermittelt werden soll, können außerdem Luftinduktion und Strombelag in Phase angenommen werden.

Ist nun m die Phasenzahl, so sei $k = \frac{\pi}{2\,m}$. Ersetzt man nun die zeitlichen Änderungen durch die entsprechenden örtlichen, wobei im nachfolgenden ωt die der zeitlichen Änderung gleichwertige räumliche Änderung bezeichnet, so gilt für den Strombelag die Fouriersche Reihe

$$A_\varphi = \sum_{v=1}^{\infty} A_{v_{max}} \cdot \sin\{v(\varphi - k + \omega t)\},$$

worin ωt in den Grenzen $\omega t = 0$ und $\omega t = 2k$ schwankt. Hieraus läßt sich der zeitliche Mittelwert berechnen. Indem man beachtet, daß es sich hier um eine

symmetrische periodische Funktion handelt, erhält man den Mittelwert in bezug auf die Zeit $\left(\frac{\omega t_1 - \omega t_2}{2k} = \text{ganze Zahl}\right)$ gleich dem Mittelwert einer Periode. Somit gilt z. B. für die v te Harmonische

$$A_{\varphi v_{mit}} = \frac{1}{2k} \cdot \int_0^{2k} A_{v_{max}} \cdot \sin\{v(\varphi - k + \omega t)\} \cdot d(\omega t).$$

Integriert man, so wird

$$A_{\varphi v_{mit}} = A_{v_{max}} \cdot \sin(v \cdot \varphi) \cdot \frac{\sin(v \cdot k)}{v \cdot k}. \tag{52}$$

Der Quotient $\frac{\sin(v \cdot k)}{v \cdot k}$ ist jedoch nichts weiter als der Wicklungsfaktor der vten Harmonischen. Es war früher für den Wicklungsfaktor allgemein geschrieben worden

$$\xi_v = \frac{\sin v \cdot \frac{\pi}{2m}}{q \cdot \sin \frac{v \cdot \pi}{2q \cdot m}}. \tag{14}$$

Da hier unendlich fein verteilte Wicklung $(q = \infty)$ unseren Annahmen entspricht, so geht die Gleichung für den Wicklungsfaktor ξ_v über in

$$\xi_v = \frac{\sin v \cdot k}{v \cdot k} \qquad \text{da} \qquad \frac{\pi}{2m} = k \tag{14a}$$

ist und

$$\sin \frac{v \cdot \pi}{2qm} = \frac{v \cdot \pi}{2qm}$$
$$|\operatorname{Lim} q = \infty|$$

ist.

Man kann daher $A_{\varphi v_{mit}}$ auch schreiben:

$$A_{\varphi v_{mit}} = A_{\varphi v_{max}} \cdot \sin \varphi \cdot \xi_v. \tag{52a}$$

Somit wird der mittlere Drehschub

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int^{2\pi} \left(\sum B_{v_{max}} \cdot \sin v\varphi \cdot \sum A_{v_{max}} \cdot \sin v\varphi\right) \cdot d\varphi, \tag{53}$$

wenn man $B_r = f(\varphi)$ als symmetrische Funktion voraussetzt. Da für zwei Sinusfunktionen von verschiedener Frequenz der Mittelwert des Produktes gleich Null ist, wird

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} B_{1_{max}} \cdot A_{1_{max}} \cdot \xi_1 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + B_{3_{max}} \cdot A_{3_{max}} \cdot \xi_3 \cdot \sin^2 3\varphi \cdot d\varphi + \ldots$$

Integriert man, so ist

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{B_{1_{max}} \cdot A_{1_{max}} \cdot \xi_1}{2} + \frac{B_{3_{max}} \cdot A_{3_{max}} \cdot \xi_3}{2} + \ldots \\ &= \xi \cdot B_{effek} \cdot A_{effek}\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

und da $B_{effek} = \xi_B \cdot B_{l_{mit}}$

$$\sigma = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit}} \cdot A_{effek}. \tag{55}$$

Diese Beziehung für σ gilt allgemein für jede elektrische Maschine.

Die mittlere radiale Schubspannung.

Die bisher behandelten Verhältnisse gestatten es, nunmehr auch die von Zavada vorgeschlagene Dimensionierungsgleichung zu klären, die hier



$$N = \frac{\gamma_{mittel}}{4} \cdot D^3 \cdot l_i \cdot \pi^2 \cdot \frac{n}{60} \tag{56}$$

geschrieben werden soll.

Im vorigen Kapitel war die mittlere drehende Schubspannung σ behandelt worden, die ja die Schubkraft pro Flächeneinheit der Mantelfläche angibt. Das an einem Flächenelement df der Mantelfläche wirkende Drehmoment m_d ergibt sich somit zu

$$m_d = \frac{D}{2} \cdot df \cdot \sigma .$$

Zu jedem Flächenelement df gehört jedoch das Keilvolumen $V_K = \frac{D}{4} \cdot df$. Das Drehmoment des Flächenelementes ruft nun in den Volumenelementen Schubkräfte hervor. Für die Verteilung dieser Schubkräfte über den Zylinderhalbmesser gilt das Gesetz

$$\gamma_x = \gamma_{max} \cdot \frac{D_x}{D} .$$

Für das zum Flächenelement gehörende Drehmoment gilt dann

$$m_d = \sigma \cdot \frac{D}{2} \cdot df = \int_0^{V_k} \gamma_x \frac{D_x}{2} \cdot d\tau .$$

Daraus ergibt sich:

$$\sigma \cdot \frac{D}{2} = \int_0^{\frac{D}{2}} \gamma_{mittel} \cdot \frac{D_x}{2} \cdot d\left(\frac{D}{2}\right).$$

Und nach Integration

$$\sigma = \gamma_{mittel} \cdot \frac{D}{4} .$$

Führt man diesen Wert für σ in die im vorigen Kapitel behandelte Dimensionierungsgleichung

$$N = \sigma \cdot \pi^2 \cdot D^2 \cdot l_i \cdot \frac{n}{60} \tag{47}$$

ein, so ergibt sich die bereits oben angegebene Gleichung

$$N = \frac{\gamma_{mittel}}{4} \cdot \pi^2 \cdot D^3 \cdot l_i \cdot \frac{n}{60}, \tag{56}$$

worin γ_{mittel} der mechanischen Vorstellung entsprechend die mittlere radiale Volumenschubkraft bedeutet.

Die Beziehung $\sigma = \frac{\gamma_{mittel}}{4} \cdot D$ läßt auch leicht den Zusammenhang der mittleren radialen Volumenschubkraft mit den elektromagnetischen Beanspruchungen vermitteln. Es war für σ allgemein gefunden

$$\sigma = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit}} \cdot A_{effek} \tag{50}$$

Schreibt man für A_{effek}

$$A_{effek} = D \cdot j \cdot v \cdot f_{Cu}, \tag{51}$$

so wird

$$\gamma_{mittel} = 4 \cdot \xi_E \cdot \xi \cdot B_{l_{mit.}} \cdot v \cdot f_{Cu} \cdot j .$$

$4 \cdot f_{Cu} \cdot v \cdot j$ war bereits früher [Gleichung (21)] als die mittlere effektive Durchflutung pro Flächeneinheit ϑ erkannt worden. Es wird daher

$$\gamma_{mittel} = \xi_E \cdot \xi \cdot B_{L_{mit.}} \cdot \vartheta . \tag{57}$$

Zusammenfassung.

Es wird darauf hingewiesen, daß man für die Vorausberechnung elektrischer Maschinen die hinreichenden Dimensionierungsgleichungen von der Form

$$N = \pi \cdot p_{t_{max}} \cdot D \cdot l_i \cdot \frac{n}{60}, \tag{4}$$

$$N = \pi^2 \cdot \sigma \cdot D^2 \cdot l_i \cdot \frac{n}{60}, \tag{47}$$

$$N = \pi^2 \gamma_{mittel} \cdot D^3 \cdot l_i \cdot \frac{n}{60} \tag{56}$$

benutzen kann.

Hierin bedeuten

$p_{t_{max}}$ die maximale drehende Schubbelastung,

σ die mittlere drehende Schubspannung,

γ_{mittel} die mittlere radiale Volumenschubkraft.

Der Zusammenhang dieser drei Größen mit den elektromagnetischen Beanspruchungen wird gegeben, wobei sich zeigt, daß $p_{t_{max}}$ proportional dem Produkt aus mittlerer Luftinduktion und effektiver Ankerdurchflutung

σ proportional dem Produkt aus mittlerer Luftinduktion und mittlerem effektivem Strombelag

γ_{mittel} proportional dem Produkt aus mittlerer Luftinduktion und mittlerer effektiver Ankerdurchflutung pro Flächeneinheit ist.

Führt man den theoretischen Aufbau der Dimensionierungsgleichungen an Hand der gegebenen Beziehungen durch, so zeigt sich, daß beispielsweise bei der Gleichstrommaschine die Schubbelastung mit dem Ankerdurchmesser in dem Bereiche $D = 20$ cm bis $D = 400$ cm um das 63fache steigt. Demgegenüber steigt der Drehschub in demselben Bereiche nur um das 3fache, während sich die mittlere Volumenschubkraft um das 6,8fache ändert. Danach wäre mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit für die Vorausberechnung am besten der Drehschub brauchbar. Da aber aus den hier behandelten Dimensionierungsgleichungen nur das Produkt aus einer Potenz des Durchmessers mit der ideellen Ankerlänge ermittelt werden kann, so entscheidet über die Frage, welche der drei Gleichungen die zweckmäßigste für die Vorausberechnung sei, nur das System von zwei Dimensionierungsgleichungen. Auf die Frage nach einer zweiten (hinreichenden oder notwendigen) Dimensionierungsgleichung soll jedoch hier nicht mehr eingegangen werden.

Am Schluß dieser Arbeit möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. Unger für Anregungen zu dieser Arbeit verbindlichst zu danken.



Uber ein Verfahren der Eisenprüfung mit dem magnetischen Spannungsmesser.

Messungen an Eiseneinkristallen.

Von

W. Wolman.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Übersicht.

Ziel der Arbeit.
Wirkungsweise des magnetischen Spannungsmessers.
- Eisenprüfungen mit dem magnetischen Spannungsmesser.
  - Empfindlicheres ballistisches Galvanometer.
  - Impulsverstärkung.
  - Geeigneter magnetischer Spannungsmesser.

Ausführung eines magnetischen Spannungsmessers für Eisenprüfzwecke.
- Eichung und Prüfung.
- Meßanordnung.
- Praktische Erprobung des Verfahrens.
  - Vergleich der Ergebnisse mit solchen nach dem Ringverfahren.
  - Vergleich der Ergebnisse bei Joch- und Spulenmagnetisierung.
- Unmittelbare Messung der Koerzitivkraft und Remanenz.
  - Schaltanordnung.
  - Verhalten des ballistischen Galvanometers bei Teilimpulsen.
  - Ballistische Null- und Differenzenmessung,
- Vergleich des beschriebenen Verfahrens mit den bekannten.

Messungen an Eiseneinkristallen.
- Die Proben
- Die Meßergebnisse.
  - Veränderliche Breite der Hystereseschleife.
  - Einfluß mechanischer Beanspruchung.
- Vergleich mit anderen Messungen.

Ziel der Arbeit.

Bei der magnetischen Untersuchung von Eisen ist die Bestimmung der Feldstärke im Vergleich zur Induktionsmessung der schwierigere Teil der Aufgabe. Die magnetische Feldstärke im Eisen ist eben eine der Messung recht unzugängliche Größe. Bei den meisten der bekannten Untersuchungsverfahren wird sie gar nicht gemessen, sondern aus dem magnetisierenden Strome berechnet. Das gelingt aber nur in manchen Fällen — bei Ellipsuiden und Ringen —. In anderen Fällen, z. B. bei den verschiedenen Jochmethoden, wird die Berechnung schon unzuverlässiger und ist schließlich bei besonders kleinen und dicken Proben kaum noch möglich. Häufig stehen aber nur ganz kleine Proben von gegebenen Abmessungen zur Verfügung. Dann erhebt sich die Frage nach einem Verfahren, bei dem unmittelbar die wahre Feldstärke gemessen wird. Das gegebene Meßinstrument hierfür ist der bekannte von Prof. Rogowski[1] angegebene magnetische Spannungsmesser. Die außerordentlich vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten dieses Gerätes liegen zwar größtenteils auf dem Gebiete der Untersuchung fertiger Apparate und Maschinen, doch erlaubt er auch ohne weiteres die Messung der Feldstärken bei Eisenprüfung. Im folgenden soll der Nachweis der Brauchbarkeit und Genauigkeit eines derartigen Eisenprüfverfahrens erbracht werden.

Ganz besonderes Interesse hat neuerdings die Messung geringer Feldstärken zur Bestimmung der Koerzitivkraft, Remanenz und Anfangspermeabilität hochwertiger

[1] W. Rogowski, D.R.P. Nr. 269257. — W. Rogowski und W. Steinhaus, Arch. f. Elektrot. Bd. 1, S. 141. — W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. Bd. 1, S. 511.

ferromagnetischer Materialien. Für solche Messungen wird ein besonders empfindlicher magnetischer Spannungsmesser, sowie ein Verfahren der unmittelbaren ballistischen Koerzitivkraftmessung entwickelt.

Schließlich wird als Anwendungsbeispiel über Messungen an Eiseneinkristallen berichtet.

Die Wirkungsweise des magnetischen Spannungsmessers.

Der ursprüngliche magnetische Spannungsmesser (im weiteren abgekürzt: m. Sp.) besteht aus einer flachen, biegsamen Spule von geringem, gleichbleibendem Querschnitt f. Die Windungszahl n je cm ist ebenfalls über die Länge des Spannungsmessers gleichbleibend. Für eine solche Spule gilt:

$$\Phi = 0{,}4\,\pi\,n \cdot f \cdot \int_1^2 H \cdot ds.$$

Die gesamte Flußverkettung Φ des m. Sp. ist also proportional der zwischen seinen Enden bestehenden magnetischen Spannung. Durch zeitliche Änderung wird die magnetische Messung zurückgeführt auf eine elektrische, indem die durch die Flußänderung induzierte EMK in Volt bzw. deren Integral in Volt sec an einem geeigneten ballistischen Galvanometer abgelesen wird. Die erreichte Meßgenauigkeit ist in erster Linie abhängig von der Gleichmäßigkeit des Querschnitts und der Bewicklung. Die Fehlerrechnung, sowie die strenge Theorie des m. Sp. findet man in der Originalveröffentlichung.

Der magnetische Spannungsmesser für Eisenprüfzwecke.

Bei Eisenuntersuchungen ist die Feldstärke, nicht deren Integral, wie es der m. Sp. unmittelbar liefert, das Endziel. Die Feldstärke im Eisen muß deshalb zwischen den Enden des m. Sp. hinreichend gleich sein, der m. Sp. ist darum so klein wie möglich zu bemessen.

Eine weitere Notwendigkeit ist die Steigerung der Empfindlichkeit ohne Einbuße an Genauigkeit. Hierfür kommen drei Wege in Frage:

1. Steigerung der Empfindlichkeit des ballistischen Galvanometers;
2. Verstärkung der ballistischen Impulse;
3. Änderung der Abmessungen des m. Sp.

1. Steigerung der Empfindlichkeit des ballistischen Galvanometers. Die ballistische Spannungsempfindlichkeit eines Drehspulgalvanometers, bezogen auf den Gesamtwiderstand des Kreises, läßt sich jedoch größenordnungsmäßig nicht über einen gewissen Wert steigern. Die Ursache hierfür ist die dämpfende Wirkung des geschlossenen Stromkreises[1]. Dementsprechend weisen auch die käuflichen ballistischen Drehspulgalvanometer im aperiodischen Grenzfalle alle ungefähr die gleiche ballistische Spannungsempfindlichkeit von etwa $10^{-5} \div 10^{-6}$ Volt sec, bezogen auf den Gesamtwiderstand des geschlossenen Kreises, auf.

2. Impulsverstärkung. Eine andere Möglichkeit wäre die Verstärkung der Spannungsimpulse des m. Sp. mit Hilfe von Elektronenröhren. Da aber der Widerstand eines normalen m. Sp. zusammen mit einem dazu passenden ballistischen Galvanometer nur einige Ohm beträgt, so wäre eine Verstärkung nur in mehreren Stufen möglich. Auch müßte der Dauerstrom der Röhren in seiner Wirkung auf das ballistische Galvanometer restlos kompensiert werden. Versuche in der Richtung stießen auf erhebliche Schwierigkeiten und ließen diesen Weg der Empfindlichkeitssteigerung nicht geeignet erscheinen.

Es bleibt als letzter Weg die Steigerung der Empfindlichkeit des m. Sp. selbst. Dessen Empfindlichkeit ist proportional der Windungszahl je cm und dem Quer-

[1] W. Jäger, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 23, S. 261 u. 533. — H. Diesselhorst, Zeitschrift f. Instrumentenkunde 31, S. 247 u. 276.



schnitt einer Windung. Der Querschnitt soll jedoch der Theorie des m. Sp. nach so klein sein, daß die Induktion an seinen verschiedenen Stellen annähernd gleich ist. Vergrößert man andererseits die Windungszahl, indem man den Draht in vielen Lagen aufwickelt, so ist damit von selbst eine erhebliche Vergrößerung des Querschnitts verbunden, denn der Drahtquerschnitt hat wegen der Isolation und der Verarbeitbarkeit praktisch eine untere Grenze. Die Steigerung der Empfindlichkeit des m. Sp. verlangt also eine solche Erhöhung des Windungsquerschnitts, daß die Gewähr einer großen Genauigkeit theoretisch nicht mehr besteht, da der auftretende Fehler maximal der Veränderung der Induktion über den Querschnitt entsprechen kann. Die erreichbare Genauigkeit mußte daher durch eine scharfe experimentelle Prüfung bestimmt werden, über die weiter unten zu berichten ist.

Die Ausführung des magnetischen Spannungsmessers.

Auf die biegsame Form des m. Sp. mußte wegen des großen Querschnitts und konnte auch im Hinblick auf den besonderen Verwendungszweck verzichtet werden. Im Gegenteil hat die starre Form in diesem Falle den Vorteil, daß die vom m. Sp. angezeigte magnetische Gesamtspannung zu der Feldstärke im Eisen

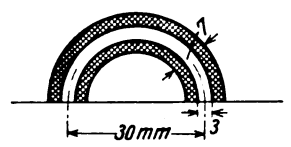


Bild 1. Abmessungen des Spannungsmessers, endgültige Ausführung.

in einem bestimmten starren Verhältnis steht. Mit seinen Anfangs- und Endwindungen muß der m. Sp. unmittelbar auf der Eisenoberfläche aufliegen, er muß also seine Richtung um insgesamt 180° ändern. Die erste Ausführung eines solchen Spannungsmessers bestand aus drei geraden, festen Einzelspulen, die an den Ecken miteinander verschraubt und hintereinander geschaltet waren. Die geraden Spulen ließen sich am leichtesten maschinell mit der nötigen Gleichmäßigkeit bewickeln. Dagegen bildeten die Ecken den wunden Punkt dieser Ausführung. Bei der Prüfung dieses Spannungsmessers in verschiedenen Feldern ergab sich eine Ungenauigkeit von mehr als 5% als Folge der Unstetigkeit der Bewicklung an den Ecken. Hieraus ergab sich die Notwendigkeit, den Spannungsmesser als Halbkreis auszubilden[1]. Die gleichmäßige Bewicklung einer solchen gekrümmten Spule ist natürlich viel schwieriger als bei einer geraden Spule. Sie mußte von Hand vorgenommen werden. Trotzdem stellte der erste so hergestellte Sp., der nur mit zwei Lagen versehen war, schon einen bedeutenden Fortschritt hinsichtlich der Genauigkeit dar. Der Fehler war auf 1—2% herabgegangen. Die Quelle dieses Fehlers lag nun weniger in der ungleichmäßigen Dichte der Bewicklung, sondern vielmehr darin, daß die Fläche der einzelnen Windungen nicht überall senkrecht zur Spulenachse stand. Diese Bedingung tritt nämlich zu den genannten Voraussetzungen der Theorie des m. Sp. hinzu und ist um so schwerer einzuhalten, je größer der Querschnitt wird. Eine besondere Wickelvorrichtung diente bei der nächsten endgültigen Ausführung des m. Sp. dazu, den Draht so zu führen, daß die Ebene jeder Windung genau senkrecht zur Spulenachse steht, d. h. durch den Mittelpunkt des Halbkreises geht, den der m. Sp. bildet. Der so bewickelte Sp. erwies sich trotz seiner 10 Lagen als fast fehlerfrei. Die Prüfung ergab einen Fehler von nur etwa einem halben Prozent. Bild 1, 2 und 3 zeigen diesen m. Sp. Der Spulenkern ist aus Hartgummi

[1] Versuche in dieser Richtung sind schon von Goltze unternommen worden. Arch. f. Elektrot. Bd. 2, S. 303.



gedreht, die Bewicklung besteht aus 10 Lagen 0,1 mm starkem emailliertem Kupferdraht. Die weiteren Abmessungen sind:

Spannweite	30	mm,
Spulenbreite	16	mm,
mittlere Windungsfläche	0,6	cm²,
Windungszahl	700	je cm Spulenlänge,
Genauigkeit etwa	1/2	Prozent,
Empfindlichkeit	0,116	AW/cm je mm Ausschlag bei einem Skalenabstand von 1 m.

Die erreichte Empfindlichkeit gestattete es, die Feldstücke bis auf wenige hundertstel AW/cm abzulesen, was auch zur Messung der geringen Koerzitivkräfte hochwertigen Eisens ausreichte. Die Empfindlichkeit von magnetischen Spannungsmessern im allgemeinen wird angegeben in Amperewindungen je mm Ausschlag, wobei die Eichung in Verbindung mit einem bestimmten ballistischen Galvanometer vorgenommen wird. Bei der starren Form des vorliegenden m. Sp. können wir die Empfindlichkeit aber gleich in Gauß Feldstärke im Eisen angeben, denn wenn zwischen den Enden des m. Sp. eine magnetische Gasamtspannung AW besteht, so ist bei einer Spannweite L des m. Sp. und gleichbleibender Feldstärke im Eisen

$$H_{fe} = \frac{AW}{L} \text{ in Amperewindungen je cm}$$

bzw.

$$H_{fe} = 0{,}4\,\pi \frac{AW}{L} \text{ in Gauß Feldstärke.}$$

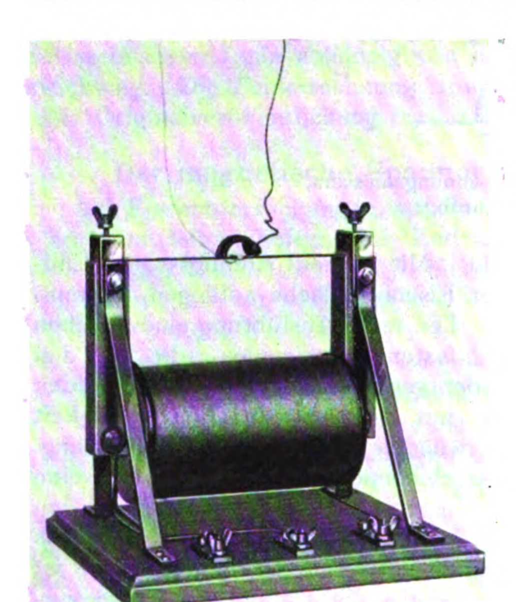


Bild 2. Der magnetische Spannungsmesser für Eisenprüfzwecke mit Probe und Induktionsmeßspule.

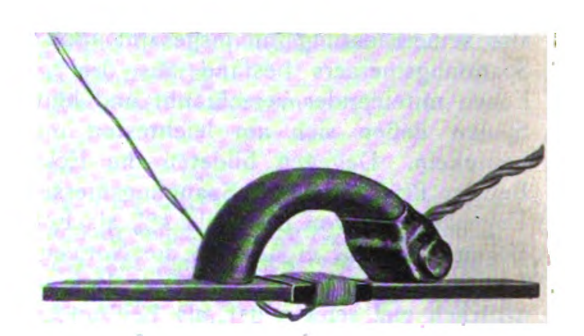


Bild 3. Die Meßanordnung bei Jochmagnetisierung.

Eichung und Prüfung.

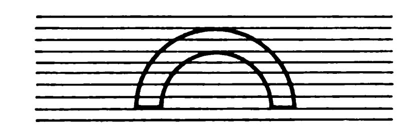
Im allgemeinen eicht man magnetische Spannungsmesser, indem man sie zu einem geschlossenen Ring zusammenbiegt und von einem bekannten Strom (AW) durchfluten läßt. Dieser Weg war bei dem starren m. Sp. nicht möglich. In Frage kamen drei andere Eichmöglichkeiten:

1. im homogenen Feld einer langen Spule (Bild 4a),
2. im Felde eines geraden langen Leiters (Bild 4b),
3. mit Eisenschluß von vernachlässigbarem magnetischem Widerstand (Bild 4c).

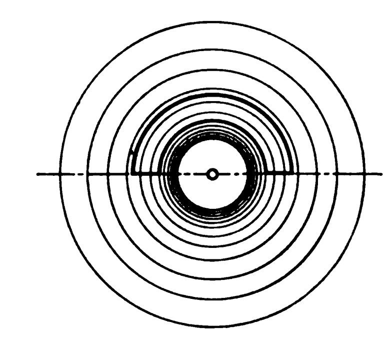
Der Vergleich der Ergebnisse dieser verschiedenen Eichverfahren stellt zugleich die Prüfung des m. Sp. dar, von der oben die Rede war, denn die Feldverteilung

ist in den verschiedenen Fällen gänzlich verschieden. Sie bildet die Extreme, zwischen denen sich die Feldverteilung bei den Messungen, für die der m. Sp. gebaut ist, im allgemeinen bewegen wird. Wir können deshalb annehmen, daß der Fehler, der durch etwaige Unvollkommenheiten der Bewicklung des m. Sp. entsteht, keinesfalls größer ist, als die Unterschiede der Eichergebnisse nach den verschiedenen nun im Einzelnen zu beschreibenden Verfahren.

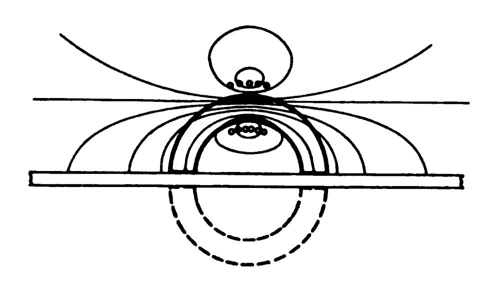
Zur Eichung im homogenen Felde wurde eine ganz gleichmäßig bewickelte lange Spule benutzt. Die Beziehung zwischen Strom und Feldstärke im Innern dieser Spule wurde einerseits berechnet, andererseits zur Kontrolle mit Hilfe einer Prüfspule ballistisch gemessen. Dann wurde der m. Sp. in die Mitte der Spule genau in Richtung der Kraftlinien gebracht und der Galvanometerausschlag beim Umpolen eines bekannten Stromes gemessen. Ein großer Vorteil dieses Eichverfahrens liegt darin, daß die Eisenlänge, d. h. die Spannweite des m. Sp., schon bei der Eichung herausfällt.



a) im homogenen Feld einer langen Spule,



b) im Felde eines geraden Leiters,



c) mit Eisenschluß.

Bild 4. Eichung des magnetischen Spannungsmessers.

Bei der Eichung im Felde eines geraden Leiters wurde der m. Sp. auf eine Ebene aufgesetzt, die durch den Mittelpunkt des Leiters gehen muß. Die magnetische Spannung zwischen den Enden des m. Sp. ist dann gleich der Hälfte der gesamten Umlaufspannung, also $\int H ds = \frac{J}{2}$.
Ein gewisser Nachteil dieser Eichung bestand darin, daß der Strom ziemlich groß sein mußte, der Leiterquerschnitt entsprechend stark. Die Anordnung wurde deshalb so abgeändert, daß nicht ein einzelner Leiter, sondern eine ganze Reihe in einer Ebene liegender Drähte benutzt wurde, denn die völlige Symmetrie, die das Feld eines einzelnen Leiters aufweist, ist ja nicht erforderlich, sondern nur Symmetrie zur Auflageebene des m. Sp., wie sie auch bei mehreren Drähten gegeben ist. Die Leiter brauchen auch nicht unendlich lang und gerade zu sein, sondern können eine Flachspule bilden. Die magnetische Spannung zwischen den Enden des m. Sp. ist auch dann noch gleich $J \cdot \frac{W}{2}$.

Bei der Eichung mit Eisenschluß wurde entsprechend Bild 4c eine beliebige, kleine Spule um den m. Sp. herumgelegt und dieser auf einen geeigneten Eisenschluß aufgesetzt. Unter Vernachlässigung des Eisenanteils an der magnetischen Umlaufspannung ist dann die vom m. Sp. angezeigte Spannung gleich der gesamten AW-Zahl der durchflutenden Spule. Der Anteil des Eisens am $\int H ds$ war aber auch bei Verwendung besonders guten Eisens nicht ganz zu vernachlässigen, sondern betrug etwa 1 %, konnte aber dadurch berücksichtigt werden, daß man ihn seinerseits mit dem m. Sp. maß. Zu diesem Zwecke wurde der m. Sp. in der in Bild 4c gestrichelt gezeichneten Weise an die andere Seite des ziemlich schmalen Eisenschlusses gebracht.

Während zur Eichung die Anordnung mit Eisenschluß sich den andern als unterlegen erwies, eignete sie sich sehr gut zur Prüfung der Gleichmäßigkeit der Bewicklung. Verschob man nämlich die magnetisierende, stromdurchflossene Spule längs des m. Sp., so lieferte der entstehende kleine Ausschlag ein Maß für die Ungleichmäßigkeit der Bewicklung. Bei der endgültigen Form des m. Sp. waren diese Fehler vernachlässigbar klein (etwa $^1/_2\%$), wie auch die verschiedenen Eichergebnisse eine Übereinstimmung bis auf etwa $^1/_2\%$ aufwiesen.

Die Prüfung des m. Sp. erstreckte sich weiter auf einen etwaigen Einfluß der Breite der Probestreifen, sowie einen geringen Abstand des m. Sp. von der Eisenoberfläche. Die Breite der Eisenprobe muß natürlich mindestens die gleiche sein wie die des m. Sp. Gemessen wurde der Einfluß der Breite durch Verschieben des m. Sp. auf einem breiten Blech gegen den Rand hin. Bis zu einer Breite von 20 mm herunter war ein Einfluß überhaupt nicht meßbar ($< 1^0/_{00}$). Aber sogar bei Blechen, die etwas schmaler sind als der m. Sp., ist der Fehler noch sehr gering.

Die Bewicklung des m. Sp. muß grundsätzlich bis an die Eisenoberfläche heranreichen. Der Versuch zeigte aber, daß ein Abstand von 0,1 mm keinen meßbaren Fehler hervorruft. Es konnte deshalb zum Schutze der Wicklung ein 0,05 mm starkes Glimmerplättchen unbedenklich auf die Endfläche des m. Sp. aufgeklebt werden. Auch sind geringe Unebenheiten der Eisenoberfläche (z. B. vom Walzen) damit belanglos.

Die Meßanordnung.

Die Meßanordnung des m. Sp. besteht aus einer Magnetisierungsvorrichtung für die Probe, einer Induktionsmeßspule mit zugehörigem Galvanometerkreis, sowie dem m. Sp. mit Galvanometer. Die Art der Magnetisierung ist grundsätzlich beliebig. Es wurde sowohl in der freien langen Spule als auch mit Hilfe eines Joches magnetisiert. Die Jochanordnung zeigt Bild 3. Auf die Güte des Jochmaterials brauchte, dem Wesen des Verfahrens nach, kein Wert gelegt zu werden. Es wurde aus normalem Dynamoblech zusammengesetzt. Der Kern trägt eine Spule hoher Windungszahl zum Magnetisieren mit Gleichstrom und eine solche kleinere Windungszahl, bzw. eine entsprechende Anzapfung, zum Entmagnetisieren der Probe mit Wechselstrom. Das Joch ist für Proben von 20 cm Länge und etwa 2—3 cm Breite bemessen. Jedoch können grundsätzlich Blechstreifen beliebiger Abmessungen benutzt werden. Welche Art der Magnetisierung vorzuziehen ist, richtet sich nach den Abmessungen der Probe. In den meisten Fällen erwiesen sie sich als gleichwertig. Nur bei ganz kurzen, dicken Proben und hohen Feldstärken (mehreren 100 Gauß) kam das Joch allein in Frage.

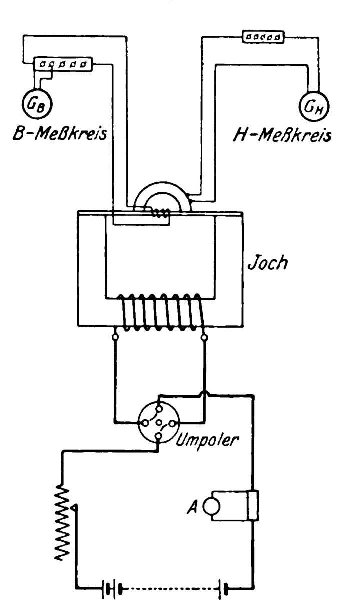


Bild 5. Die Meßanordnung.

Als Induktionsmeßspule wurden einige Drahtwindungen (10–25) um die Probe herumgewickelt und darüber der m. Sp. gesetzt (Bild 2 und 3). Die B- und H-Ablesungen wurden anfangs mit zwei verschiedenen ballistischen Galvanometern gleichzeitig vorgenommen (Schaltung Bild 5), wozu natürlich eine Hilfskraft zum Ablesen erforderlich war. Es zeigte sich jedoch, daß man in den meisten Fällen die B- und H-Werte nacheinander aufnehmen kann, sogar bei zugehörigen Werten zur Aufnahme von Hystereseschleifen. Die einzige Voraussetzung dafür sind reproduzierbare Verhältnisse im magnetisierenden Stromkreis. Das ballistische Galvano-

meter wurde bei nacheinander erfolgender B- und H-Messung mit einem Umschalter einmal an den m. Sp., das anderemal an die Induktionsmeßspule gelegt. In beiden Kreisen wurde ungefähr beim aperiodischen Grenzwiderstand gearbeitet. Beim magnetischen Spannungsmesser war der Drahtquerschnitt schon dementsprechend bemessen. Durch passende Wahl von Vor- und Nebenwiderständen ließ sich leicht jede Empfindlichkeit von den geringsten bis zu den höchsten Feldstärken und Induktionen einstellen.

Da der Stromkreis des m. Sp. ausschließlich aus Kupfer besteht, so ist zu beachten, daß sich sein Widerstand bei jedem Grade Temperaturänderung um etwa $^1/_2$% ändert und ein entsprechender Fehler in das Meßergebnis eingehen kann. Bei schwankender Temperatur wurde deshalb der Widerstand des m. Sp.-Kreises an Hand einer Tabelle auf dem gleichen bei der Eichung vorhandenen Werte gehalten. Im Induktionsmeßkreis dagegen konnte der Temperatureinfluß in der üblichen Weise durch Vorschalten hochohmiger temperaturunabhängiger Widerstände unterdrückt werden.

Die praktische Erprobung des Verfahrens.

Zur Prüfung des Verfahrens wurden Proben einerseits mit dem m. Sp., andererseits nach einem bekannten zuverlässigen Verfahren untersucht. Als solches kam

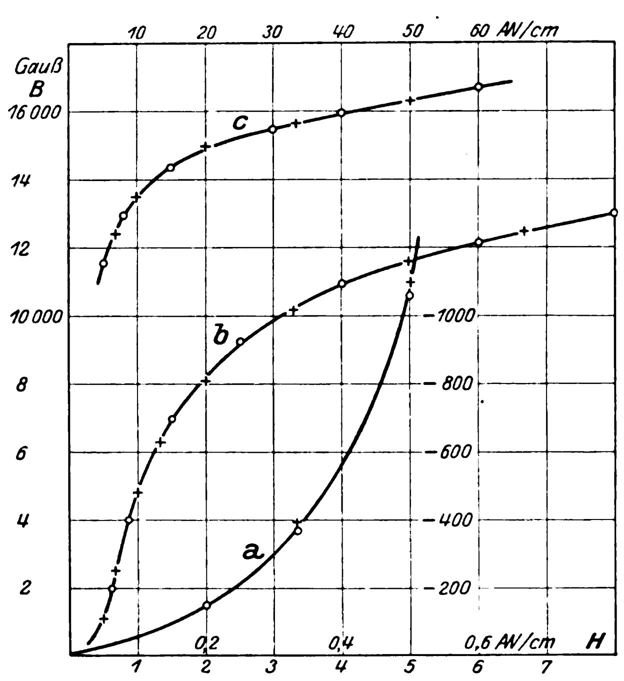


Bild 6. Übereinstimmung der Ergebnisse nach dem Ring- und Spannungsmesserverfahren. Kommutierungskurve a) bei geringen, b) bei mittleren, c) bei hohen Feldstärken.
+ Ringverfahren,
○ Magnetischer Spannungsmesser.

nur das Ringverfahren in Frage. Es fand sich jedoch kein Material, das hinreichend homogen war, um aus ihm Ringe und Blechstreifen gleicher magnetischer Eigenschaften herauszuschneiden. Besonders bei geringen Feldstärken zeigte sowohl Blech, je nach der Walzrichtung, wie auch Draht, je nach der mechanischen Beanspruchung, so große Unregelmäßigkeiten, daß an eine genaue Prüfung des Verfahrens auf diese Weise nicht zu denken war. Es erwies sich deshalb als notwendig, dasselbe Probestück nach beiden Verfahren zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurde ein Ring



aus 0,5 mm starkem legiertem Blech von 500 mm Durchmesser und 25 mm Breite, sowie besonders gleichbleibendem Querschnitt ausgewählt und nacheinander an verschiedenen Stellen seines Umfanges mit dem m. Sp. untersucht. Die Magnetisierung geschah in diesem Falle durch eine lose darum gelegte Ringspule von so großem Querschnitt, daß auch der m. Sp. noch Platz darin fand. Danach wurde der Ring gleichmäßig anliegend bewickelt und nach der Ringmethode gemessen. Die Ergebnisse der beiden Messungen sind in Bild 6 aufgetragen. Die Mittelwerte der mit dem m. Sp. gewonnenen Kurven fallen völlig zusammen mit denen des Ringverfahrens, und zwar von den geringsten Feldstärken von der Größenordnung des Erdfeldes bis zu ganz hohen von mehreren hundert AW/cm. Wie groß die Ungleichmäßigkeit innerhalb derselben Ringprobe ist, geht aus Bild 7 hervor, das die extremsten der mit dem m. Sp. aufgenommenen Kurven zeigt.

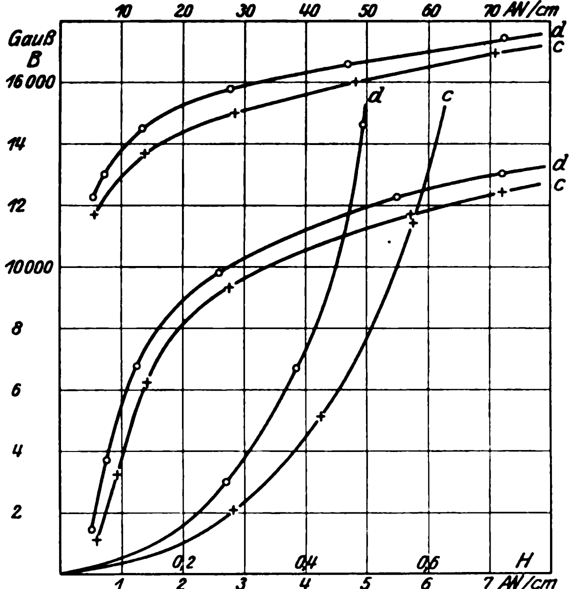


Bild 7. Ungleichmäßigkeit innerhalb desselben Blechringes. Kommutierungskurven aufgenommen mit dem magn. Spannungsmesser.
d) in der Walzrichtung magnetisiert,
c) quer zur Walzrichtung magnetisiert.

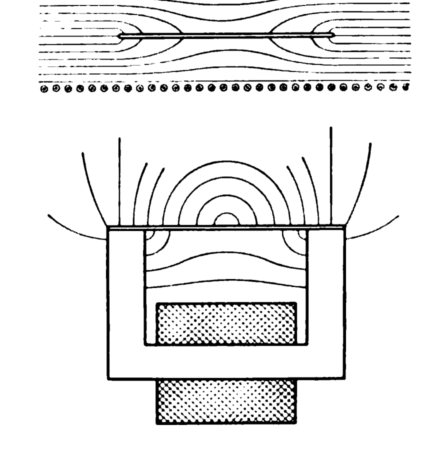


Bild 8. Feldverteilung bei Joch- und Spulenmagnetisierung.

Vergleich der Ergebnisse bei Spulen- und Jochmagnetisierung.

Während die Prüfung des Verfahrens durch Vergleich der Meßergebnisse mit solchen, die nach anderen Methoden gewonnen sind, infolge der genannten Ungleichmäßigkeiten des Eisens mit Schwierigkeiten verknüpft ist, bietet sich eine weitere, viel einfachere Kontrollmöglichkeit im Vergleich der Meßergebnisse des m. Sp. bei verschiedenen Arten der Magnetisierung, nämlich einerseits in der freien Spule, andererseits mit Hilfe eines Jochs. Ist doch das Luftfeld (Streufeld), das vom m. Sp. zum Messen herangezogen wird, in beiden Fällen ganz verschieden. Während in der freien Spule die Liniendichte in der Mitte der Probe am größten ist, wird sie bei Anwendung eines kräftigen Joches nach der Mitte der Probe hin abnehmen, d. h. die Krümmung des Luftfeldes ist in beiden Fällen gerade entgegengesetzt (Bild 8). Liefert der m. Sp. trotzdem die gleichen Werte, so ist damit seine Brauchbarkeit weitgehend erwiesen. Bild 9b, 10 und 11 zeigen Kommutierungskurven und Hystereseschleife derselben Probe. Die im Joch und in der Spule aufgenommenen Kurven fallen wieder völlig zusammen. Bei den ganz geringen Feldstärken der

a) ohne magnetischen Spannungsmesser b) mit magnetischen Spannungsmesser

Bild 9. Hystereseschleife derselben Probe bei Joch- und Spulenmagnetisierung

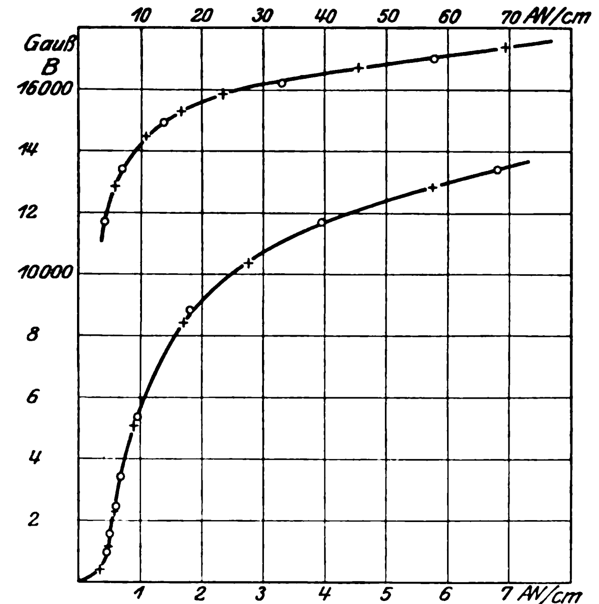


Bild 10. Übereinstimmung der Ergebnisse des magnetischen Spannungsmesser bei Joch- und Spulenmagnetisierung. Kommutierungskurve normalen Dynamoblechs.

+ im Joch,
O in der Spule.

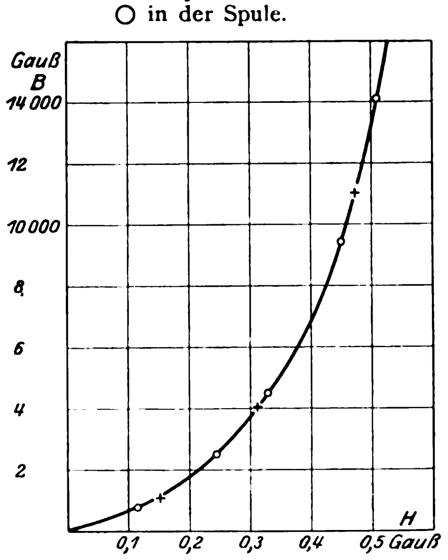


Bild 11. Messung geringer Feldstärken mit dem magnetischen Spannungsmesser. Anfangskommutierungskurven derselben Probe in Joch und Spule.

Kurven Bild 11 mußten natürlich die erforderlichen Vorsichtsmaßregeln, wie sorgfältigstes Entmagnetisieren der Probe und Beseitigung der Wirkung des Erdfeldes beobachtet werden. Um zu veranschaulichen, wie sehr die scheinbare Feldstärke in den beiden Fällen (Joch und Spule) voneinander abweicht, sind in Bild 9a dieselben Meßwerte wie in Bild 9b, aber diesmal in Abhängigkeit vom Strom, also ohne Benutzung des m. Sp. aufgetragen. Die Kurven sind völlig verzerrt, woraus hervorgeht, wie weitgehend die bei anderen Verfahren erforderlichen Korrekturen sind.

Als Beispiel einer Meßreihe mit dem magnetischen Spannungsmesser sind im folgenden die Zahlenwerte zur Aufnahme der Hystereseschleife in Joch und Spule (Kurvenbild 9a u. 9b) mitgeteilt.

Hystereseschleife im Joch.
Blechstreifen III_1.
B-Messung: 1 mm = 40,7 Gauß Induktion.
H-Messung: 1 mm = 0,0855 Gauß Feldstärke.

Stufe	Strom m Amp.	Ausschl. α_H mm	Ausschl. α_B mm	$\Sigma\alpha_H$	$\Sigma\alpha_B$	H Gauß	B Gauß
6	240	32,4	5,6	120,4	339,5	10,25	13800
5	151	36,0	14,6	88,0	334	7,5	13570
4	82	19,9	16,9	52	31,9	4,32	12950
3	38	25,7	48,1	32,1	302	2,72	12300
0	0	14,6	114,0	6,4	254	0,345	10300
1	21	2,3	136,8	8,2	140	0,70	5700
2	28	4,9	121,4	10,5	3	0,89	120
3	38	21,6	121,3	15,4	118	1,31	4800
4	72	44,4	72,7	37,0	239	3,15	9700
5	131	81,4	27,5	81,4	312	6,9	12700
6	240			120,5	339,5	10,25	13800
		240,9	678,9				
		120,45	339,5				

Hystereseschleife in der Spule.
Blechstreifen III_1.

Stufe	Strom m Amp.	Ausschl. α_H mm	Ausschl. α_B mm	$\Sigma\alpha_H$	$\Sigma\alpha_B$	H Gauß	B Gauß
6	125	41,1	8,0	119,2	340	10,15	13800
5	100	37,5	20,4	78,1	332	6,65	13500
4	78	31,8	50,8	40,6	312	3,44	12070
3	53	15,0	84,2	8,8	261	0,75	10600
2	30	1,6	77,2	6,2	177	0,525	7200
1	14	1,0	70,6	7,8	100	0,66	4070
0	0	1,2	70,8	8,8	30	0,75	1220
1	14	3,8	72,6	10,0	41	0,85	1650
2	30	12,7	89,2	13,8	114	1,175	4650
3	53	24,5	67,8	26,5	203	2,25	8250
4	78	29,8	41,2	51,0	271	4,33	11000
5	100	38,5	27,7	80,8	312	6,85	12700
6	125			119,3	340	10,25	13800
		238,5	680,5				
		119,2	340				

Unmittelbare Messung der Koerzitivkraft und Remanenz.

Besonderes praktisches Interesse hat das Verhalten von Eisen im Gebiete der Remanenz und Koerzitivkraft. Zur Bestimmung dieser Größen mit dem m. Sp



wurde darum ein besonderes Meßverfahren ausgebildet. Die üblichen Verfahren (Joch und Ellipsoid) weisen gerade im Gebiete kleiner Feldstärken ihre größten Fehler auf. Beim m. Sp. fallen diese Fehlerquellen, wie Jochscherung und Entmagnetisierungsfaktor, vollständig fort. Es handelt sich also nur darum, die Genauigkeit und Empfindlichkeit so weit zu steigern, daß auch die geringen Koerzitivkräfte hochwertigen Eisens, die in der Größenordnung von nur 0,1 Gauß liegen, noch zuverlässig zu messen sind. Bei der ballistischen Aufnahme der Hystereseschleife, auch mit dem m. Sp. ergibt sich jedoch die Koerzitivkraft nur als Differenz zweier großer Ausschläge (C_1S und C_2S in Bild 12) bzw. der entsprechenden Summe vieler Einzelausschläge. Bei gutem Eisen beträgt aber die Koerzitivkraft nur etwa $^1/_{50}$ bis $^1/_{100}$ der zur Magnetisierung verwandten Feldstärke, als Differenz zweier H_{max} wäre darum die Koerzitivkraft mit einem übermäßig großen Fehler

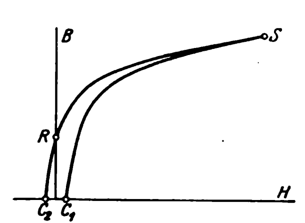


Bild 12. Unmittelbare Messung der Koerzitivkraft.

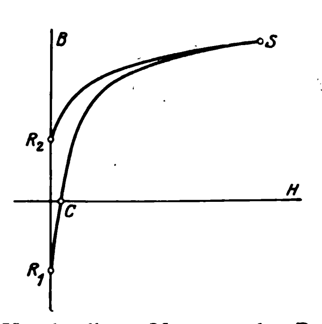


Bild 13. Unmittelbare Messung der Remanenz.

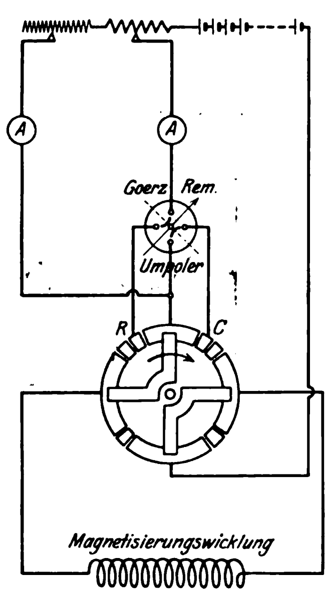


Bild 14. Schaltanordnung zur Messung der Remanenz und Koerzitivkraft.

behaftet. Es wäre vielmehr erwünscht, die Koerzitivkraft unmittelbar ablesen zu können.

Zu diesem Zwecke wurde eine Schaltung angewandt, die den magnetisierenden Strom so steuert, daß die halbe Hystereseschleife des Bildes 12 vom Koerzitivpunkt C_1 über den Sättigungspunkt S den Remanenzpunkt R zum anderen Koerzitivpunkt C_2 in einem Zuge durchlaufen wird. Schalttechnisch bedeutet das: Kommutierung eines kleinen, der Koerzitivkraft entsprechenden Stromes, zuvor jedoch kurzzeitiges Einschalten eines großen. Der große Strom wird auf eine gewünschte Maximalfeldstärke bzw. Induktion eingestellt, der kleine Strom so lange geändert, bis die Induktionsprüfspule $\int dB = 0$ anzeigt. Dann liefert der m. Sp. $\int dH$, also die doppelte Koerzitivkraft.

In ganz entsprechender Weise läßt sich die wahre Remanenz messen, indem eine halbe Hystereseschleife vom Remanenzpunkt R_1 über C, S nach R_2 plötzlich durchlaufen wird (Bild 13). Der Schaltvorgang ist wieder ein Umpolen eines kleinen, nur zum Ausgleich der entmagnetisierenden Wirkung der Probe dienenden Stroms, dazwischen kurzzeitiges Einschalten des großen, magnetisierenden Stromes. Die Einstellung geschieht jedoch so, daß $\int_{C_1}^{C_2} dH = 0$ wird. Dann wird $\int_{C_1}^{C_2} dB = 2\,B_{rem}$.

Die Anordnung zur Messung der Koerzitivkraft und Remanenz.

Der wesentliche Teil der Meßanordnung ist der Schalter, der den Strom in der verlangten Weise mit der richtigen Geschwindigkeit steuert. Im Prinzip ist der Schalter ein Umpoler mit zwei zusätzlichen Kontakten für den magnetisierenden Stromstoß. Bild 14 zeigt die Schaltung. Bei jedem Auslösen dreht sich der Schalter um 90°. Zur Messung der Koerzitivkraft gibt bei dem eingezeichneten Drehsinn der Kontakt C den magnetisierenden Stromstoß vor dem Umpolen, während zur Messung der Remanenz der Stromstoß erst nach dem Umpolen von dem Kontakte R gegeben wird. Der Umpoler U dient lediglich dazu, die Anordnung auf Koerzitivkraft oder Remanenzmessung umzuschalten. Bild 15 zeigt die Ausführung des Schalters. Er ist als Drehschalter, möglichst leicht, mit mehrfachen Kontaktfedern zur Erreichung eines zuverlässigen Stromübergangs gebaut. Durch einen langen Beschleunigungsweg und federnde Abbremsung wurde eine Schaltgeschwindigkeit bis zu einigen tausendsteln Sekunden ermöglicht. Die Betätigung geschah durch Aufziehen und Auslösen einer Feder, durch deren Spannung die Schaltgeschwindigkeit eingestellt werden konnte.

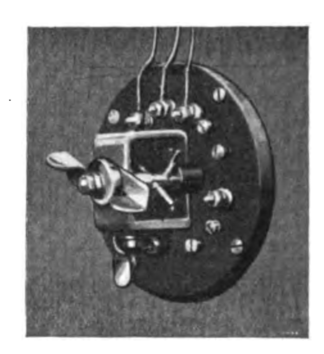



Bild 15. Der Schalter zur Messung der Koerzitivkraft.

Die wesentliche Frage für die Durchführbarkeit der unmittelbaren Koerzitivkraftmessung ist die, wie das ballistische Galvanometer auf die Impulsdifferenzen anspricht. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir etwas näher auf die Wirkungsweise des ballistischen Galvanometers eingehen.

Verhalten des ballistischen Galvanometers bei mehreren nacheinander erfolgenden Impulsen.

Die Differentialgleichung der Schwingung eines ballistischen Galvanometers führt unter Vernachlässigung der Dämpfung auf eine Sinusschwingung.

$$a = A \cdot \sin \omega t,$$

deren Amplitude A durch die Größe des Impulses bestimmt ist.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist die Kreisfrequenz, wenn T die Schwingungsdauer (ganze Periode) des Instrumentes bedeutet. Erfolgen mehrere Impulse, so überlagern sich die Schwingungen. Die weitere Behandlung wird am einfachsten bei Anwendung der in der Elektrotechnik üblichen Schwingungsvektoren, indem wir die durch einen Impuls ausgelöste Schwingung durch einen Vektor entsprechender Größe darstellen. Die Winkellage entspricht der Zeit derart, daß der Bogen 2π gleich der Schwingungszeit T ist. Zwei in einem Zeitabstand t erfolgende Impulse werden also durch zwei um den Winkel $\omega \cdot t$ verdrehte Vektoren dargestellt (Bild 16). Die Summe ihrer Wirkungen entspricht der resultierenden R. Der Fall zweier Teilimpulse tritt z. B.

beim Kommutieren ein, der Ausschlag ist dann zu klein im Verhältnis $\cos\frac{\omega t}{2}$. Für verschiedene Verhältnisse t:T ist der auftretende Fehler im Prozent in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

t:T	Fehler in Prozent
0,05	1,2
0,02	0,2
0,01	0,05
0,005	0,013
0,001	0,000.

Ist z. B. die Kommutierungszeit 5% der Schwingungsdauer des Instruments, d. h. 20% der Ausschlagszeit, so beträgt der Fehler etwa 1%. während er schon bei einem Verhältnis t:T = 1/100 bis auf 0,05% zurückgeht. Handelt es sich um

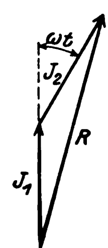


Bild 16. Teilimpulse beim Kommutieren.

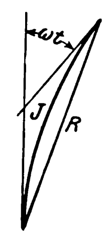


Bild 17. Impuls von endlicher Dauer.

einen Impuls von endlicher Dauer t und gleichbleibender Stärke, so wird der Ausschlag zu klein im Verhältnis von Sehne zu Kreisbogen (Bild 17). Der Fehler ist also in diesem Falle $1 - \frac{\sin\frac{\omega t}{2}}{\frac{\omega t}{2}}$. Die Fehlerrechnung ist der Einfachheit halber unter Vernachlässigung der Dämpfung durchgeführt, doch haben die Werte auch bei Dämpfung bis zum aperiodischen Grenzfall Gültigkeit[1]. Die Größe dieses Fehlers bildet einen wesentlichen Gesichtspunkt für die Wahl des ballistischen Galvanometers. Wie aus der Tabelle hervorgeht, kann man in den meisten Fällen mit der Schwingungszeit des Galvanometers unbedenklich bis an die Grenze der Ablesbarkeit heruntergehen. Allerdings empfiehlt es sich, beim Kommutieren die Schaltgeschwindigkeit sicherzustellen. Das geschah im vorliegenden Falle durch Verwendung eines handelsüblichen Moment-Drehschalters, der sich auch in bezug auf Zuverlässigkeit, geringem und gleichbleibendem Übergangswiderstand gegenüber Hebelschaltern und Quecksilberwippen als weit überlegen erwies. Die Verwendung eines schnellschwingenden Instruments hat noch einen andern Vorteil: Die ballistische Spannungsempfindlichkeit von Drehspulgalvanometern läßt sich nämlich, wie schon oben bemerkt, bei geschlossenem Kreise in Folge der Dämpfung nicht über einen gewissen Betrag steigern. Dabei hat aber bei sonst gleichen Bedingungen das schnellschwingendere Instrument die größere ballistische Spannungsempfindlichkeit.

Ballistische Null- und Differenzenmethode.

Nullmethoden haben im allgemeinen den Vorteil größerer Genauigkeit. Bei ballistischen Messungen gilt das jedoch nicht ohne weiteres. Nehmen wir an, die

[1] Vgl. E. Dorn, Wien. Annalen 17, S. 654, 1882. — Diesselhorst, Ann. d. Physik, 9, S. 712, 1902.

beiden gleich großen Impulse J_1 und J_2 (Bild 18), die sich aufheben sollen, sind zeitlich um die kleine Zeit t verschoben, so bleibt ein Restbetrag R, der in diesem Falle proportional t ist. Wie man sieht, ist dieser Restausschlag außerdem um 90^0 „phasenverschoben". Der Vorgang spielt sich so ab, daß das Instrument in der ganz kurzen Zeit t einen R entsprechenden Ausschlag macht, dann plötzlich zum Stillstand abgebremst wird und, sozusagen mit der Amplitude beginnend, weiterschwingt. Für solche Nullmessungen stellt demnach das Verhältnis t : T die Genauigkeitsgrenze dar. Für die Anwendung einer ballistischen Nullmethode ist also möglichst kleines t (schnelles Schalten) bei möglichst großer Schwingungsdauer T erforderlich.

Bei der Messung von Impulsdifferenzen werden die Verhältnisse wieder günstiger. Sobald die Impulsdifferenz ΔJ (Bild 19) ein Mehrfaches von $\frac{t}{T} \cdot J$ wird, geht der Fehler, wie oben, schnell zurück.



Bild 18. Restimpuls bei ballistischer Nullmethode.

Bild 19. Messung einer Impulsdifferenz.

Auch durch Versuche wurde die Möglichkeit, kleine Differenzen großer Impulse richtig zu messen, bestätigt. Mit Hilfe einer gegenseitigen Induktivität wurde einerseits durch Kommutieren eines kleinen Stromes ein ballistischer Ausschlag bewirkt, andererseits wurde kurz vor dem Kommutieren der Strom einen Augenblick auf einen großen, etwa hundertfachen Betrag gesteigert. Der Ein- und Ausschaltimpuls sollten sich aufheben und der Gesamtausschlag der gleiche sein wie vorher. Dies trat auch ein mit einer Genauigkeit von etwa 1 %. Damit ist auch in diesem Punkte die Möglichkeit einer direkten ballistischen Messung der Koerzitivkraft gezeigt.

Zur Kontrolle des Verfahrens wurden wiederum vergleichende Messungen nach dem Ringverfahren, in der freien langen, gerechneten Spule und andererseits nach dem beschriebenen Verfahren bei Joch- und Spulenmagnetisierung vorgenommen, welche übereinstimmende Ergebnisse lieferten.

Vergleich mit andern Verfahren.

Die theoretisch einwandfreiesten der üblichen magnetischen Meßverfahren sind Ring- und magnetometrisches Verfahren. Das Magnetometer verlangt aber im Gegensatz zum m. Sp. sorgfältig hergestellte Elipsoide, anderenfalls die Bestimmung der wahren Feldstärke infolge des Entmagnetisierungsfaktors sehr unzuverlässig wird Sein Hauptnachteil ist aber die hohe Empfindlichkeit gegen Störfelder, die beim m. Sp. so gut wie gar keine Rolle spielen. — Die gesamten beschriebenen Versuche z. B. mußten und konnten in nur zwei Meter Entfernung von einem 50000-Volt-Hochspannungsversuchstand durchgeführt werden.

Auch bei dem zuverlässigsten, in der Praxis anwendbaren, dem Ringverfahren, bedeutet die Herstellung und gleichmäßige Bewicklung der Ringe eine umständliche Vorbereitung jeder einzelnen Probe. Außerdem sahen wir, daß eine über den ganzen Umfang homogene Ringprobe sich überhaupt kaum herstellen läßt, so daß das Ringverfahren im Gegensatz zum m. Sp. nur Mittelwerte liefern kann.

Diejenigen Verfahren schließlich, bei denen die Proben keine Schwierigkeiten machen, nämlich die verschiedenen Jochmethoden, verlangen so weit gehende und unsichere Korrekturen (Jochscherung), daß sie, zumal bei geringen Feldstärken und hochwertigem Material, im Gegensatz zum m. Sp. keinerlei Anspruch auf Genauigkeit machen können.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der magnetische Spannungsmesser in der beschriebenen Ausführung als Eisenprüfgerät den Anforderungen eines technischen Meßverfahrens, wie Handlichkeit, Unempfindlichkeit gegen Störungen, Benutzung beliebig geformter Proben, weitgehend genügt und damit zugleich die Genauigkeit eines wissenschaftlichen Meßverfahrens verbindet.

Messungen an Eiseneinkristallen.

Die Untersuchung des magnetischen Verhaltens von Eiseneinkristallen hat sowohl wissenschaftlich, für die Theorie des Ferromagnetismus, wie auch praktisch technische Bedeutung. Die Messungen an Einkristallen sind aber dadurch erschwert, daß die Proben nur ziemlich geringe Abmessungen haben und in der Form untersucht werden müssen, die ihre Herstellung vorschreibt, da sie gegen mechanische Bearbeitung außerordentlich empfindlich sind. Zu ihrer Untersuchung ist daher gerade der magnetische Spannungsmesser besonders geeignet.

Die Proben.

Die untersuchten Einkristalle sind im Eisenhüttenmännischen Institut des Herrn Prof. Oberhoffer in Aachen aus weichem Flußeisen von etwa folgender Analyse hergestellt:

$$\begin{aligned} c &= 0{,}10 \\ M_n &= 0{,}47 \\ Si &= 0{,}01 \\ P &= 0{,}022 \\ S &= 0{,}044. \end{aligned}$$

Nach 48stündiger Glühung bei 950° — zur Erreichung einer günstigen Korngröße und Entfernung des Kohlenstoffes — wurde das Material einer Deformation von 3,5% ausgesetzt, um alsdann durch 72stündiges Glühen bei 880° als Einkristall der gewünschten Größe erhalten zu werden. Der größte der Einkristalle hat eine Ausdehnung von etwa 130·16·2 mm. An ihm wurden die meisten Messungen ausgeführt (Stab H_5). An einigen andern, etwa halb so großen Kristallen wurden übereinstimmende Vergleichsmessungen gemacht. Auch Vielkristalle aus dem gleichen Ausgangsmaterial und von gleicher chemischer und thermischer Vorbehaltung standen zum Vergleiche zur Verfügung.

Die Meßergebnisse.

Die Hystereseschleife des Einkristalls (Bild 20) ist gegenüber derjenigen des Vielkristalls, die zum Vergleich im gleichen Bilde aufgetragen ist, gekennzeichnet durch geringere Steilheit. Bei etwa halb so großer Koerzitivkraft beträgt die wahre Remanenz nur einen kleinen Bruchteil derjenigen des Vielkristalls. Auch die Größe der Ummagnetisierungsarbeit ist beim Einkristall bedeutend geringer, wenn auch



die Breite der Schleife immer noch endlichen meßbaren Wert hat. Die Permeabilität ist beim Einkristall dagegen etwas geringer als beim Vielkristall.

Die Hystereseschleife bei schwacher Magnetisierung zeigt Bild 21. Sie weist eine Koerzitivkraft von 0,25 Gauß auf und fällt im übrigen durch den völlig geradlinigen Verlauf des aufsteigenden Astes auf.

Besonders auffallend war die starke Veränderlichkeit der Breite der Hystereseschleife und damit die veränderliche Remanenz und Koerzitivkraft (Bild 22), je nachdem wie schnell die Feldänderung verlief. Je rascher das Feld geändert wurde, um so schmaler wurde die Hystereseschleife. Im Grenzfall war die Koerzitivkraft nicht mehr meßbar ($<$ 0,05 Gauß), während ihr größter Wert 0,7 Gauß betrug. Die veränderliche Geschwindigkeit der Feldstärkesprünge wurde durch die in Bild 23 gezeichnete Schaltung bewirkt. Vor die Magnetisierungswicklung wurde eine Induktivität geschaltet, parallel zu beiden ein induktionsfreier Widerstand. Durch diese Anordnung wurde erreicht, daß bei jeder Stromänderung, auch beim Ausschalten,

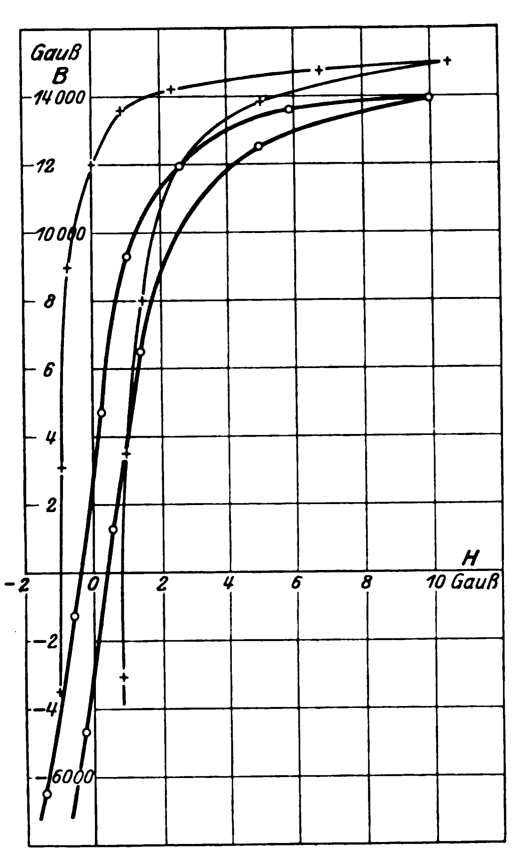


Bild 20. Hystereseschleife des Einkristalls. Zum Vergleich die des entsprechenden Vielkristalls. ○ Einkristall, + Vielkristall.

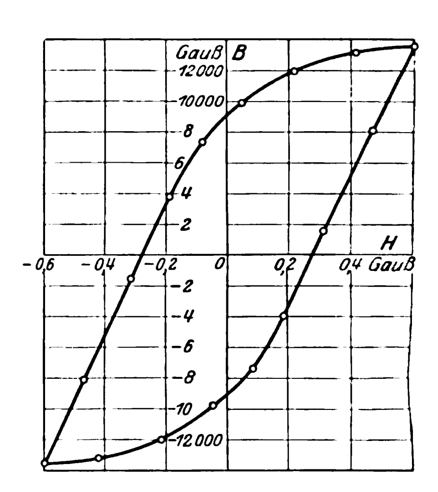


Bild 21. Anfangsschleife des Einkristalls.

die Größe $\frac{di}{dt}$ und damit die Feldänderung einen durch die Wahl von L und R bestimmbaren endlichen Wert hat. Die langsamste Feldänderungsgeschwindigkeit (Bild 22) entsprach einer Zeitkonstante von etwa $^1/_{100}$ Sekunde. Bei noch langsamerer Änderung von Hand mit Hilfe von Schiebewiderständen verbreiterte sich die Hystereseschleife nicht weiter. Die größte Änderungsgeschwindigkeit war gegeben bei plötzlichem Ausschalten ohne zusätzliche Induktivität und ohne Parallelwiderstand. Sie war begrenzt durch die Dauer des Flammbogens beim Ausschalten, sowie durch das Abklingen der Wirbelströme in der Probe selbst.

Die Breite an verschiedenen Stellen der Hystereseschleife wurden auch unmittelbar bestimmt nach Art des oben beschriebenen Koerzitivkraftmeßverfahrens. Von dem betreffendem Punkte x der Hystereseschleife (Bild 22) ausgehend, wurde

der Weg $x_1 S$ und $S x_2$ sowohl in zwei Sprüngen, wie auch in einem Zuge durchlaufen. Die so gewonnenen Werte ΔH und ΔB liefern unmittelbar ein Maß für die Breite der Hystereseschleife. Dabei entsprechen x_1 und x_2 dem gleichen magnetisierenden Strome, die ganz nahe dem Koerzitivpunkt liegenden Punkte R' entsprechenden Strome O also der scheinbaren Remanenz.

Die Erscheinung der veränderlichen Breite der Hystereseschleife ist nicht nur eine Eigenart des Einkristalls, vielmehr wurde auch an gewöhnlichem Handeleisen, besonders auch an dicken Proben, eine veränderliche Breite der Hystereseschleife bzw. der Koerzitivkraft im Verhältnis 1 : 2 gemessen. Legiertes Blech dagegen zeigt die Erscheinung nur in ganz geringem Maße.

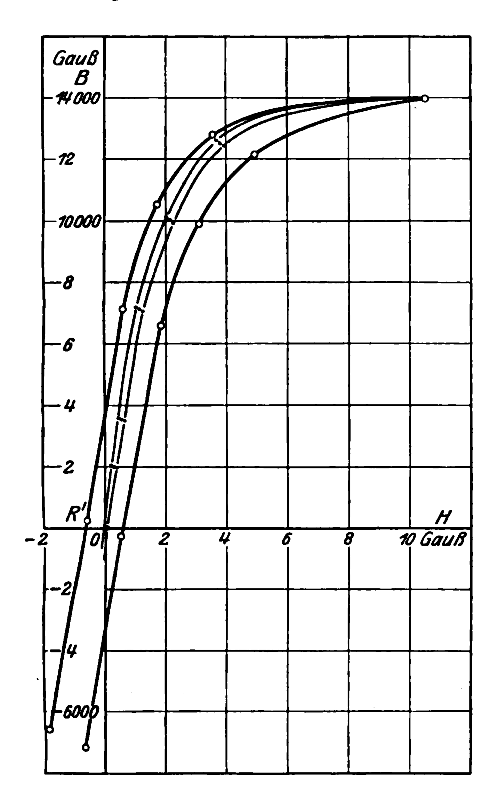


Bild 22. Veränderliche Breite der Hystereschleife des Einkristalls.

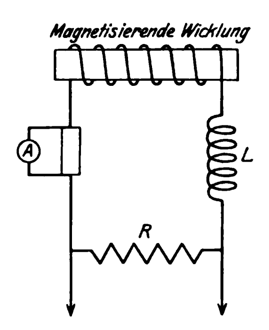


Bild 23. Anordnung für veränderliche Schaltgeschwindigkeit.

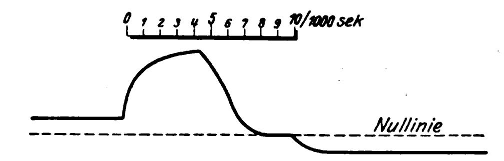


Bild 24. Oszillogramm des Schaltvorgangs zur Messung der Koerzitivkraft nach Schaltung Bild 23.

Die vorstehenden merkwürdigen Ergebnisse werden zwar gestützt durch die Beobachtungen Gerlachs[1], daß die scheinbare Remanenz verschieden groß ist, je nach Art der Feldänderung. Trotzdem soll aber erörtert werden, inwieweit die Beobachtungen auf Fehler der Anordnung zurückgeführt werden können. Ein bei ballistischen Messungen an sich möglicher Fehler infolge der sog. magnetischen Nachwirkung kommt hier nicht in Frage, weil er durch Vergleich der Galvanometerausschläge bei Kommutieren und stufenweiser Feldänderung sich eliminieren lassen müßte. Der Einkristall zeigte jedoch überhaupt keine merklichen Nachwirkungserscheinungen. Dagegen besteht bei ballistischen Messungen ganz allgemein die Gefahr des Auftretens von Schwingungen beim Schalten, sowohl mechanischer wie elektrischer Art. Schon aus diesem Grunde ist die Schaffung definierter Schaltvorgänge durch Überbrücken der magnetisierenden Wicklung mit einem induktionsfreien Widerstande zu empfehlen, da sonst die Probe, besonders beim Ausschalten, durch Schwingungen entmagnetisiert werden kann. Bei Anwendung der Schaltung

[1] W. Gerlach Zeitschrift f. Physik Bd. 38, S. 828, 1926.

des Bildes 23 dagegen konnte die Schwingungsfreiheit wenigstens bis zur Grenze der Leistungsfähigkeit des Schleifenoszillographen nachgewiesen werden (Oszillogramm Bild 24). Die Verhältnisse bei plötzlichem Ausschalten über einen Flammenbogen wären jedoch erst mit dem Kathodenstrahloszillographen zu erklären.

Das magnetische Verhalten des Einkristalls bei gleichzeitiger mechanischer Beanspruchung.

Bei Messungen des Einkristalls im Joch machte sich der Einfluß des Einspannens auf die magnetischen Eigenschaften so stark bemerkbar, daß diese Er-

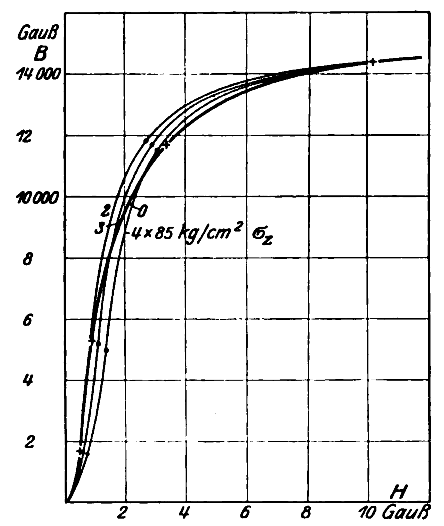


Bild 25. Kommutierungskurve des Einkristalls bei gleichzeitiger mechanischer Zugbeanspruchung

scheinungen zu einer besonderen Versuchsreihe den Anlaß gab. Der Einkristall wurde, während er sich in der magnetisierenden Spule befand, mit Hilfe einer einfachen

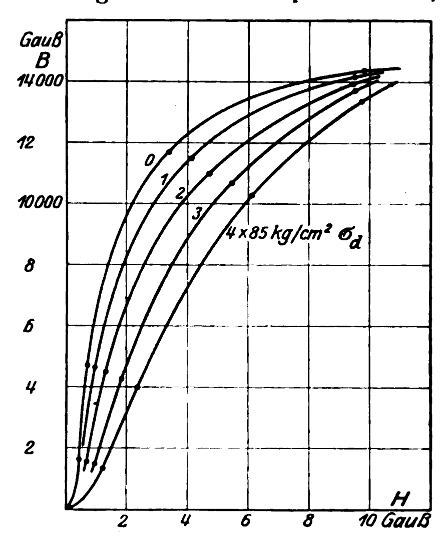


Bild 26. Kommutierungskurve des Einkristalls bei Druckbeanspruchung.

Hebelspann-Vorrichtung verschiedenen Zug- und Druckbeanspruchungen unterworfen. Bei Zugspannung zeigte sich nur geringe Änderung der magnetischen Eigenschaften,

die sich mit denen gewöhnlichen Eisens im wesentlichen decken[1]. Bei einer bestimmten, nicht sehr großen Zugbeanspruchung erreicht die Permeabilität ein Maximum, um dann wieder zu fallen, bei gleichbleibender Feldstärke betrachtet. Diese „günstigste" Zugbelastung ist bei verschiedenen Feldstärken verschieden, so daß die Kurven (Bild 25) sich überschneiden.

Viel weitgehender ist der Einfluß von Druck- und Biegungsbeanspruchung auf das magnetische Verhalten des Einkristalls. Hier nimmt die Leitfähigkeit mit zunehmender Belastung erst langsam, dann schneller ab (Bild 26, 27). Bei gleicher

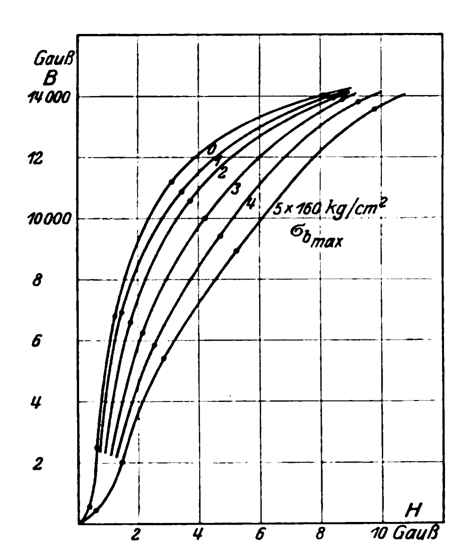


Bild 27. Kommutierungskurve des Einkristalls bei Biegungsbeanspruchung.

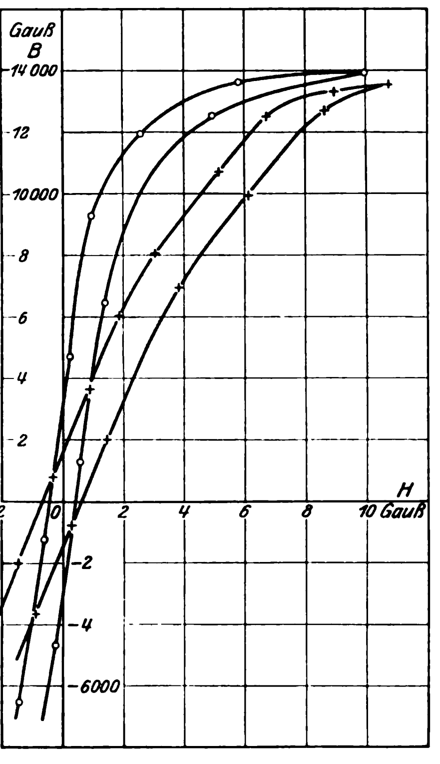


Bild 28. Einfluß einer elastischen Formänderung auf die Hystereseschleife des Einkristalls.

Induktion steigt bei Belastung die erforderliche Feldstärke auf ein Mehrfaches, bei höheren Induktionen nimmt der Einfluß der Belastung wieder ab. Auch die Hystereseschleife hat bei gleichzeitiger magnetischer und mechanischer Beanspruchung eine stark veränderte abgeflachte Form (Bild 28).

Vergleich mit Messungen anderer Autoren.

Von den wenigen, bisher veröffentlichten Meßergebnissen an Eiseneinkristallen kommen hier als Vergleich nur die schon erwähnten von Gerlach in Frage. In vielen wesentlichen Punkten besteht Übereinstimmung der Ergebnisse. Sowohl die ungewöhnlich schmale Hystereseschleife, die auffallend geringe Remanenz, wie auch der völlig geradlinige Verlauf des aufsteigenden Astes der Anfangsschleife (vgl. Bild 21) stimmt mit den Ergebnissen Gerlachs überein. Dagegen zeigen die aufgenommenen Kurven durchaus den charakteristischen geschwungenen Verlauf von Hystereseschleifen, während Gerlach einen geradlinigen Verlauf mit einem oder mehreren Knicken beobachtet hat. Ein solcher Knick konnte bei keinem der untersuchten Kristalle festgestellt werden, auch nicht bei ganz feinstufiger Feldänderung.

[1] Vgl. Ewing, Magn. Induktion.

Zur Entscheidung dieser Frage, die zur Bereicherung unserer Kenntnisse über das Wesen des Ferromagnetismus von Bedeutung sein kann, muß wohl weiteres Material abgewartet werden. Dagegen kann man wohl schon sagen, daß der Eiseneinkristall die Erwartungen, die man vielleicht anfangs auf seine elektrotechnischen Anwendungsmöglichkeiten gesetzt hatte, nicht erfüllt hat.

Die Anregung zu dieser Arbeit ist ausgegangen von Herrn Professor Dr.-Ing. W. Rogowski. Für seine wertvolle Unterstützung und sein stets lebhaftes Interesse möchte ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Oberhoffer, der in liebenswürdiger Weise die Einkristalle für die Untersuchungen zur Verfügung gestellt hat, bin ich zu Dank verpflichtet.

Abgeschlossen am 13. Januar 1928.



Archiv für Elektrotechnik

XIX. Band. 4. Heft. 1928.

Die Spannungsverlagerung in Netzen mit Löschtransformatoren nach System Bauch.

Von

Dr.-Ing. **G. Oberdorfer,** Wien.

Inhaltsverzeichnis.

A. Einleitung.
B. Allgemeines und Problemstellung.
 I. Rechenmethode.
 II. Nullpunktslöscher, Pollöscher, Problemstellung.
  a) Allgemeines.
   1. Nullpunktsverlagerung in Netzen ohne Erdschlußlöscheinrichtung.
   2. Nullpunktsverlagerung in Netzen mit Nullpunktsdrossel.
   3. Nullpunktsverlagerung in Netzen mit Pollöschern.
  b) Problemstellung.
C. Nullpunktsverlagerung in Netzen mit Pollöscher unter Berücksichtigung der ungleichen Schenkelmagnetisierungen.
 I. Ersatzschema.
 II. Ableitung der Grundgleichungen.
 III. Auswertung der Grundgleichungen.
  a) Definition des Begriffes „Unsymmetriegrad".
  b) Aufstellung der beiden Hauptgleichungen.
 IV. Graphische Ermittlung der Nullpunktsspannung.
D. Durchrechnung eines praktischen Beispieles.

A. Einleitung.

Seitdem man Freileitungen größerer Abmessung und Bedeutung baute, trat für deren Verlegung die Forderung der Erreichung eines gegen Erde möglichst spannungslosen System-Nullpunktes immer mehr in den Vordergrund. Von besonderer Bedeutung wurde diese Frage aber erst von dem Zeitpunkt an, von welchem die verschiedenen Typen von Löscheinrichtungen eingebaut wurden, da man fürchtete, durch den Anschluß der Löschinduktivität, zusammen mit den Kapazitäten der Freileitungen Resonanzkreise herzustellen, die zu Überspannungen und den damit verbundenen unliebsamen und gefährlichen Begleiterscheinungen führen könnten. Eine ganze Reihe von Aufsätzen[1] zeugen von dem Interesse, das man dem Problem entgegenbrachte, aber auch von den sich direkt widersprechenden Ansichten der einzelnen Autoren. Von größter Wichtigkeit ist jedenfalls die richtige Einschätzung der Sättigungserscheinungen in den zur Erdstromlöschung verwendeten Drosselspulen. War man sich auch hierüber vorerst uneinig, so sind die bezüglichen Fragen durch den Aufsatz von Gauster: „Spannungsverlagerung an Pol-Erdschlußlöschern, E. u. M. 1925, Heft 8", soweit sie sich auf Nullpunktslöscher beziehen, wohl als geklärt anzusehen. Bei Pollöschern treten jedoch noch zusätzliche Fragen auf, die sich hauptsächlich auf den Einfluß ungleicher Magnetisierungen der einzelnen Schenkel bei auftretenden Netzunsymmetrien beziehen. Daß diese Einflüsse ganz bedeutend sein können, soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden. Man wird aber auch sehen, daß im wesentlichen sich der Pollöscher auch in dieser Hinsicht ähnlich verhält

[1] R. Bauch, Die Polerdung mittels Erdungsdrosseln als Schutz gegen Erdschlußstrom und durch ihn verursachte Überspannungen ETZ 1921, H. 22 u. 23. — G. Benischke, Resonanzspule, Dissonanzspule, Löschtransformator ETZ 1921, H. 26.

wie die Nullpunktsdrossel, so daß die dort gewonnenen Ergebnisse sinngemäß übertragen werden können.

B. Allgemeines und Problemstellung.

I. Rechenmethode.

Wir wollen uns im folgenden der symbolischen Methode bedienen und zu unseren Untersuchungen das in Bild 1 dargestellte Koordinatensystem benützen. Wir haben demgemäß eine „reelle" Achse und eine „imaginäre" Achse, die zu ihr normal steht. Die Faktoren j, (— 1), (—j) entsprechen dann bekanntlich einer Drehung eines Vektors um beziehungsweise 90°, 180°, 270° im positiven Sinne, d. h. in jenem, in welchem die positive reelle Achse auf dem kürzesten Wege in die Richtung der positiven imaginären Achse gebracht werden kann. Hierbei bedeutet $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. In der Abbildung sind zum besseren Verständnis die Vektoren $\mathfrak{A}$, $j\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{A}$ und $-j\mathfrak{A}$ eingetragen. Weiters sei festgesetzt, daß Vektoren mit deutschen (gotischen) Buchstabenn dargestellt werden sollen und das Symbol

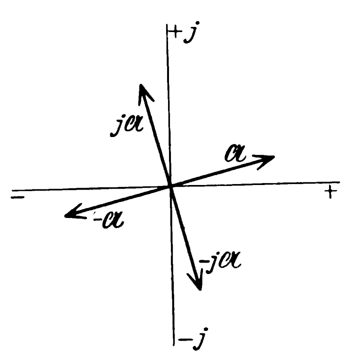


Bild 1. Koordinatensystem.

$$n\sum_{1}^{i}\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_i$$

sich auch auf Vektorsummen erstrecken möge.

Im Zuge der anschließenden Untersuchungen soll ferner teilweise auf eine Rechenmethode gegriffen werden, die sich zur Behandlung von Fragen in unsymmetrischen Systemen als besonders brauchbar erwiesen hat, auf die Methode des Rechnens mit symmetrischen Koordinaten. Da bereits an anderer Stelle[1] eine umfassendere Einführung in die äußerst fruchtbare Rechnungsart gebracht wurde, genügt es hier, die Grundzüge so weit anzuführen, als sie in der vorliegenden Arbeit Verwendung finden.

In derselben Weise, wie man durch Multiplikation mit dem Faktor j, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$ eine Drehung von Vektoren um 90° und ein Vielfaches hievon vornehmen kann, läßt sich auch ein Operator „a" finden, der einer Drehung um 120° entspricht. Legt man beispielsweise den Vektor $\mathfrak{A}$ in die positive reelle Achse und will man $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ darstellen, wobei $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|$, die absoluten Beträge der beiden Vektoren gleich sein sollen und der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ gleich + 120° betragen möge, so kann man schreiben:

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{2}\mathfrak{A} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = a\,\mathfrak{A},$$

wenn

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

gesetzt wird. Ein Vektor $\mathfrak{C}$ vom gleichen Absolutwert und weiterer Voreilung um + 120° ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{C} = a\,\mathfrak{B} = a^2\mathfrak{A} = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathfrak{A}.$$

Wie man sieht, entspricht einer Verschiebung eines Vektors um + 120° eine Multiplikation desselben mit dem Operator „a", einer Verschiebung um + 240° =

[1] G. Oberdorfer, Das Rechnen nach der Methode der symmetrischen Koordinaten. E. u. M. 1927, H. 15.

— 120° eine Multiplikation mit „a^2". Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Beziehung allgemein gilt, unabhängig davon, welche Lage der Vektor $\mathfrak{A}$ vor der Drehung eingenommen hat.

Es soll gleich eine der wichtigsten Eigentümlichkeiten des Operators a und seiner Potenzen erwähnt werden, von der im folgenden Gebrauch gemacht werden wird: Da die dritte Potenz von a, $a^3 = 1$ ist, wird die Summe

$$1 + a + a^2 = 1 - \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.$$

Dieses Resultat ergibt sich auch aus folgender Überlegung: Ein symmetrisches Drehstromsystem $\mathfrak{E}_R$, $\mathfrak{E}_S$, $\mathfrak{E}_T$ ist in symmetrischer Darstellung nach dem eben Gesagten gegeben durch

$$\mathfrak{E}_R = \mathfrak{E}_R,$$
$$\mathfrak{E}_S = a^2\,\mathfrak{E}_R,$$
$$\mathfrak{E}_T = a\,\mathfrak{E}_R,$$

worin $\mathfrak{E}_R$, $\mathfrak{E}_S$, $\mathfrak{E}_T$ die drei Phasenspannungen bedeuten mögen. Die Summe der drei Spannungen

$$\mathfrak{E}_R + \mathfrak{E}_S + \mathfrak{E}_T = \mathfrak{E}_R(1 + a + a^2) = 0$$

muß Null sein. Daher muß der Klammerausdruck verschwinden, wie es auch die mathematische Berechnung desselben ergibt.

Nach dem Begründer[1] der symmetrischen Koordinatenzerlegung Fortescue läßt sich nun zeigen, daß man jedes unsymmetrische Dreiphasensystem zerlegen kann in ein gleichphasiges und zwei symmetrische Dreiphasensysteme, von denen eines im positiven, das 2. im negativen Sinne rotiert. Ist also beispielsweise das unsymmetrische System gegeben durch die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (s. Bild 2), so muß dasselbe darstellbar sein durch

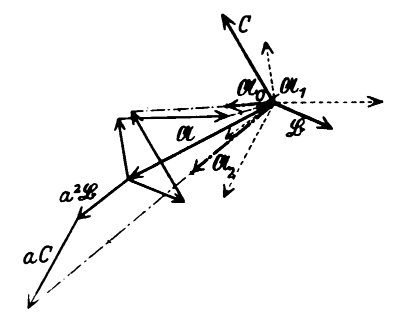


Bild 2. Ermittlung der symmetrisehen Komponenten eines unsymmetrischen Dreiphasensystem.

1. ein gleichphasiges System, in der Folge „Nullsystem" genannt, mit den Vektoren $\mathfrak{A}_0$, B_0, $\mathfrak{C}_0$;
2. ein positiv drehendes, symmetrisches Dreiphasensystem, in der Folge „Mitsystem" genannt, mit den Vektoren

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$$

und

3. ein negativ drehendes, symmetrisches Dreiphasensystem, in der Folge „Gegensystem" genannt, mit den Vektoren[2]

$$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2.$$

Jeder Vektor des unsymmetrischen Systems setzt sich dann aus den drei Komponenten der symmetrischen Zerlegung zusammen, so daß man schreiben kann:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2,$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2,$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß definitionsgemäß die Vektoren

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{C}_0$$

denn sie bilden das gleichphasige Nullsystem

[1] C. L. Fortescue, Transaction of American Institute of Electrical Engineers, 1918.
[2] Bezüglich Benennung und Bezeichnungsweise siehe den bereits vorgenannten Aufsatz in der E. u. M. 1927, H. 15.

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{B}_1 = a^2 \mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{C}_1 = a \mathfrak{A}_1,$$

denn sie bilden das rechtsdrehende, symmetrische Mitsystem und

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2,$$
$$\mathfrak{B}_2 = a \mathfrak{A}_2,$$
$$\mathfrak{C}_2 = a^2 \mathfrak{A}_2,$$

denn sie bilden das linksdrehende, symmetrische Gegensystem.

Führt man nun diese Beziehungen in die vorigen Gleichungen ein, so wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2, \tag{1}$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_0 + a^2 \mathfrak{A}_1 + a \mathfrak{A}_2, \tag{2}$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_0 + a \mathfrak{A}_1 + a^2 \mathfrak{A}_2. \tag{3}$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 3\,\mathfrak{A}_0 + (1 + a + a^2)\,\mathfrak{A}_1 + (1 + a + a^2)\,\mathfrak{A}_2$$

oder nach dem früher Gesagten

$$3\,\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}.$$

Erweitert man Gleichung (2) mit a, Gleichung (3) mit a^2 und addiert wieder, so wird

$$\mathfrak{A} + a\,\mathfrak{B} + a^2\,\mathfrak{C} = 0\,\mathfrak{A}_0 + 3\,\mathfrak{A}_1 + 0\,\mathfrak{A}_2.$$

In gleicher Weise wird nach Erweiterung mit a^2 und a:

$$\mathfrak{A} + a^2\,\mathfrak{B} + a\,\mathfrak{C} = 0\,\mathfrak{A}_0 + 0\,\mathfrak{A}_1 + 3\,\mathfrak{A}_2.$$

Zur Bestimmung der symmetrischen Komponenten des unsymmetrischen Systems $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dient also nunmehr das Gleichungstripel:

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{3}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}), \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{3}(\mathfrak{A} + a\,\mathfrak{B} + a^2\,\mathfrak{C}), \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{3}(\mathfrak{A} + a^2\,\mathfrak{B} + a\,\mathfrak{C}). \tag{6}$$

Die graphische Konstruktion dieser Komponenten ist äußerst einfach und ohne weiteres dem Bild 2 zu entnehmen. Man braucht nur die Summen der rechten Seiten der Gleichungen (4), (5) und (6) zu bilden und den Summenvektor zu dritteln.

Sind in einem anderen Fall die symmetrischen Komponenten bekannt, so können leicht durch Summation nach den Gleichungen (1), (2) und (3) die Vektoren des Hauptsystems gefunden werden.

Da nunmehr die mathematischen Methoden, so weit sie im späteren Verwendung finden sollen, besprochen sind, wollen wir nunmehr zu unserem Problem zurückkehren und eine präzise Formulierung desselben aufstellen.

II. Nullpunktslöscher, Pollöscher, Problemstellung.

a) Allgemeines.

1. Nullpunktsverlagerung in Netzen ohne Löscheinrichtung.

Sind in einer einfachen Drehstromleitung (Bild 3) die Kapazitäten gegen Erde beziehungsweise C_{11}, C_{22}, C_{33} die eingeprägten Phasenspannungen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ und bedeutet $\mathfrak{P}_0$ das Potential des Systemnullpunktes gegen Erde, so ist unter Berücksichtigung der eingezeichneten Richtungspfeile und unter Beachtung, daß die Summe aller zur Erde fließenden Ströme Null sein muß:

$$(\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{E}_1)\,j\,\omega\,C_{11} + (\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{E}_2)\,j\,\omega\,C_{22} + (\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{E}_3)\,j\,\omega\,C_{33} = 0,$$

woraus sich die Nullpunktsverlagerung bekanntlich ergibt zu



$$\mathfrak{P}_0 = -\frac{\mathfrak{E}_1 j\omega C_{11} + \mathfrak{E}_2 j\omega C_{22} + \mathfrak{E}_3 j\omega C_{33}}{j\omega (C_{11} + C_{22} + C_{33})} = -\frac{\sum\limits_{n=1}^{3} \mathfrak{E}_n j\omega C_{nn}}{\sum\limits_{n=1}^{3} j\omega C_{nn}}. \tag{7}$$

Hierbei sind die Ableitungsverluste der Leitung vernachlässigt worden, was wegen der Geringfügigkeit derselben praktisch ohne weiteres zulässig erscheint.

Aus Gleichung (7) ergibt sich sofort, daß sich bei gleichen Kapazitäten C_{nn} die Größen $\Sigma j\omega C_{nn}$ im Zähler und Nenner fortheben, so daß

$$\mathfrak{P}_0 = \Sigma \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_1 (1 + a + a^2) = 0$$

wird, wenn, was auch für die folgenden Erläuterungen vorausgesetzt sei, das Drehstromsystem in den Spannungen symmetrisch angenommen werden kann.

Ganz anders werden die Verhältnisse bei Erdung des Nullpunktes über eine Drosselspule mit Induktivität und Ohmschen Widerstand, wie sie beispielsweise von Petersen und Jonas zur Erdschlußlöschung benützt wird.

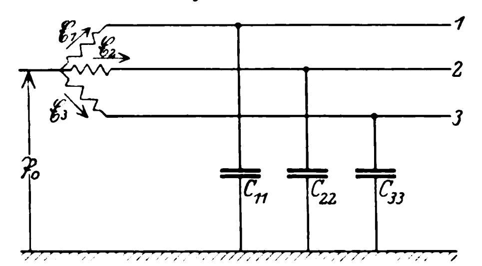


Bild 3. Leitung ohne Löscheinrichtung.

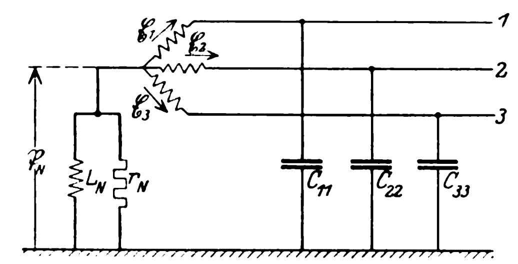


Bild 4. Netz mit Nullpunktsdrossel.

2. Nullpunktsverlagerung in Netzen mit Nullpunktsdrossel.

Wird nach Bild 4 an den Nullpunkt (Sternpunkt) des Systems eine Löschspule geschaltet, die aus Induktivität ωL_N und Ohmschem Widerstand r_N (Verluste) besteht, so tritt am Sternpunkt (Klemmen der Löschspule) eine Spannung $\mathfrak{P}_N$ auf, die sich nach den in dem Bild 4 eingetragenen Richtungspfeilen und Bezeichnungen ergibt, zu

$$(\mathfrak{P}_N + \mathfrak{E}_1) j\omega C_{11} + (\mathfrak{P}_N + \mathfrak{E}_2) j\omega C_{22} + (\mathfrak{P}_N + \mathfrak{E}_3) j\omega C_{33} + \mathfrak{P}_N \left(\frac{1}{r_N} - j\frac{1}{\omega L_N}\right) = 0,$$

woraus

$$\mathfrak{P}_N = -\frac{\mathfrak{E}_1 j\omega C_{11} + \mathfrak{E}_2 j\omega C_{22} + \mathfrak{E}_3 j\omega C_{33}}{j\omega (C_{11} + C_{22} + C_{33}) + \left(\frac{1}{r_N} - \frac{j}{\omega L_N}\right)} = -\frac{\sum\limits_{n=1}^{3} \mathfrak{E}_n j\omega C_{nn}}{\sum\limits_{n=1}^{3} j\omega C_{nn} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_N}}. \tag{8}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Beziehung (7) nur dadurch, daß im Nenner zur gesamten Leitungskapazität noch der Leitwert des Löschers als Summand hinzutritt.

Wir sehen sofort, daß auch hier im Falle gleicher Leiterkapazitäten eine Nullpunktsverlagerung nicht auftritt. Dies ist jedoch der Fall bei Kapazitätsunsymmetrien, und zwar wird die Spannungsverlagerung um so größer, je kleiner der Nenner in Gleichung (8) wird. Vernachlässigt man die Verluste und führt die Löschbedingung

$$\sum\limits_{n=1}^{3} j\omega C_{nn} = \frac{1}{\omega L_N}$$

ein, so wird

$$\mathfrak{P}_N' = -\frac{\sum\limits_{n=1}^{3} \mathfrak{E}_n j\omega \mathfrak{C}_{nn}}{0} = \infty.$$

Dies ist selbstverständlich nur ein theoretischer Wert, der aber immerhin die Aufstellung genauerer Untersuchungen fordert. Im allgemeinen ist $\frac{1}{r_N}$ nicht zu vernachlässigen und außerdem der Nenner des Bruches in Gleichung (8) wegen der vergleichsweise geringen Unsymmetriewerte so klein, daß der Wert des Bruches nur selten die Phasenspannung erreicht oder gar überschreitet. Es ist aber leicht erklärlich, daß über diese Frage in der Literatur die heftigsten Kämpfe ausgefochten wurden, bei denen oft den entgegengesetztesten Meinungen zu Recht verholfen werden sollte[1,2]. Von besonderem Einflusse auf die Nullpunktsverlagerung ist die Sättigung der Erdschlußdrossel, da diese entsprechend der gekrümmten Charakteristik der Eisenmagnetisierung bei größerer Verlagerung eine Verkleinerung der Induktivität aufweist, so daß die Resonanzbedingung im Nenner der Gleichung (8) gestört wird und dem Anwachsen von $\mathfrak{P}_n$ bald eine Grenze gesetzt wird. Die bezüglichen Untersuchungen sind jedoch äußerst schwierig durchzuführen, da für die Magnetisierungslinie keine einwandfreie Gleichung verwendet werden kann und man daher in erster Linie auf graphische Methoden angewiesen ist. Trotzdem schon seit einer Reihe von Jahren einschlägige Arbeiten veröffentlicht wurden[3], ist es eigentlich erst in letzterer Zeit gelungen, vollkommen Licht in dieses Gebiet zu werfen. In seinem Aufsatz: „Spannungsverlagerung an Pol-Erdschlußlöschern" in der E. u. M. 1925, Heft 8/133 zeigt Dr.-Ing. Gauster, welchen Einfluß die zunehmende Eisensättigung auf die Spannungsverlagerung nimmt und wie man mit Hilfe einer einfachen graphischen Methode die Spannungsverlagerung an Pol-Erdschlußlöschern ermitteln kann. Wir werden später noch auf das Ergebnis dieses Aufsatzes zurückkommen.

3. Nullpunktsverlagerung in Netzen mit Pollöschern.

Wir wollen in der Folge nur den Löscher System Bauch betrachten; die Untersuchung an anderen Typen kann prinzipiell in der gleichen Weise erfolgen, wenn die hier benützte Methode sinngemäß angewendet wird.

Wird vorerst wieder vom Einfluß der Eisensättigung abgesehen, so kann nach Bild 5 geschrieben werden:

$$n\sum_1^3(\mathfrak{P}_P+\mathfrak{E}_n)\left(\frac{1}{r}-j\frac{1}{\omega L}+j\omega C_{nn}\right)=0=n\sum_1^3\mathfrak{P}_P\left(\frac{1}{r}-j\frac{1}{\omega L}+j\omega C_{nn}\right)+$$

$$+n\sum_1^3\mathfrak{E}_n\left(\frac{1}{r}-j\frac{1}{\omega L}+j\omega C_{nn}\right)=3\,\mathfrak{P}_P\left(\frac{1}{r}-j\frac{1}{\omega L}\right)+n\sum_1^3\mathfrak{P}_P\,j\,\omega C_{nn}+$$

$$+n\sum_1^3 j\,\omega C_{nn}=\mathfrak{P}_P\left[3\left(\frac{1}{r}-j\frac{1}{\omega L}\right)+n\sum_1^3 j\,\omega C_{nn}\right]+n\sum_1^3\mathfrak{E}_n\,j\,\omega C_{nn},$$

woraus

$$\mathfrak{P}_P=-\frac{n\sum_1^3\mathfrak{E}_n\,j\,\omega C_{nn}}{n\sum_1^3 j\,\omega C_{nn}+3\left(\frac{1}{r}-j\frac{1}{\omega L}\right)}=-\frac{n\sum_1^3\mathfrak{E}_n\,j\,\omega C_{nn}}{n\sum_1^3 j\,\omega C_{nn}+\frac{1}{\mathfrak{z}_P}}. \tag{9}$$

[1] Siehe Diskussion in der ETZ 1921, S. 606, 988, 1213.

[2] Benischke, ETZ 1921, S. 695.

[3] Noether, ETZ 1921, S. 1478. ETZ 1922, S. 385, Über die Abstimmung der Löschdrossel. — Grünholz, E. u. M. 1924, S. 194. Spannungsverlagerung an Erdschlußspulen. — Bekku, Arch. f. Elektrot. 1925, S. 543. Methode der symmetrischen Koordinaten und allgemeine Theorie der Erdschlußlöscheinrichtungen.

Man erhält also die bekannte Tatsache, daß sich der Pollöscher genau so verhält wie eine Nullpunktdrossel; tatsächlich zeigen die beiden Gleichungen (8) und (9) ganz den gleichen Aufbau. Aus diesem Ergebnis dürfen aber nicht a priori alle Erfahrungen, die für Nullpunktlöscher gewonnen wurden, auf Pollöscher übertragen werden. Dies ist nur soweit zulässig, als es sich um Probleme handelt, bei denen die Sättigungserscheinungen unberücksichtigt bleiben können. Eine zusätzliche Schwierigkeit in der Behandlung der Pollöschprobleme unter Berücksichtigung der Eisensättigung ergibt sich dadurch, daß sich die Stärke der Magnetisierung im allgemeinen ungleich auf die Schenkel der einzelnen Phasen aufteilt, so daß zur Netzunsymmetrie noch neue Unsymmetrien im Löscher auftreten, die noch überdies mit veränderlicher Netzunsymmetrie entsprechend dem Gesetze der Magnetisierungslinie variieren. Der Schwierigkeit, diese vielfach unsymmetrische Veränderlichkeit in ein mathematisches Gewand zu kleiden, ist es wohl in erster Linie zu verdanken, daß bisher in den theoretischen Untersuchungen beim dreipoligen Löscher die Berücksichtigung der Magnetisierungserscheinungen außer acht gelassen wurde. Die vorliegende Arbeit soll eine Methode angeben, nach welcher die bezüglichen Fragen gelöst werden können, ohne daß hierbei zu schwierigeren mathematischen Hilfsmitteln Zuflucht genommen werden müßte.

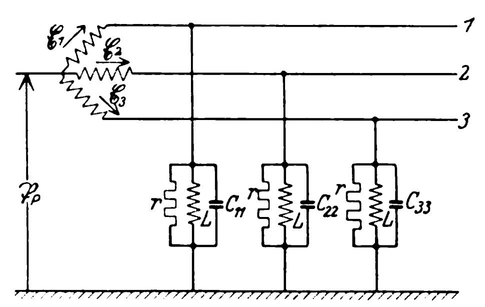


Bild 5. Netz mit Pollöscher.

b) Problemstellung.

Nach dem Vorhergesagten ist es nicht mehr schwer, eine exakte Problemstellung anzuführen; diese lautet also folgendermaßen:

Für ein gegebenes Netz ist bei bekannten Größen des angeschlossenen Pollöschers die sich jeweils einstellende Nullpunktsverlagerung zu bestimmen, wenn sich die Unsymmetrie des Netzes ändert und die verschiedene unsymmetrische Magnetisierung der einzelnen Löscherschenkel berücksichtigt wird. Es soll weiter noch gefordert werden, daß die Nullpunktsverlagerung der Größe und Richtung nach bestimmbar sein soll, wobei der Phasenwinkel und der Unsymmetriegrad auf eine der drei Phasen bezogen wird.

Wir wollen gleich jetzt vorwegnehmen, daß wir die Summe der Leitungskapazitäten gegen Erde konstant annehmen wollen, daß also einer Vergrößerung der Kapazität einer Phase gleichzeitig eine gleichwertige Verminderung der Kapazität einer oder der beiden anderen Phasen entsprechen soll. Wir erreichen dadurch einerseits eine Vereinfachung der Rechnung, andererseits eine gemeinsame Vergleichsbasis mit den Ergebnissen des Aufsatzes von Dr. Gauster über die bezüglichen Fragen beim Nullpunktslöscher.

C. Nullpunktsverlagerung in Netzen mit Pollöscher, unter Berücksichtigung der ungleichen Schenkelmagnetisierungen.

I. Ersatzschema.

Um das Problem einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, ist es erforderlich, ein Ersatzschema zu schaffen, auf welches die bekannten Regeln der Elektrotechnik angewendet werden können. Zu diesem Zwecke sind vorerst Annahmen zu machen, die bei möglichster Vereinfachung der Rechnung doch die Verhältnisse möglichst scharf umfassen. Wir wollen für die Rechnung folgende Festsetzungen treffen:



1. Die Streuung und die Kupferverluste des Löschers sind durch die außerhalb des Transformators angeordneten und in Serie geschalteten Reaktanzen $\omega L'$ und Wirkwiderstände r' dargestellt. Wieweit diese heute allgemein übliche Trennung richtig ist, kann vorerst nicht gesagt werden, doch sind wir derzeit mangels tieferer Erkenntnisse an diese Annahme gebunden.
2. Die veränderliche Induktivität des Erdschlußlöschers und die Eisenverluste sind durch die Reaktanzen ωL_p und die Wirkwiderstände r_p dargestellt.
3. Die Regeldrossel bestehe aus der Reaktanz ωL_R und dem Ohmschen Widerstand r_R.
4. Alle angeführten Größen beziehen sich, wenn nicht besonders erwähnt, auf die Phasen und werden in der allgemeinen Ableitung mit dem Zeiger n versehen, wobei n je nach der Phase, auf die es sich bezieht, die Zahlen von 1 bis 3 durchläuft. Zusammengehörige Reaktanzen ωL und Ohmsche

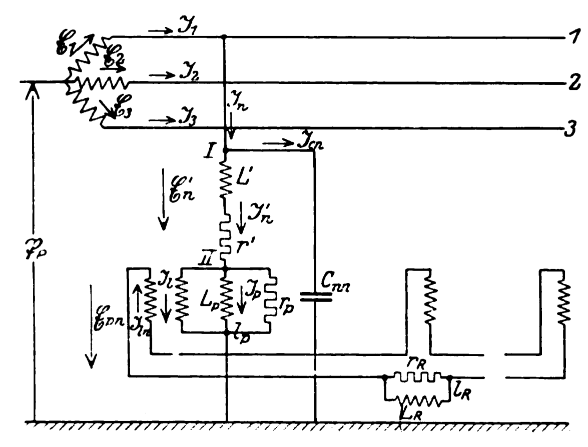


Bild 6. Genaues Ersatzschaltbild eines Netzes mit Pollöscher nach Bauch.

Widerstände r werden im folgenden fallweise zu Scheinwiderständen $\mathfrak{z}$ bzw. Leitwerten $\mathfrak{l} = \frac{1}{\mathfrak{z}}$ zusammengefaßt.

Unter diesen Annahmen kann nun das Ersatzchema Bild 6 gezeichnet werden, das auch noch die Kapazitäten C_{nn} der Leitungen gegen Erde enthält. Da sich die Anordnung in gleicher Weise für die beiden anderen Leitungen wiederholt, ist nur das Schema für eine Leitung gezeichnet; die entsprechenden Größen sind dann mit dem allgemeinen Zeiger n versehen. Zur Andeutung der dreiphasigen Anordnung ist nur der Kreis der Regeldrossel für alle drei Phasen eingetragen. Um später in der Vorzeichengebung auf keine Schwierigkeiten zu stoßen, sind ferner Richtungspfeile für die als positiv zu nehmenden Zwischenspannungen vorgemerkt. Es sind dies die eingeprägten Spannungen $\mathfrak{E}_n$ im Haupttransformator, die Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_p$ und die Spannungen am Löscher $\mathfrak{E}_{pn}$ bzw. an der Verlustimpedanz $\mathfrak{E}_n'$.

Es liegen nunmehr alle Grundlagen fest, mit deren Hilfe die Berechnung der Aufgabe vorgenommen werden kann, so daß wir an die Ableitung der Grundgleichungen schreiten wollen.

II. Ableitung der Grundgleichungen.

Aus dem Schaltbild entnehmen wir:

1. Die Summe aller zur Erde fließenden Ströme (Summe aller dem Sternpunkt des Haupttransformators entfließenden Ströme) muß gleich Null sein. Es ist also



$$\Sigma\,\mathfrak{J}_n = 0 \qquad (10)^*$$

2. Die Summe der dem Knotenpunkt I zufließenden Ströme muß gleich sein der Summe der dortselbst abfließenden Ströme, also
$$\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}_{Cn} + \mathfrak{J}_n'. \qquad (11)$$
3. Dieselbe Beziehung auf den Knotenpunkt II angewendet, ergibt:
$$\mathfrak{J}_n' = \mathfrak{J}_{pn} + \mathfrak{J}_l. \qquad (12)$$
4. Das **Kirchhof**sche Gesetz für den Kreis Sternpunkt des Haupttransformators—Phasenwicklung—Leitungskapazität—Erde—Nullpunktsspannung—Sternpunkt des Haupttransformators liefert:
$$\mathfrak{E}_n + \mathfrak{J}_{Cn}\, j\frac{1}{\omega C_{nn}} + \mathfrak{P}_P = 0. \qquad (13)$$
5. In gleicher Weise gilt für den Kreis Sternpunkt des Haupttransformators—Phasenwicklung—Primärwicklung des Löschtransformators—Erde—Nullpunktsspannung—Sternpunkt des Haupttransformators:
$$\mathfrak{E}_n + \mathfrak{J}_n'\frac{-1}{\mathfrak{l}'} + \mathfrak{J}_{pn}\frac{-1}{\mathfrak{l}_{pn}} + \mathfrak{P}_P = 0, \qquad (14)$$
worin
$$-\mathfrak{l}' = \frac{1}{-r' - j\,\omega L'}$$
bzw.
$$-\mathfrak{l}_{pn} = -\frac{1}{r_{pn}} - \frac{1}{j\,\omega L_{pn}}.$$
6. Für den Sekundärteil des Löschtransformators wird schließlich:
$$\sum \mathfrak{J}_{pn}\frac{-1}{\mathfrak{l}_{pn}} - \mathfrak{J}_l\frac{-1}{\mathfrak{l}_R} = 0, \qquad (15)$$
worin wieder
$$-\mathfrak{l}_R = -\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\,\omega L_R}.$$

Hierbei sind die Sekundärgrößen auf die Primärseite bezogen, was später in dem zu behandelnden Beispiel berücksichtigt werden muß.

Die sechs Gleichungen (10) bis (15) reichen aus, um für jedes gegebene Beispiel bei bekannter Magnetisierungslinie des Löschers eine graphische Methode zu entwickeln, die die Nullpunktsverlagerung in Abhängigkeit von der Kapazitätsunsymmetrie des Netzes darstellt.

III. Auswertung der Grundgleichungen.

a) Definition des Begriffes „Unsymmetriegrad".

Bevor wir an die Auswertung der Grundgleichungen schreiten, wollen wir noch ein Maß für die Größe der Unsymmetrie des Netzes festlegen. Wie bereits vorhin erwähnt, soll hierbei die Gesamtkapazität $\Sigma\,\omega C_{nn}$ des Netzes als konstant angenommen werden. Wäre der Sternpunkt der Anlage satt geerdet und tritt an der Phase n ein Erdschluß ein, so ist der Erdschlußstrom bekanntlich
$$\mathfrak{J}_E = \mathfrak{E}_n \Sigma\, j\,\omega C_{nn},$$
da ja der Sternpunkt gegenüber Erde um Phasenspannung verschoben ist und die Nullpunktsspannung — $\mathfrak{E}_n$ auf die drei parallelgeschalteten Leitungskapazitäten angeschlossen erscheint.

Bei gesundem Netz fließt in der Nullpunktsverbindung ein Nullstrom $\mathfrak{J}_0$, der gleich sein muß der dreifachen Nullkomponente der drei kapazitiven Phasenströme, also

* Im folgenden sollen beim Summenzeichen die Indizes n, 1 — 3 weggelassen werden, mit der Festsetzung, daß sich das leere Summenzeichen auf die Indizes 1 — 3 beziehen soll.



$$\mathfrak{J}_0 = 3 \cdot \tfrac{1}{3} \Sigma \mathfrak{E}_n j \omega C_{nn}.$$

Das Verhältnis des Nullstromes, der mit veränderlicher Kapazitätsverteilung variiert, zum Erdschlußstrom, der bei $\Sigma j \omega C_{nn} =$ Konst. eine Leitungskonstante darstellt, ist direkt ein Maß für die Kapazitätsunsymmetrie des Netzes. Bezeichnen wir diese mit „u", so wird

$$u = \frac{\mathfrak{J}_0}{\mathfrak{J}_E} = \frac{\Sigma j \omega C_{nn} \cdot \mathfrak{E}_n}{\mathfrak{E}_n \Sigma j \omega C_{nn}}.$$

Da je nach der Verteilung der Unsymmetrie der Nullstrom alle möglichen Richtungen gegenüber $\mathfrak{E}_n$ annehmen kann, ist u also eine komplexe Größe. Im vorliegenden Falle kommt es jedoch nicht auf die „Richtung" der Unsymmetrie, d. h. auf deren Aufteilung auf die drei Phasen an, sondern auf die Größe derselben. Wir können daher die einschränkende Annahme machen, daß die Verteilung der Kapazitäten so erfolgt, daß der Nullstrom stets in die Richtung von beispielsweise $\mathfrak{E}_1$ fällt. Es wird dann endgültig

$$\Sigma \omega C_{nn} \cdot \mathfrak{E}_n = u \cdot \mathfrak{E}_1 \Sigma \omega C_{nn}, \qquad (16)$$

worin also der Unsymmetriegrad u als reeller Parameter erscheint.

b) Aufstellung der beiden Hauptgleichungen.

Von den in den Grundgleichungen angeführten Größen sind nur die Widerstände und die eingeprägten Spannungen $\mathfrak{E}_n$ bekannt. Der Wert u soll für die weiteren Untersuchungen als Parameter behandelt werden, dem wahlweise die Zahlenwerte der praktisch auftretenden Unsymmetriegrade zuzuordnen sind. Bekannt ist ferner für jeden besonderen Fall der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}_{pn}$ und $\mathfrak{J}_{pn}$, der durch die Magnetisierungslinie des Löschers gegeben erscheint. Unsere Aufgabe ist also, aus den Grundgleichungen die unbekannten Größen zu eliminieren und das Resultat derart umzuformen, daß der funktionelle Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}_{pn}$ und $\mathfrak{J}_{pn}$, wie ihn die Magnetisierungslinie bringt, vorteilhaft ausgenützt werden kann.

Nach Gleichung (13) ist vorerst

$$\mathfrak{J}_{Cn} = j \omega C_{nn} (\mathfrak{E}_n + \mathfrak{P}_P),$$

woraus nach Summieren über die drei Phasen

$$\Sigma \mathfrak{J}_{Cn} = j \Sigma \omega C_{nn} \mathfrak{E}_n + j \mathfrak{P}_P \Sigma \omega C_{nn} = 3 \mathfrak{J}_{Cn_0},$$

was nach den Ausführungen des Abschnittes B I nichts anderes bedeutet als die Bildung der dreifachen Nullkomponente des Stromes $\mathfrak{J}_{Cn}$.

Mit der Beziehung (16) wird ferner

$$3 \mathfrak{J}_{Cn_0} = j \mathfrak{P}_P \Sigma \omega C_{nn} + u \cdot \mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn}. \qquad (17)$$

Besteht in den Kapazitäten der Leitung eine Unsymmetrie, so sind die Teilspannungen $\mathfrak{E}_n'$ und $\mathfrak{E}_{pn}$ in den einzelnen Phasen des Löschtransformators ungleich. Die Nullkomponenten dieser Spannungen sind also von Null verschieden. Die Mit- und Gegenkomponenten (zusammen Drehkomponenten genannt) bilden bekannlich je ein symmetrisches Dreiphasensystem, dessen Vektorsumme verschwindet. Es ist also

$$\mathfrak{E}_{n_0}' = \tfrac{1}{3} \Sigma \mathfrak{E}_n' = \tfrac{1}{3} (-r' - j \omega L') \Sigma \mathfrak{J}_n'.$$

Berücksichtigt man noch die Löschbedingung

$$\mathfrak{J}_n' = \mathfrak{J}_{Cn},$$

so wird

$$\mathfrak{E}_{n_0}' = \tfrac{1}{3} (-r' - j \omega L') \Sigma \mathfrak{J}_{Cn} = (-r' - j \omega L') \mathfrak{J}_{Cn_0},$$

was man eigentlich gleich hätte anschreiben können, unter Beachtung, daß die an die Impedanz $(-r' - j \omega L')$ angeschlossene Nullspannung $\mathfrak{E}_{n_0}'$ dortselbst einen Nullstrom $\mathfrak{J}_{Cn_0}$ hervorbringen muß.

Führt man noch Gleichung (17) ein, so wird

$$\mathfrak{E}_{n_0}' = \frac{-r' - j \omega L'}{3} j \mathfrak{P}_P \Sigma \omega C_{nn} + \frac{-r - j \omega L}{3} u \mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn}$$

oder



$$\mathfrak{E}_{n0}' = \mathfrak{P}_P \mathfrak{A} + u \mathfrak{B}, \tag{18}$$

wenn man zur Vereinfachung setzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{-r' - j\omega \mathfrak{L}'}{3} j \Sigma \omega C_{nn} \\ \mathfrak{B} &= \frac{-r - j\omega \mathfrak{L}}{3} \mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn} \end{aligned}\right\} \tag{18'}$$

In gleicher Weise erhält man

$$3\,\mathfrak{E}_{pn0} = \Sigma \mathfrak{E}_{pn} = \Sigma \frac{\mathfrak{J}_{pn}}{\mathfrak{l}_{pn}} = \frac{\mathfrak{J}_l}{\mathfrak{l}_R} = \frac{\mathfrak{J}_l}{-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}},$$

wenn Gleichung (15) beachtet wird. Da andererseits

$$\mathfrak{E}_{pn0} = -\mathfrak{P}_P - \mathfrak{E}_{n0}'$$

gesetzt werden kann, wird schließlich

$$\mathfrak{J}_l = 3\,\mathfrak{E}_{pn0}\,\mathfrak{l}_R = -3\,\mathfrak{l}_R \mathfrak{P}_P - 3\,\mathfrak{l}_R \mathfrak{E}_{n0}' =$$

$$= -3\,\mathfrak{l}_R \left[\mathfrak{P}_P + \frac{-r' - j\omega L'}{3} j \mathfrak{P}_P \Sigma \omega C_{nn} + \frac{-r - j\omega L}{3} u \mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn}\right]$$

oder

$$\mathfrak{J}_l = \mathfrak{P}_P \left(-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}\right)[-3 + (r' + j\omega L') j \Sigma \omega C_{nn}] +$$

$$+ \left(-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}\right)(r' + j\omega L') u \cdot \mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn}$$

bzw.

$$\mathfrak{J}_l = \mathfrak{P}_P \mathfrak{C} + u \mathfrak{D}, \tag{19}$$

wenn man die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \left(-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}\right)[-3 + (r' + j\omega L') j \Sigma \omega C_{nn}] = 3\left(\frac{1}{r_R} + \frac{1}{j\omega L_R}\right)(1 - \mathfrak{A}) \\ \mathfrak{D} &= \left(-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}\right)(r' + j\omega L') \mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn} = 3\left(\frac{1}{r_R} + \frac{1}{j\omega L_R}\right)\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \tag{19'}$$

einführt.

Aus den beiden Gleichungen (11) und (12) läßt sich ohne weiteres $\mathfrak{J}_n'$ eliminieren unter Erhalt von

$$\mathfrak{J}_n - \mathfrak{J}_{Cn} - \mathfrak{J}_{pn} - \mathfrak{J}_l = 0.$$

Summiert man über die drei Phasen, so wird

$$3\,\mathfrak{J}_{Cn0} + 3\,\mathfrak{J}_{pn0} + 3\,\mathfrak{J}_l = 0,$$

was sich mit Hilfe der Gleichungen (17) und (19) auch wie folgt schreiben läßt:

$$-3\,\mathfrak{J}_{pn0} = -\Sigma \mathfrak{J}_{pn} = j \mathfrak{P}_P \Sigma \omega C_{nn} + u \mathfrak{E}_1 j \Sigma C_{nn} + 3\,\mathfrak{P}_P \cdot \mathfrak{C} + 3\,u \mathfrak{D}$$

bzw.

$$\Sigma \mathfrak{J}_{pn} = \mathfrak{P}_P \cdot \mathfrak{E} + u \mathfrak{F}, \tag{20}$$

wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -j \Sigma \omega C_{nn} - 3\,\mathfrak{C} \\ \mathfrak{F} &= -\mathfrak{E}_1 j \Sigma \omega C_{nn} - 3\,\mathfrak{D} \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

Hier ist bereits $\mathfrak{P}_P$ als Funktion der $\mathfrak{J}_{pn}$ dargestellt, wobei alle übrigen unbekannten Größen entfernt erscheinen und nur mehr der Parameter u auftritt. Gleichung (20) stellt also bereits eine der gesuchten Hauptgleichungen vor. Um die zweite Hauptgleichung abzuleiten, gehen wir nochmals von der Beziehung (13) aus, die in geänderter Form, wie folgt, angeschrieben werden kann:

$$\mathfrak{E}_{pn} = \mathfrak{E}_n + \mathfrak{P}_P + \mathfrak{J}_n' \frac{-1}{\mathfrak{l}'} = \mathfrak{E}_n + \mathfrak{P}_P + (\mathfrak{J}_{pn} + \mathfrak{J}_l)(-r' - j\omega L').$$

Setzt man hierin das $\mathfrak{J}_1$ aus Gleichung (19) ein, so wird

$$\mathfrak{E}_{pn} = \mathfrak{E}_n + \mathfrak{P}_p [\mathfrak{E}(-r' - j\omega L') + 1] + (\mathfrak{J}_{pn} + u\mathfrak{D})(-r' - j\omega L')$$

oder

$$\frac{\mathfrak{E}_{pn}}{-r' - j\omega L'} - \mathfrak{J}_{pn} = \frac{\mathfrak{E}_n}{-r' - j\omega L'} + u\mathfrak{D} + \mathfrak{P}_p\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{-r' - j\omega L'}\right).$$

Damit haben wir die zweite Hauptgleichung abgeleitet, die noch in vereinfachter Form geschrieben werden kann, wie

$$\mathfrak{E}_{pn}\mathfrak{G} - \mathfrak{J}_{pn} = \mathfrak{E}_n\mathfrak{G} + u\mathfrak{D} + \mathfrak{P}_p\mathfrak{H}, \tag{21}$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \frac{1}{-r' - j\omega L'} \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{G} \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

Wir schreiben der Übersicht halber nochmals die beiden Hauptgleichungen und die Bestimmungsgleichungen an, wobei wir für letztere die für die Berechnung günstigste Form wählen wollen. Wir haben also:

$$\Sigma\mathfrak{J}_{pn} = \mathfrak{P}_p \cdot \mathfrak{E} + u\mathfrak{F}, \tag{I}$$

$$\mathfrak{E}_{pn}\mathfrak{G} - \mathfrak{J}_{pn} = \mathfrak{E}_n\mathfrak{G} + \mathfrak{P}_p\mathfrak{H} + u\mathfrak{D}, \tag{II}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \mathfrak{E}_1 j\Sigma\omega C_{nn}\left(-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}\right)(r' + j\omega L') \\ \mathfrak{E} &= \left(-\frac{1}{r_R} - \frac{1}{j\omega L_R}\right)[9 - 3(r' + j\omega L')j\Sigma\omega C_{nn}] - j\Sigma\omega C_{nn} \\ \mathfrak{F} &= -3\mathfrak{D} - \mathfrak{E}_1 j\Sigma\omega C_{nn} \\ \mathfrak{G} &= \frac{1}{-r' - j\omega L'} \\ \mathfrak{H} &= -\frac{\mathfrak{E} - j\Sigma\omega C_{nn}}{3} + \mathfrak{G} \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es, wie im nächsten Kapitel gezeigt werden soll, verhältnismäßig leicht und rasch möglich, für gewählte Werte u der Leitungsunsymmetrie die zugehörige Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_p$ graphisch zu bestimmen, wenn die Magnetisierungslinie des Löschtransformators vorliegt.

IV. Graphische Ermittlung der Nullpunktsspannung.

Man sieht schon aus dem Aufbau der beiden Hauptgleichungen den Weg, den man zur graphischen Lösung des Problemes einzuschlagen hat:

Da der funktionelle Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}_{pn}$ und $\mathfrak{J}_{pn}$ aus der Magnetisierungslinie bekannt ist, kann die linke Seite der Gleichung (II) aus einem gewählten u für jedes $\mathfrak{P}_p$ bestimmt werden. Läßt man also $\mathfrak{P}_p$ alle möglichen Werte durchlaufen, etwa dadurch, daß man ein „$\mathfrak{P}_p$-Netz" entwirft mit Kurven konstanter $|\mathfrak{P}_p|$ und konstanter $\frac{\mathfrak{P}_p}{|\mathfrak{P}_p|}$, so sind alle zugehörigen $\mathfrak{J}_{pn}$ nach Gleichung (II) bestimmbar. Man kann also die Summe $\Sigma\mathfrak{J}_{pn}$ und hiermit die linke Seite der Hauptgleichung (I) konstruieren und mit der rechten Seite zum Vergleich bringen. Zeigt sich hierbei, daß die Gleichung (I) erfüllt ist, so war die Wahl von $\mathfrak{P}_p$ richtig und es ist das gewählte $\mathfrak{P}_p$ schon die zum festgelegten Unsymmetriegrad u gehörige Nullpunksverlagerung. Im allgemeinen wird durch die Wahl des $\mathfrak{P}_p$ aber Gleichung (I) nicht erfüllt sein und man muß die Konstruktion mit anderen $\mathfrak{P}_p$ so lange fortsetzen, bis beide Seiten der Gleichung (I) identische Vektoren ergeben. Bringt man hierbei die Wahl von $\mathfrak{P}_p$, wie bereits erwähnt, in ein bestimmtes System, so erhält man für die Einzelwerte der Hauptgleichungen Kurvenscharen, in deren Schnittpunkten sich die gesuchten $\mathfrak{P}_p$-Werte zwangsläufig ergeben. Die einzelnen Kurven geben hierbei äußerst übersichtlich

Einblick in die Aufteilung der Unsymmetrie auf die einzelnen Phasen, den Einfluß der verschiedenen Magnetisierungen der einzelnen Schenkel, den Einfluß der Verluste u. a. m., dessen Beschreibung den Umfang dieser Arbeit überschreiten würden, jedenfalls aber als Ausgangspunkt zusätzlicher Untersuchungen dienen können.

Wir kehren nunmehr zu unserer Aufgabe, die graphische Ermittlung der Nullpunktsspannung durchzuführen, zurück und gehen vorerst von der Magnetisierungslinie des Löschtransformators aus. Diese ist leicht aus einem Versuch feststellbar und kann daher für unsere Zwecke als gegeben betrachtet werden. Die Magnetisierungskurve stellt in ihrer gebräuchlichen Form die Beziehung

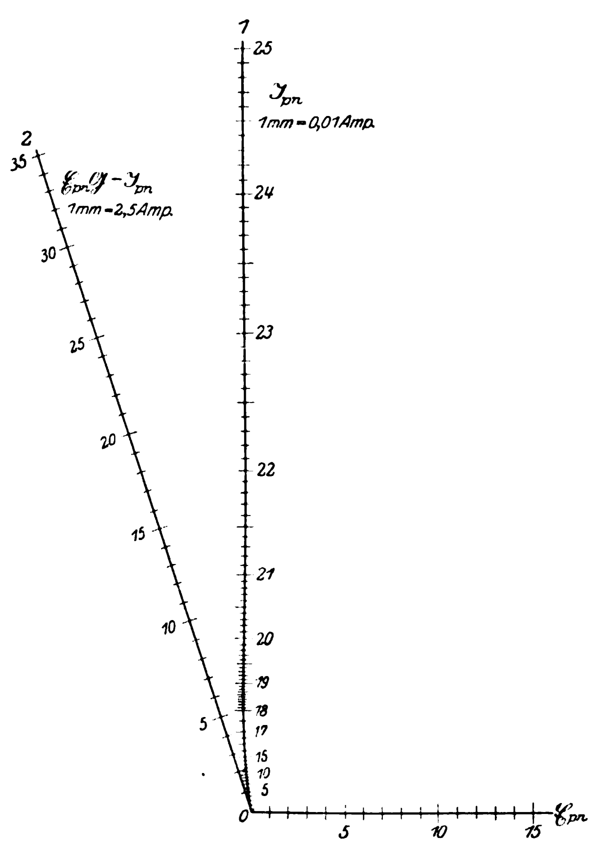


Bild 7. Vektorielle Magnetisierungslinie und Funktionsleiter für $\mathfrak{E}_{pn}\mathfrak{G} - \mathfrak{J}_{pn}$.

$$|\mathfrak{E}_p| = f(|\mathfrak{J}_p|)$$

dar. Um nun auch die vektorielle Beziehung

$$\mathfrak{E}_p = \varphi(\mathfrak{J}_p)$$

oder besser

$$\mathfrak{J}_p = \psi(\mathfrak{E}_p)$$

zu bekommen, tragen wir vorerst $\mathfrak{E}_p$ auf der positiven reellen Achse in Form einer Skala auf (Bild 7). Zu jedem einzelnen Wert von $\mathfrak{E}_p$ gehört ein bestimmter Magnetisierungsstrom $j\mathfrak{J}_m$ und ein aus den Eisenverlusten ermittelbarer Wattstrom $\mathfrak{J}_w$. Diese beiden Komponenten addieren sich jeweils zum gesuchten Vektor $\mathfrak{J}_p$, so daß der geometrische Ort der $\mathfrak{J}_p$-Vektoren für variables $|\mathfrak{E}_p|$ gezeichnet werden kann. Die so erhaltene Kurve $\mathfrak{J}_p$ (die nach E_p-Werten beziffert erscheint) stellt somit die vektorielle Magnetisierungslinie dar. Nunmehr kann unschwer die Differenz

$$\mathfrak{E}_{pn} \cdot \mathfrak{G} - \mathfrak{J}_{pn}$$

gezeichnet werden. $\mathfrak{E}_{pn}\,\mathfrak{G}$ ist eine Gerade, die nach E_{pn} beziffert und gegenüber $\mathfrak{E}_{pn}$ verdreht ist. In den einzelnen Punkten der Geraden braucht dann nur der Vektor $-\mathfrak{J}_{pn}$ addiert zu werden, um zur Kurve 2 zu kommen, die also nichts anderes darstellt als die Beziehung

$$\mathfrak{E}_{pn} \cdot \mathfrak{G} - \mathfrak{J}_{pn} = \Phi\,(\mathfrak{E}_{pn})$$

und die nach E_{pn}-Werten beziffert erscheint. Die letzte Beziehung wird zweckmäßig auf eine Oleate aufgetragen, um sie im Spannungsdiagramm entsprechend verwenden zu können.

Wir betrachten nun die rechte Seite der Gleichung (II). Das Glied $\mathfrak{E}_n\,\mathfrak{G}$ bedeutet nichts anderes, als das, um den durch den Vektor $\mathfrak{G}$ angezeigten Winkel

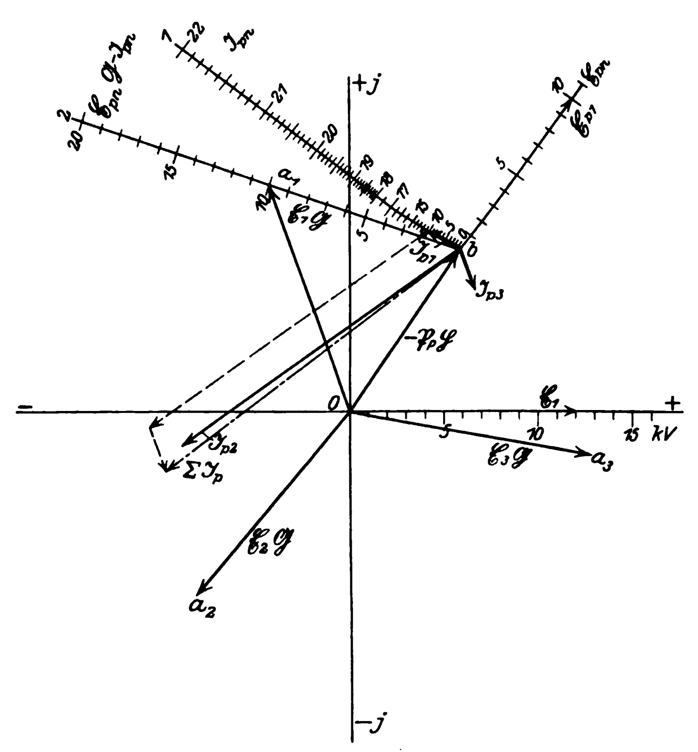


Bild 8. Ermittlung von $\Sigma\,\mathfrak{J}_{pn}$ nach der zweiten Hauptgleichung.

verdrehte und in der Größe entsprechend geänderte Spannungssystem $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$. Legt man ein für allemal $\mathfrak{E}_1$ in die positive reelle Achse, so können die drei Vektoren $\mathfrak{E}_n\,\mathfrak{G}$ festgelegt werden (Bild 8).

Der zweite Summand in Gleichung (II) ist wegen der Kleinheit von u und $\mathfrak{D}$ meist zu vernachlässigen. Ist dies nicht zulässig, so kann man an die Enden der $\mathfrak{E}_n\,\mathfrak{G}$-Vektoren noch den Vektor $u\,\mathfrak{D}$ anfügen. Wir wollen in unseren Betrachtungen diesen Summanden vernachlässigen.

Der dritte Summand der Hauptgleichung (II) enthält den unbekannten und zu bestimmenden Vektor $\mathfrak{P}_P$. Nehmen wir an, wir würden $\mathfrak{P}_P$ bereits kennen, so könnten wir den Vektor $\mathfrak{P}_P\,\mathfrak{H}$ an $\mathfrak{E}_n\,\mathfrak{G}$ anfügen, anstatt dessen wollen wir jedoch, wie es auch in Bild 8 geschehen ist, den Vektor $-\mathfrak{P}_P\,\mathfrak{H}$ vom Ursprung O aus auftragen. Der so erhaltene Punkt ist in dem Bild mit b bezeichnet. Entsprechend Gleichung (II) ist dann die Schlußlinie $\overline{ba}$, für jede Phase gleich der Differenz der linken Seite der Gleichung. Wäre also $\mathfrak{P}_P$ der Richtung und Größe nach bekannt, so liegt auch der Punkt b fest und man brauchte nur die Oleate Bild 7 derart auf das Diagramm Bild 8 zu legen, daß der Ursprung O auf den Punkt b und der Endpunkt a_n auf die

Kurve 2 zu liegen kommt. Dies ist in Bild 8 für die Phase 1 eingezeichnet. Die Bezifferung der Kurve 2 gibt dabei an, welche Spannung E_{pn} zum gewählten Wert $\mathfrak{P}_p$ gehören würde. Mit der Kenntnis des E_{pn}-Wertes kann nunmehr mittels der Kurve 1 die richtige Größe und Lage des Vektors $\mathfrak{J}_{pn}$ im Diagramm festgehalten werden.

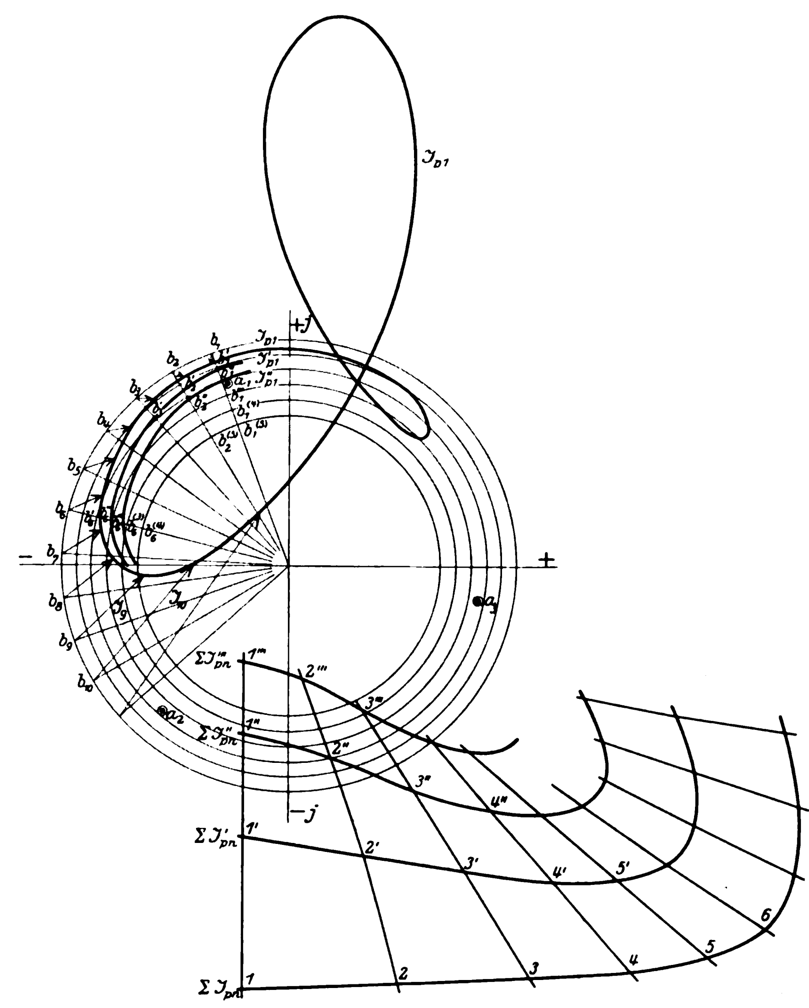


Bild 9. Ortskurven für $\mathfrak{J}_{pn}$ und $\Sigma\mathfrak{J}_{pn}$ bei veränderlicher Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_p$.

Führt man diese Konstruktion für alle drei Phasen durch, so erhält man schließlich die drei Ströme $\mathfrak{J}_{p1}$, $\mathfrak{J}_{p2}$, $\mathfrak{J}_{p3}$, die für die Weiterentwicklung nach Gleichung (I) benötigt werden.

Voraussetzung für die angeführte Konstruktion war, daß der Vektor $\mathfrak{P}_p$ bereits bekannt ist. Nun ist dem aber nicht so und es soll im Gegenteil $\mathfrak{P}_p$ ermittelt werden. Da der Beweis, ob ein richtiges $\mathfrak{P}_p$ gewählt wurde, sich erst aus der Hauptgleichung (I) ergibt, für dieselbe aber der Wert für $\Sigma\mathfrak{J}_{pn}$ benötigt wird, ist eine Lösung der Aufgabe nur derart möglich, daß man irgendein $\mathfrak{P}_p$ frei wählt, die Konstruktion nach Gleichung (II) durchführt und das Resultat mittels Gleichung (I) auf seine Richtigkeit überprüft. Um hierbei bezüglich der zu leistenden Arbeit, sowie hinsichtlich der Übersicht und Durchsichtigkeit der Verhältnisse möglichst wirtschaftlich vorzugehen, empfiehlt es sich, die zu wählenden Vektoren $\mathfrak{P}_p$ nach ganz bestimmten Regeln zu wählen. Man wählt zu diesem Zwecke am besten



ein Polarnetz (Bild 9) und ändert vorerst nur die Richtung des Vektors $\mathfrak{P}_P$, während seine Größe gleich bleiben soll. Der Punkt b beschreibt dann einen Kreis mit dem Radius $\mathfrak{P}_P$, auf welchem in hinreichend kleinen Abständen, Endpunkte $b_1, b_2 \ldots b_n$ angenommen werden, von denen aus die angeführte Konstruktion durchzuführen ist. Die Endpunkte der $\mathfrak{J}_{pn}$-Vektoren beschreiben dann in jeder Phase eine gleiche Kurve, die in Bild 9 für Phase 1 eingetragen ist.

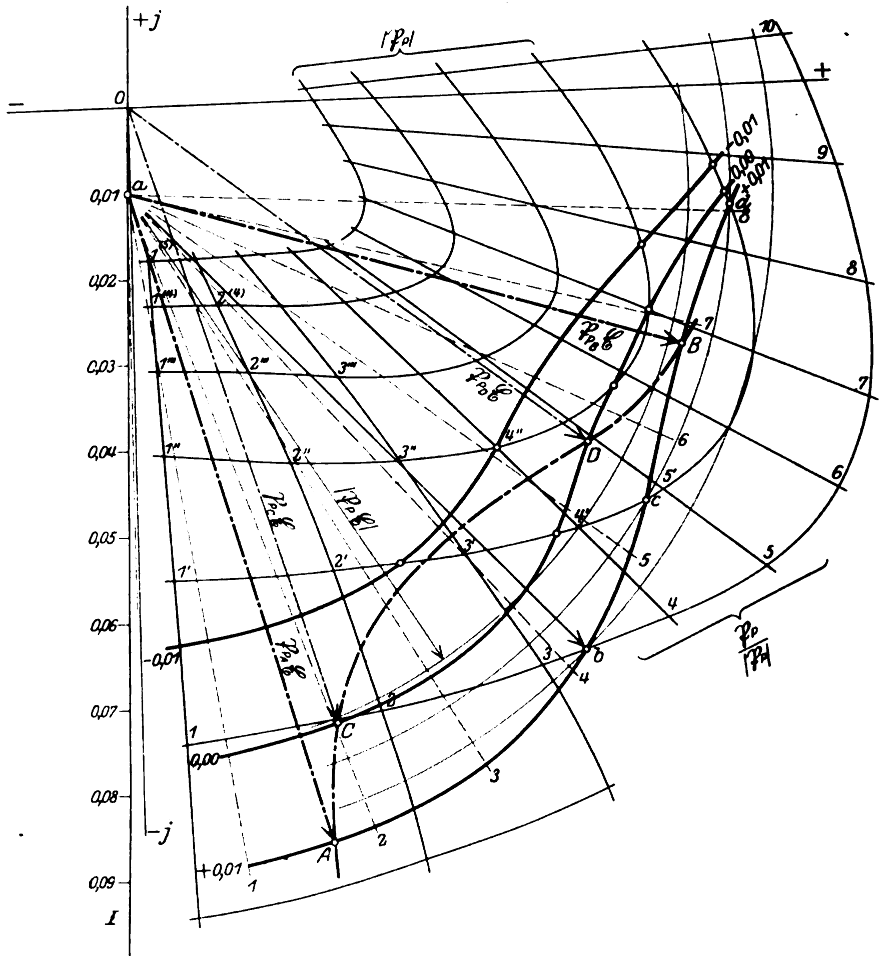


Bild 10. Bestimmung der Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_P$ aus den Kurvenscharen der ersten Hauptgleichung.

Den gleichen Vorgang wiederholt man von den Punkten

$$b_1', \; b_2' \ldots\ldots b_n'$$
$$b_1'', \; b_2'' \ldots\ldots b_n''$$
$$\vdots$$
$$b_1^{(n)}, b_2^{(n)} \ldots\ldots b_n^{(n)}$$

der übrigen $\mathfrak{P}_P$-Kreise, wobei jedoch das Vorhandensein der einen $\mathfrak{J}_{pn}$-Kurve bereits gestattet, die neuen Punkte b in größeren Abständen zu wählen, um so die zeichnerische Arbeit auf ein Mindestmaß herabzudrücken.

Man hätte natürlich statt von den Kreisen b_1, $b_2 \ldots b_n$ auszugehen, ebensogut die Auswahl der $\mathfrak{P}_P$-Vektoren nach den Geraden $b_1, b_1' \ldots b_1^{(n)}$; $b_2, b_2' \ldots b_2^{(n)}$ vornehmen können. Die dann erhaltene Kurvenschar für die $\mathfrak{J}_{pn}$ würde durch die Trajektorien zur erstangeführten Schar gebildet werden.

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich die Konstruktion dreimal symmetrisch wiederholt, so daß es genügt, diese für einen Bereich von 120° auszuführen und symmetrisch zu übertragen.

Wir wollen nunmehr die Auswertung der Hauptgleichung (I) vornehmen.

Die linke Seite der Gleichung wird durch die Summe der Ströme $\mathfrak{J}_{pn}$ gebildet, wie sie aus der bisher angegebenen Konstruktion leicht gefunden werden kann. Wir übertragen die Summenvektoren in ein neues Koordinatensystem, Bild 10, und erhalten entsprechend der Kurvenscharen der $\mathfrak{J}_{pn}$ in Bild 9 nunmehr ein krummliniges Koordinatensystem, das polar aus den $\Sigma \mathfrak{J}_{pn}$-Vektoren entstanden ist. Dabei wurden die Kurven der einen Schar dadurch erhalten, daß man $\mathfrak{P}_P$-Vektoren gleicher Größe und verschiedener Richtung annahm, während den Kurven der zweiten Schar konstant gerichtete $\mathfrak{P}_P$-Vektoren mit variabler Größe zugrunde liegen. Die eine Kurvenschar des krummlinigen Systems ist also nach $|\mathfrak{P}_P|$, die andere nach $\frac{\mathfrak{P}_P}{|\mathfrak{P}_P|}$ zu beziffern.

Die rechte Seite der Hauptgleichung (I) stellt die Summe zweier Vektoren dar, von denen der erste Summand der zu suchenden Größe $\mathfrak{P}_P$ proportional ist. Der zweite Summand ergibt für u als Parameter die in Bild 10 eingezeichnete Gerade O I, die nach u beziffert erscheint. Für ein bestimmtes u (in dem Bild $u = 0{,}01$ Punkt a) und einen gewählten Wert von $\mathfrak{P}_P$, dem im krummlinigen Koordinatensystem der Punkt b entsprechen möge, müßte also die Schlußlinie $\overline{ab}$ dem Vektor $\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}$ gleich sein, falls das vorerst noch willkürlich gewählte $\mathfrak{P}_P$ bereits einen richtigen Wert der Nullpunktsverlagerung vorstellt. Zweckmäßigerweise wird in das Aufsuchen der richtigen $\mathfrak{P}_P$ dadurch System gebracht, daß die Bedingung

$$\overline{ab} = \mathfrak{P}_P \mathfrak{E}$$

wieder in die zwei Forderungen

$$|\overline{ab}| = |\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}|$$

und

$$\frac{\overline{ab}}{|\overline{ab}|} = \frac{\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}}{|\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}|}$$

zerlegt wird.

Die erste dieser beiden Bedingungen wird dadurch erfüllt, daß man für jeden gewählten Unsymmetriewert u (in dem Bild für $u = 1\%$, Punkt a) von dem ihm entsprechenden Punkt auf der Geraden O I als Mittelpunkt Kreise mit den Radien $|\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}|$ zeichnet und mit den entsprechenden gleich bezeichneten Kurvenscharen zum Schnitt bringt. Die auf diese Weise erhaltenen Punkte b, c, d liefern eine Kurve, die am besten mit dem zugehörigen Werte von u bezeichnet wird. Jeder Punkt — z. B. b — dieser Kurve ist also der Aufpunkt eines Vektors $\overline{ab}$, dessen Größe $|\overline{ab}|$ gleich ist dem absoluten Wert des Vektors $\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}$. Um nunmehr die endgültige Richtung von $\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}$ zu finden, zeichnen wir vorteilhaft für verschiedene Lagen von $\mathfrak{P}_P$ auf eine Oleate das Strahlenbüschel $\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}$ (Bild 11) und legen diese Oleate mit dem Mittelpunkt auf den gewählten Punkt a der Geraden O I, wie dies in Bild 10 ersichtlich ist. (Das Strahlenbüschel ist hierbei zur besseren Unterscheidung von den Linien des eigentlichen Diagrammes Bild 10 strichliert gezeichnet.) Zu erwähnen ist noch, daß die Geraden der Oleate in gleicher Weise beziffert erscheinen, als die Kurven der zweiten Schar des krummlinigen Koordinatensystems, da sie ja zur Entstehung derselben Ursache bedurften, nämlich der fortschreitenden Variation der Richtung des Vektors $\mathfrak{P}_P$.

Dort, wo sich nunmehr auf der u-Kurve gleichbezeichnete Strahlen des Büschels und Kurven der zweiten Schar des krummlinigen Koordinatensystems schneiden, sind nunmehr die gesuchten Aufpunkte A, B des zu bestimmenden Vektors $\mathfrak{P}_P\,\mathfrak{E}$. Damit erscheint unsere Aufgabe insoweit gelöst, als mit den krummlinigen Koordinatenangaben nunmehr die zum gewählten Werte u der Leitungsunsymmetrie zugehörige Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_P$ der Größe und Richtung nach bestimmt ist. Man hat jetzt bloß den Vorgang für mehrere u-Werte zu wiederholen und die gefundenen $\mathfrak{P}_P$ ins Spannungsdiagramm zu übertragen. Zweckmäßigerweise wird man jedoch noch vorher die gefundenen Punkte A, B, C, D... im krummlinigen Koordinatensystem miteinander zu einer Kurve verbinden, wie es auch in Bild 10 geschehen ist. Diese $\mathfrak{P}_P\,\mathfrak{E}$-Kurve ist also unser Resultat in krummlinigen Koordinaten. Der Übertrag desselben in Polarkoordinaten, wie es in Bild 12 geschehen ist, liefert dann das Ergebnis in der üblichen Form des Spannungsdiagrammes, wobei für den Aufpunkt des Vektors der Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_P$ eine Kurve erscheint, die nach Unsymmetriewerten der Leitung beziffert ist. Jedem Werte der Unsymmetrie entsprechen dann eine oder mehrere Spannungsverlagerungen.

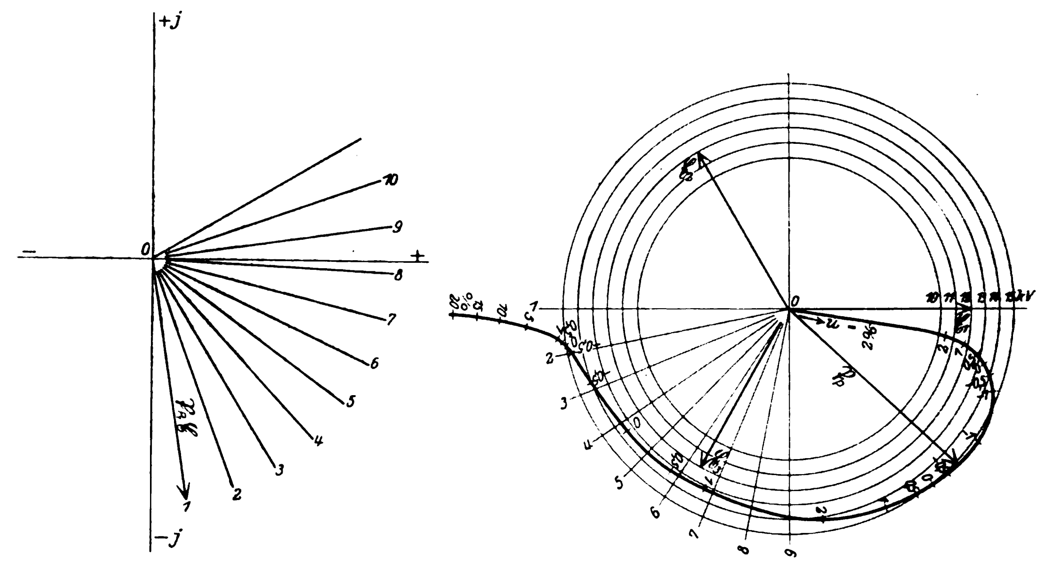


Bild 11. Hilfsoleate zu Bild 10.

Bild 12. Nullpunktsverlagerung $\mathfrak{P}_P$ als Funktion der Leitungsunsymmetrie u.

Vergleicht man die Kurve des Bildes 12 mit der entsprechenden Kurve, die Dr. Gauster für die Nullpunktsdrossel gefunden hat (Bild 8 und 10 des bereits erwähnten Aufsatzes), so ersieht man sofort die weitgehende Übereinstimmung, die zwischen den beiden Erdschlußlöschern besteht. Man erkennt vor allem, daß auch beim Pollöscher für kleine Unsymmetriewerte mehrere Lösungen für die Nullpunktsverlagerungen auftreten. Inwieweit diese einzelnen Werte stabilen oder labilen Charakter aufweisen, müßte gesondert untersucht werden. Darauf hier einzugehen, würde den geplanten Umfang vorliegender Arbeit überschreiten. Es kann jedoch jetzt schon gesagt werden, daß mit Rücksicht auf die Übereinstimmung zwischen Pol- und Nullpunktslöscher, die bei jenem gewonnenen Erkenntnisse übernommen werden können, daß also vor allem ein gefährliches „Kippen" nicht zu befürchten ist.

D. Durchrechnung eines praktischen Beispieles.

Die angeführte Konstruktion gestattet nur die Auffindung der Spannungsverlagerungskurve für ein bestimmtes, vorliegendes Beispiel. Dabei ist vorerst die

Gesamtkapazität der Leitung konstant angenommen. Ändert sich diese, etwa infolge von Zu- und Abschaltung einzelner Leiterzweige, so kann die Konstruktion für die neuen Verhältnisse nochmals durchgeführt werden. Man braucht nur die Koeffizienten der Hauptgleichungen nach den Gleichungen (III) mit dem neuen Wert der Gesamtkapazität umzurechnen. Hierbei zeigt sich, daß der Einfluß einer Änderung der Gesamtkapazität auf den Koeffizienten $\mathfrak{C}$ und damit $\mathfrak{H}$ vernachlässigbar klein ist. Das also einmal entworfene Kurvensystem, Bild 10, kann unverändert beibehalten werden. Zu ändern ist nur die u-Gerade O I und das Vektorbüschel $\mathfrak{P}_P \mathfrak{E}$.

Eine ganz allgemeine Lösung des Problems ist der Kompliziertheit und Unübersichtlichkeit der Lösung nicht anzuempfehlen, namentlich da das prinzipielle Verhalten der Pollöscher bei einer vorhandenen Leitungsunsymmetrie aus dem angeführten Beispiel genügend deutlich hervorgeht und für jeden sich ergebenden Sonderfall die Ermittlung der Spannungsverlagerungskurve vergleichsweise schnell erfolgen kann.

Als Beispiel sei ein Löschtransformator von 327 kVA-Leistung bei einer verketteten Spannung von 21 kV gewählt. Die zu speisende Leitung besitzt eine Gesamtkapazität von $\Sigma \omega C_{nn} = 0{,}00222$ Mho. Sind weiters

der Wirkwiderstand des Löschtransformators	$r' = 24{,}63$ Ohm,
der Wirkwiderstand der Regeldrossel	$r_R = 127\,400$ Ohm,
der Blindwiderstand des Löschtransformators	$\omega L' = 71$ Ohm und
der Blindwiderstand der Regeldrossel	$\omega L_R = 3860$ Ohm,

wobei alle Größen auf die Oberspannungsseite bezogen sind, so wird nach den Gleichungen (III)

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{-24{,}6 - j\,71} = 0{,}00436 + j\,0{,}0125,$$

$$\mathfrak{C} = (-0{,}00000787 + j\,0{,}000259)\,[-3 + (24{,}6 + j\,71)\,j\,0{,}00222] = 0{,}00001 - j\,0{,}0007874,$$

$$\mathfrak{D} = \frac{-21\,000}{\sqrt{3}}\,j\,0{,}00222\,(0{,}00000787 + j\,0{,}000259)\,(24{,}6 + j\,71) = 0{,}187 + j\,0{,}49,$$

$$\mathfrak{E} = -0{,}0000321 + j\,0{,}00236 - j\,0{,}00222 = -0{,}000032 + j\,0{,}00014,$$

$$\mathfrak{F} = -0{,}561 - j\,1{,}47 - j\,\frac{21\,000}{\sqrt{3}}\,0{,}00222 = -0{,}561 - j\,28{,}47,$$

$$\mathfrak{H} = -0{,}00435 + j\,0{,}01171.$$

Mit diesen Konstanten sind bereits die Diagramme der vorhergehenden Abschnitte gezeichnet. Führt man die dort beschriebenen Konstruktionen für mehrere u-Werte durch und vervollständigt man vor allem das Diagramm des Bildes 10, indem man es für den vollen Winkel von 360^0 entwirft[1], so erhält man schließlich das bereits erwähnte Spannungsbild 12, das also als Ergebnis für das gewählte Beispiel anzusehen ist.

[1] Um die Bilder für den laufenden und beschreibenden Text nicht zu unübersichtlich werden zu lassen, sind jeweils nur die wichtigeren Ausschnitte aus den Diagrammen gebracht worden; das vollständige Diagramm eignet sich, wegen der großen Liniendichte, nicht zur Vervielfältigung im kleinen Format.

Über die induktive Heizung.

Von

M. Strutt in Eindhoven (Holland).

In einer früheren Arbeit[1] sind die theoretischen Grundlagen der induktiven Heizung mittels hochfrequenter Ströme in eisenlosen Induktionsöfen dargelegt.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die Theorie nach verschiedenen Richtungen hin zu erweitern und ihre Ergebnisse mit experimentellen Resultaten zu vergleichen. Aus diesen Betrachtungen werden sich einige Gesichtspunkte ergeben, die für die Vorausberechnung und Konstruktion hochfrequenter Induktionsöfen Nutzen haben. Es soll zum Schluß versucht werden, diese Gesichtspunkte zu einer Berechnungsvorschrift zusammenzufassen, die erlaubt, einen Induktionsofen etwa mit derselben Sicherheit vorauszuberechnen und zu konstruieren, wie man es in der Elektrotechnik für andere Vorrichtungen wie Transformatoren und Dynamomaschinen bereits längst zu tun gewohnt ist.

I. Zusammenfassung der Theorie.

Die Dimensionsbezeichnungen des Induktionsofens sind dem Bild 1 zu entnehmen.

Für die in dem zu heizenden zylindrischen Körper, der weiterhin kurz mit „Kern" bezeichnet wird, dissipierte Joulesche Wärme ergibt sich bei Verwendung praktischer Einheiten (Volt, Ohm, Ampere) der Wert:

$$Q = \pi \cdot L \cdot \varrho_1 \cdot w^2 \cdot I^2 \cdot \alpha \cdot a \cdot \frac{\operatorname{ber} \alpha a \cdot \operatorname{ber}' \alpha a + \operatorname{bei} \alpha a \cdot \operatorname{bei}' \alpha a}{\operatorname{ber}^2 \alpha a + \operatorname{bei}^2 \alpha a}. \qquad (1)$$

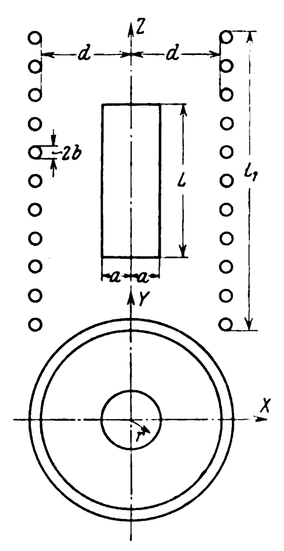


Bild 1. Dimensionen des Induktionsofens.

Hierbei ist:

ϱ_1 = spezifischer Widerstand des Kernmaterials in $\Omega \cdot$cm,

w = Windungszahl pro cm der Heizspule,

$$\alpha^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega \cdot 10^{-9}}{\varrho_1},$$

μ = Permeabilität des Kernmaterials,

ω = Kreisfrequenz des Heizstromes,

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I$ = effektive Stromstärke in der Heizspule.

Mit $\operatorname{ber} \alpha a$ und $\operatorname{bei} \alpha a$ sind bezeichnet worden der reelle und der imaginäre Teil der Besselschen Funktion erster Art nullter Ordnung $J_0(\alpha a \sqrt{-i})$, mit dem komplexen Argument $\alpha a \sqrt{-i}$, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist. Die Akzente bezeichnen die Ableitung nach αa.*

Der Verlauf der Funktion

$$\Phi(\alpha a) = \alpha a \cdot \frac{\operatorname{ber} \alpha a \cdot \operatorname{ber}' \alpha a + \operatorname{bei} \alpha a \cdot \operatorname{bei}' \alpha a}{\operatorname{ber}^2 \alpha a + \operatorname{bei}^2 \alpha a}$$

ist im Bild 2 gezeichnet worden. Für große Werte von αa geht Φ in eine Gerade über. Man kann dann die Besselschen Funktionen durch ihre asymptotischen Werte[2] ersetzen und erhält:

[1] Ann. d. Phys., 82, S. 605, 1927.

* Eine Tafel dieser Funktionen: Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 146; oder besser: Journ. Am. Inst. El. Eng., 1923, S. 830.

[2] Jahnke-Emde, Tafeln, S. 101.

$$Q = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L \cdot \varrho_I \cdot w^2 \cdot I^2 \cdot \alpha\, a. \qquad (1')$$

Der Energiebedarf der Heizspule beträgt:

$$W = \frac{1}{2} R_0 \cdot \psi(\beta) \cdot I^2, \qquad 2)$$

mit

R_0 = Gleichstromwiderstand der Heizspule,

$$\beta^2 = (2 \cdot \pi \cdot b)^2 \cdot \frac{2 \cdot \omega \cdot 10^{-9}}{\varrho_{II}},$$

b = Halbmesser des Spulendrahtes in cm,

ϱ_{II} = spez. Widerstand des Drahtmaterials in $\Omega \cdot$ cm

und

$$\psi(\beta) = 0{,}58 \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta + \sin\beta}{\mathfrak{Cof}\,\beta - \cos\beta} + 0{,}42.$$

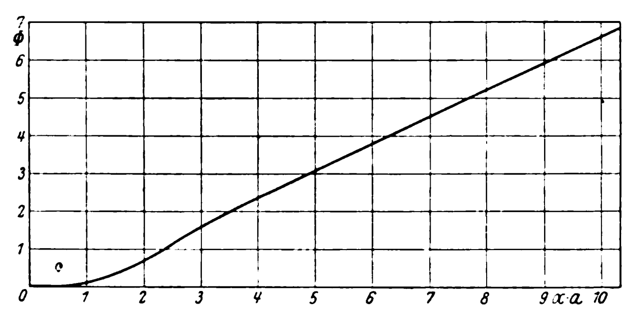


Bild 2. Dissipierte Wärme im Kern als Funktion von Wechselstrom-Konstante mal Kernhalbmesser.

Für hohe Frequenzen und somit für große Werte von β erhält man

$$W = 0{,}58 \cdot \frac{\beta}{4} \cdot R_0 \cdot I^2. \qquad (2')$$

Der Nutzeffekt der Heizvorrichtung beträgt nach dem Vorhergehenden:

$$\eta = \frac{Q}{Q + W} = \frac{1}{1 + C \cdot \frac{\psi}{\Phi}}. \qquad (3)$$

mit

$$C = \frac{R_0}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot w^2 \cdot \varrho_I}.$$

Für hohe Frequenzen nähert sich der Wirkungsgrad mit steigender Frequenz asymptotisch einem Endwert, der beträgt

$$\eta_{(\omega \to \infty)} = \frac{1}{1 + 0{,}33 \cdot \frac{R_0 \cdot b}{2 \cdot a \cdot L \cdot w^2 \cdot \sqrt{\varrho_I \cdot \varrho_{II} \cdot \mu}}}. \qquad (3')$$

Für einen bestimmten Fall:

$w = 2{,}64$ [cm^{-1}], $\quad 2\,b = 0{,}363$ [cm],

$\mu = 1$,

$\varrho_I = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ [$\Omega \cdot$ cm], $\quad L = 7{,}9$ [cm],

$a = 5$ [cm], $\quad L_1 = 8$ [cm],

$R_0 = 17{,}4 \cdot 10^{-3}$ [Ω], $\quad d = 7{,}5$ [cm].

ist die Kurve $\eta = f(\sqrt{\omega})$ im Bild 3 gezeichnet. Man sieht, daß η bis zu einer „Schwelle“ schnell und dann nur noch sehr langsam ansteigt mit wachsender Frequenz. Wir werden später einfache Kriterien dafür angeben, ob eine gewisse Frequenz so gewählt worden ist, daß η über dieser Schwelle liegt.

Mit den vorhergehenden Formeln ist das Verhalten der Heizvorrichtung im wesentlichen beschrieben. Sie reichen, wie wir zeigen werden, zur Erklärung sämtlicher Eigenschaften des Ofens aus, mit einer einzigen Ausnahme. Diese Ausnahme besteht in einer Eigenschaft, die herrührt von der Inhomogenität des Spulenfeldes. Diese Inhomogenität ist in den obigen Formeln nicht ausgedrückt.

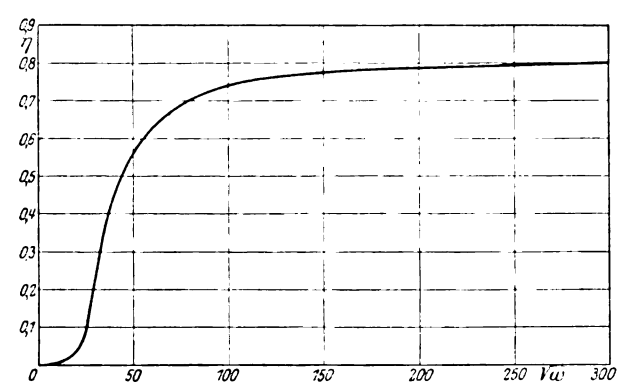
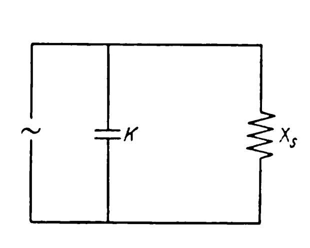


Bild 3. Der Ofenwirkungsgrad als Funktion der Wurzel aus der Kreisfrequenz.

Es ist das Verdienst von G. Ribaud in Straßburg, daß er, bevor eine quantitative Theorie existierte durch Experimente und einfache Überlegungen[1] in jahrelanger Arbeit viele Eigenschaften der hochfrequenten Induktionsöfen aufgedeckt hat. Wir verweisen als Literatur zum unten Folgenden nach der oben zitierten Zusammenfassung.

II. Allgemeine Eigenschaften des Ofens.

Für hohe Frequenzen und somit große Werte von αa ersieht man aus Gleichung (1'), daß die dissipierte nützliche Leistung proportional ist dem Quadrate



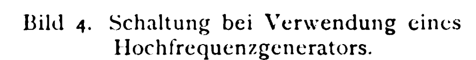


Bild 4. Schaltung bei Verwendung eines Hochfrequenzgenerators.

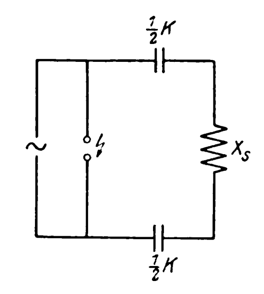


Bild 5. Schaltung bei Verwendung einer Funkenbrücke.

der effektiven Amperewindungszahl, proportional dem Kerndurchmesser, der Wurzel aus der Frequenz und der Wurzel aus dem spezifischen Widerstand des Kernmaterials.

Bei Benutzung eines Hochfrequenzgenerators oder einer Funkenbrücke als Stromquelle ist es klar, daß es in jedem Falle einen bestimmten Kapazitätswert

[1] P. Lebeau, Fours électriques, S. 357 ff., 1925 (verfaßt von G. Ribaud). — S. a. Journal de Physique et le Radium, 1926, S. 253.

gibt, der vor oder parallel zu dem Ofen geschaltet einen maximalen Wirkungsgrad ergibt. Es ist eben jene Kapazität, die in jedem Augenblick den Blindstromverbrauch des Ofens liefert, mit anderen Worten den Ofenkreis auf die Generatorfrequenz abstimmt. Die Größe dieser Kapazität läßt sich aus einer früher[1] abgeleiteten Formel berechnen. Sie beträgt in der Schaltung von Bild 4 für den Fall, daß ein Hochfrequenzgenerator als Stromquelle benutzt wird[2], oder in der Schaltung von Bild 5 für den Fall, daß eine Funkenbrücke Verwendung findet

$$K = \frac{1}{\omega \cdot X_S} \text{ [Farad]}. \tag{4}$$

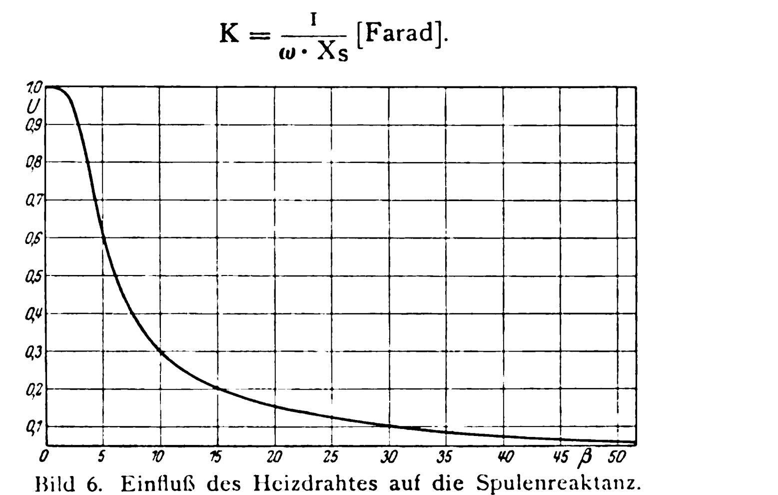


Bild 6. Einfluß des Heizdrahtes auf die Spulenreaktanz.

Mit X_S ist die gesamte Ofenreaktanz bezeichnet. Sie beträgt:

$$X_S = \vartheta \cdot (L_1 \cdot d^2 - L \cdot a^2) \cdot w^2 \cdot \omega \cdot \left[1 + \frac{4\,b}{3\,d} \cdot U(\beta)\right] + X_h. \tag{5}$$

Um X_S in Ohm zu erhalten, muß man der Maßsystemkonstanten ϑ den Wert $4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-9}$ zukennen.

Der Verlauf der Funktion $U(\beta)$ ist in Bild 6 gezeichnet worden. Die Kernreaktanz X_h hat den Wert (in Ohm):

$$X_h = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \varrho_1 \cdot w^2 \cdot P(\alpha a). \tag{6}$$

Der Verlauf der Funktion $P(\alpha a)$ ist dem Bild 7 zu entnehmen.

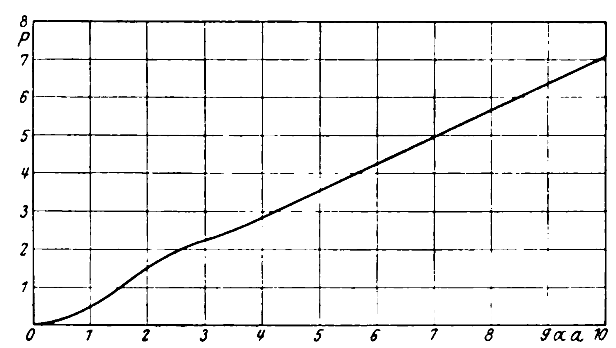


Bild 7. Die Kernreaktanz als Funktion der Wechselstromkonstante mal Kernhalbmesser.

Verwendet man als Stromquelle einen Röhrengenerator, so ist der Leistungsfaktor der Heizvorrichtung von selbst gleich eins, da der Ofenkreis zugleich den Schwingungskreis bildet. In diesem Falle können die obigen Formeln (4), (5) und (6)

[1] Ann. d. Phys., l. c. a., S. 614.

[2] W. Fischer, Zeitschr. techn. Phys., 1926, S. 513. — F. Wever, Stahl und Eisen, 46, S. 533, 1926.

dazu dienen, die Schwingungsfrequenz des Ofenkreises vorauszuberechnen, bzw. die Kapazität K derart zu bemessen, bei festgelegten Ofenabmessungen, daß die Frequenz eine günstige wird. Es soll darauf hingewiesen werden, daß für die Materialkonstanten ϱ_I, ϱ_{II} und μ in die Formeln (5) und (6) die Werte im Betriebszustande (heiß) einzusetzen sind.

Es möge hier noch eine Bemerkung Platz greifen über die Temperatur im Kern. Man möchte geneigt sein, a priori zu glauben, daß die Temperatur an der Oberfläche eine andere und zwar höhere ist als im Innern wegen des Skineffektes. Indessen zeigt eine mathematische Untersuchung[1], daß bei hohen Frequenzen die Temperaturverteilung nicht wesentlich von der gleichmäßigen Verteilung abweicht. Der Temperatureffekt wird demnach die durch obige Formeln dargestellten Verhältnisse nicht nennenswert beeinflussen.

III.[2] Der Wirkungsgrad als Funktion von ϱ_I.

Ribaud hat bemerkt, daß für einen gegebenen Kernhalbmesser a und eine feste Frequenz ein Wert des spezifischen Widerstandes ϱ_I des Kernmaterials existiert, für den die dissipierte Leistung ein Maximum wird.

Um diesen Wert von ϱ_I zu ermitteln, schreiben wir die Formel (1) ein wenig anders:

$$Q = \sigma \cdot L \cdot I^2 \cdot w^2 \cdot [\omega \cdot \mu \cdot a^2] \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\operatorname{ber} x \cdot \operatorname{ber}' x + \operatorname{bei} x \cdot \operatorname{bei}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}, \qquad (1'')$$

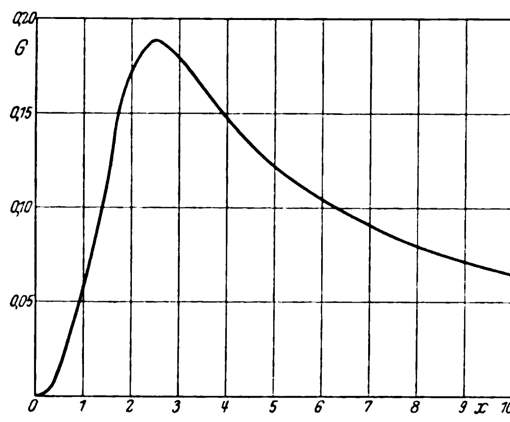


Bild 8. Zur Ermittlung des günstigsten spez. Widerstandes des Kernmaterials für maximale Kerndissipation.

wobei

σ = Maßsystemkonstante,

$x = \alpha a$.

Im Bild (8) ist der Verlauf der Funktion

$$G(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\operatorname{ber} x \cdot \operatorname{ber}' x + \operatorname{bei} x \cdot \operatorname{bei}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}$$

gezeichnet worden. G erreicht ein Maximum für $x = 2{,}5$. Achtet man auf die Bedeutung von x, so ergibt sich, daß der Wert des spezifischen Widerstandes, für den die dissipierte Leistung und somit der Wirkungsgrad ein Maximum wird, lautet:

$$\varrho_{I\,(m)} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega \cdot a^2 \cdot 10^{-9}}{2{,}5^2} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \qquad (7)$$

Die bei diesem ϱ_I dissipierte Kernleistung wird

$$Q_{\text{opt.}} = \sigma \cdot L \cdot I^2 \cdot w^2 \cdot [\omega \cdot \mu \cdot a^2] \cdot 2{,}5. \qquad (8)$$

Um Q in Watts zu erhalten, muß man der Maßsystemkonstanten σ den Wert $4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-9}$ zuerkennen.

Wir bemerken noch, daß man den Wert x, für den G ein Maximum wird, genauer erhält, wenn man die erste Ableitung von G nach x gleich Null setzt. Es ergibt sich dann die Gleichung

[1] M. Strutt, Dissertation Delft, 1927, S. 59.

[2] Die wesentlichen Ergebnisse der Abschnitte III und IV sind bereits früher erhalten worden von W. Fischer und F. Wever, Mitteil. d. Kaiser Wilhelm-Inst. f. Eisenforschung, Bd. 8, S. 149.

$$- 2 \cdot [\mathrm{ber}\, x \cdot \mathrm{ber}' x + \mathrm{bei}\, x \cdot \mathrm{bei}' x]^2 + [\mathrm{ber}^2 x + \mathrm{bei}^2 x] \cdot$$
$$\cdot \left[(\mathrm{ber}' x)^2 + (\mathrm{bei}' x)^2 - \frac{1}{x}\,\mathrm{ber}\, x \cdot \mathrm{ber}' x - \frac{1}{x}\,\mathrm{bei}\, x\, \mathrm{bei}' x\right] -$$
$$- \frac{1}{x}[\mathrm{ber}^2 x + \mathrm{bei}^2 x] \cdot [\mathrm{ber}\, x \cdot \mathrm{ber}' x + \mathrm{bei}\, x \cdot \mathrm{bei}' x] = 0.$$

Man erhält als Wurzelwert $x = 2{,}514$.

Aus der Gleichung (7) geht hervor, daß $\varrho_{1(m)}$ proportional der Frequenz ist. Ribaud hat nun Kurven angegeben[1] für die dissipierte Leistung Q, dividiert durch $I^2 \cdot w^2$, als Funktion von $\sqrt{\varrho}$. Wie aus seinem Text hervorgeht, beziehen sich die verschiedenen Kurven auf Öfen von einigen Zentimetern Durchmesser. Aus den obigen Formeln ist aber ersichtlich, daß es keinen Sinn hat, solche Kurven mit quantitativen Abszissenwerten zu zeichnen ohne genaue Angabe des Kerndurchmessers a, da sich $\frac{Q}{w^2 I^2}$ proportional zu a^2 ändert und $\varrho_{1(m)}$ ebenfalls proportional zu a^2 ist. Sollten die Ribaudschen Kurven sich auf einen und denselben Ofen beziehen, was naheliegt, so sind sie im Zusammenhang betrachtet falsch. Man findet z. B. aus diesen Kurven für:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 10^4: \qquad \sqrt{\varrho_{1(m)}} = 1150\,[\mathrm{EME}],$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = 12 \cdot 10^4: \qquad \sqrt{\varrho_{1(m)}} = 1450\,[\mathrm{EME}].$$

Ist der erste Wert richtig, was abhängt vom verwendeten a, so muß der zweite lauten:

$$\text{für} \quad \frac{\omega}{2\pi} = 12 \cdot 10^4: \qquad \sqrt{\varrho_{1(m)}} = 3980\,[\mathrm{EME}].$$

Ähnliches läßt sich von sämtlichen Kurven nachweisen. Sie geben eben bloß qualitativ die Tatsachen wieder, sind quantitativ aber nicht verwendbar.

Leider sind Ribauds Kurven weiter in der Literatur übernommen worden[2].

Für kleine ϱ_1, also für große x, wird G proportional zu $\frac{1}{x}$, also proportional zu $\sqrt{\varrho_1}$. Zu diesen kleinen Werten muß man alle Werte der Metalle rechnen mit Ausnahme der sehr schlecht leitenden, wie Hg, sobald nur die verwendete Frequenz hoch genug ist.

Aus Ribauds kalorimetrischen Messungen geht auch experimentell hervor, daß bei guten Leitern, wie Kupfer und Messing, und genügend hohen Frequenzen die dissipierte Kernleistung proportional zu $\sqrt{\varrho_1}$ ist. Mangels einer bestimmten Frequenzangabe lassen sich diese Messungen leider nicht dazu benutzen, etwa die Formel (1) experimentell zu kontrollieren.

Endlich kann man noch auf folgendes schließen. Wir können bei der Vorausberechnung des Wirkungsgrades stets die ϱ_1 für kaltes Material einsetzen. Denn mit steigender Temperatur und also größerem ϱ_1 wird der Wirkungsgrad nur besser, da Q steigt.

IV. Der Wirkungsgrad als Funktion des Halbmessers der Kernstücke.

Wie Ribaud bemerkt, nimmt bei Aufteilung des Kernes der Wirkungsgrad zu. Setzt man etwa den Kern aus einem Bündel von unter sich gleichen Zylindern

[1] Fours électriques, S. 358.
[2] C. Müller im Handbuch der Physik von Geiger u. Scheel, Bd. XI, S. 410.

zusammen, so läßt sich ein Halbmesser der kleinen Zylinder ermitteln, für den der Wirkungsgrad am günstigsten wird. Wir können dies folgendermaßen einsehen[1]

Setzt man den ganzen Kernquerschnitt gleich A, die Zahl der zylindrischen Kernstäbe gleich N, so wird für großes N:

$$A = N \cdot \pi \cdot a^2,$$

sofern man mit a den Halbmesser jedes Kernstabes bezeichnet. Die Formel (1) schreibt sich somit:

$$Q = \pi \cdot L \cdot l^2 \cdot w^2 \cdot \varrho_1 \cdot \alpha \cdot \frac{A}{N \cdot \pi \cdot a} \cdot N \cdot \frac{\operatorname{ber} \alpha a \cdot \operatorname{ber}' \alpha a + \operatorname{bei} \alpha a \cdot \operatorname{bei}' \alpha a}{\operatorname{ber}^2 \alpha a + \operatorname{bei}^2 \alpha a}.$$

Wie aus den Überlegungen im Abschnitt III hervorgeht, wird Q als Funktion von a betrachtet am größten für

$$\alpha a = 2{,}5$$

oder für:

$$a_m = 2{,}5 \cdot \left[\frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega \cdot 10^{-9}}{\varrho_1}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Für $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^4$ und Kupfer $[\varrho_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\,\Omega \cdot \mathrm{cm}]$ ergibt sich:

$$a_m = 0{,}52\ \mathrm{mm}.$$

Ribaud gibt für diesen Fall $2 a_m \sim 0{,}6$ mm. Für die gleiche Frequenz und Blei $[\varrho_1 = 2{,}1 \cdot 10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{cm}]$ erhält man:

$$a_m = 1{,}82\ \mathrm{mm},$$

während Ribaud $2 a_m \sim 2$ mm angibt.

Die Werte Ribauds sind erhalten aus einer einfachen Überlegung[2], deren Gültigkeit bei so kleinen αa nicht mehr quantitativ ist. Die Größenordnung stimmt aber mit unseren Werten überein.

V. Der Wirkungsgrad als Funktion des Halbmessers eines massiven Kernes.

Die Abhängigkeit des Nutzeffektes vom Kernhalbmesser a wird gegeben durch die Gleichung (3). Die Kurve $\eta = f(a)$ steigt für kleine a annähernd quadratisch, für große a dagegen linear an, wie unmittelbar aus der Gleichung (1) und aus dem Bild 2 für Φ hervorgeht. In Ribauds experimentellen Kurven ist der hier genannte Verlauf von $\eta = f(a)$ deutlich zu verfolgen. Für sehr große Werte von a hört der lineare Anstieg der Funktion $\eta = f(a)$ auf und nähert sich der Wirkungsgrad asymptotisch dem Wert eins. Da aber praktisch die Werte von a beschränkt sind durch die Ofenweite, tritt dieser asymptotische Teil der Kurve in experimentellen Aufnahmen nicht auf.

Aus unseren früheren Überlegungen geht ohne weiteres hervor, daß die Kurven $\eta = f(a)$ für einen festen Wert von a höher liegen, wenn sie zu einem schlechteren Leiter gehören, wie Ribauds experimentelle Kurven zeigen. Man kann sogar voraus sagen, daß die Kurven, welche zu sehr schlechten Leitern gehören, wieder niedriger fallen werden, da die dissipierte Kernleistung als Funktion von ϱ_1 zuerst ansteigt, ein Maximum erreicht und dann wieder herabsinkt bei zunehmendem ϱ_1.

Die Kurven $\eta = f(a)$ liegen höher für höhere Kerne, also größeres L, unter sonst gleichen Umständen, da für größere L der Faktor C in der Formel (3) kleiner und somit η größer ist. Dies ist auch an Ribauds Kurven zu sehen.

VI. Der Wirkungsgrad als Funktion der Kern- und der Ofenhöhe.

Die experimentellen Kurven des Wirkungsgrades als Funktion der Kernhöhe zeigen Sättigungscharakter. Dieses geht unmittelbar aus der Gleichung (3) hervor, da η für $L = 0$ verschwindet und für $L \to \infty$ asymptotisch den Wert (eins) erreicht.

---

[1] Diese Überlegungen sind wesentlich verschieden von denjenigen J. J. Thomsons, Recent Researches, p. 321.

[2] Journal de Physique et le Radium, 1923, S. 192.

Will man mit einer vorgegebenen Heizspule einen möglichst hohen Wirkungsgrad erreichen, so wird man, wie aus der vorangegangenen Bemerkung ersichtlich, die Kernhöhe möglichst groß, d. h. gleich der Ofenhöhe wählen.

Wünscht man dagegen in einem vorgegebenen Volumen möglichst viel Energie zu dissipieren, so läßt sich, wie Ribaud experimentell gezeigt hat, eine Ofenhöhe ermitteln, die einem maximalen Wirkungsgrad entspricht. Es ist dies eine Erscheinung, die wir mit Hilfe der obigen Theorie nicht formelmäßig erfassen können. Sie findet ihre Erklärung in der Unhomogenität des Ofenfeldes.

Bei steigender Ofenhöhe wird das magnetische Feld um den Kern herum homogener, steigt also die dissipierte Kernleistung. Zugleich nimmt aber der Spulenwiderstand zu, wodurch der Wirkungsgrad wieder nachteilig beeinflußt wird. Nach Überschreiten eines kritischen Wertes nimmt der Spulenwiderstand rascher zu als die dissipierte Kernleistung, sinkt also der Wirkungsgrad.

Wir verzichten darauf, die Unhomogenität des Spulenfeldes und die dadurch geänderte Nutzleistung in Rechnung zu bringen.

Man wird die Heizspule stets etwas länger, etwa 1,5 bis 2mal so lang als den Kern, wählen.

VII. Der Wirkungsgrad als Funktion des Heizdrahthalbmessers.

Zunächst muß man bemerken, daß in der Praxis ein hohler, wassergekühlter Heizdraht benutzt wird. Unsere Formeln beziehen sich aber auf einen massiven Heizdraht.

Hierzu läßt sich folgendes sagen: Für starke Stromverdrängung (hohe Frequenz) verlaufen die Kurven für den Wechselstromwiderstand in sämtlichen bis jetzt theoretisch und experimentell untersuchten Fällen von Skineffekt als Funktion der Wurzel aus der Frequenz gradlinig. Nur die Neigung dieser Geraden ist in den einzelnen Fällen verschieden.

In Wirklichkeit ist unsere Formel (2) eine Näherung und zwar in zweifacher Beziehung. Zunächst wurde die Funktion $\psi(\beta)$ für runde Spulendrähte aus der Funktion für rechteckige Spulendrähte durch Multiplikation mit 0,58 unter Hinzufügen einer additiven Konstanten 0,42 erhalten. Diese Näherung wurde bereits von A. Sommerfeld auf Grund von experimentellen Ergebnissen vorgeschlagen. Zweitens aber haben wir ständig den Einfluß des Kernes auf die Stromverteilung in der Heizspule vernachlässigt. Dieser Einfluß wird sich bei hohen Frequenzen durch einen etwas anderen Multiplikator auswirken als unser Faktor 0,58. Für niedere Frequenzen wird er auch den Verlauf der Funktion $\psi(\beta)$ etwas ändern.

Ist nun, wie bei hohen Frequenzen in der Praxis stets zutrifft, die Dicke der Heizrohrwandung groß gegen die Dicke der „effektiven Stromschicht", so wird unsere Formel (2) noch mit genügender Annäherung gelten, wenn wir unter b den äußeren Rohrhalbmesser verstehen.

Es wird sich unten ergeben, daß in der Tat experimentell sichergestellt ist, daß unsere Formel (2) eine brauchbare Näherung darstellt.

Der Gleichstromwiderstand R_0 des Heizdrahtes ist proportional der dritten Potenz der Windungszahl pro cm w. Bei Heizrohren gilt diese Aussage nur angenähert. Die Windungszahl w ist umgekehrt proportional zu b. Hieraus geht hervor, daß die Größe

$$C \cdot \frac{\psi}{\Phi}$$

aus Formel (3) von b nur abhängt durch die Funktion

$$F(\beta) = \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta + \sin\beta}{\mathfrak{Cos}\,\beta + \cos\beta}, \tag{10}$$

wobei

$$\beta = 2 \cdot \pi \cdot b \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \omega \cdot 10^{-9}}{\varrho_{II}}}.$$

Der Verlauf dieser Funktion F ist im Bild 9 gezeichnet. Für $\beta = 0$ wird F unendlich groß, geht dann bei steigendem β durch ein Minimum für $\beta = \pi$ und nähert sich bei weiter steigendem β rasch dem Wert eins. Wenn aber die Funktion F und somit auch der Ausdruck

$$C \cdot \frac{\psi}{\Phi}$$

für ein bestimmtes b durch ein Minimum geht, so erreicht der Wirkungsgrad für eben dieses b ein Maximum.

Die Bedingung für dieses Maximum lautet:

$$\beta = \pi$$

oder

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varrho_{II}}{2 \cdot \omega \cdot 10^{-9}}}. \tag{11}$$

Für $\omega = 10^4$ und $\varrho_{II} = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot$cm ergibt sich

$$2\,b = 2{,}9 \text{ mm}.$$

Dies ist nun aber eben die Größenordnung von Ribauds Werten, die lauten: für Kupfer als Kern 3 mm und für Kohle als Kern 4,6 mm ungefähr.

Praktisch wird man stets oberhalb des Wertes bleiben, der sich aus Formel (11) ergibt. Hierdurch nimmt einerseits der Wirkungsgrad nicht wesentlich ab, während andererseits größere Stromstärken in der Heizspule zugelassen werden können.

Der Wert nach der Formel (11) bildet einen Schwellenwert für b, den wir zwar wesentlich überschreiten, aber nicht unterschreiten dürfen, damit der Wirkungsgrad nicht bedeutend verschlechtert wird. Wegen der herrschenden Unsicherheit in der Funktion F, die oben angedeutet wurde, wird man als Schwellenwert sogar ein Vielfaches des Wertes (11) nehmen.

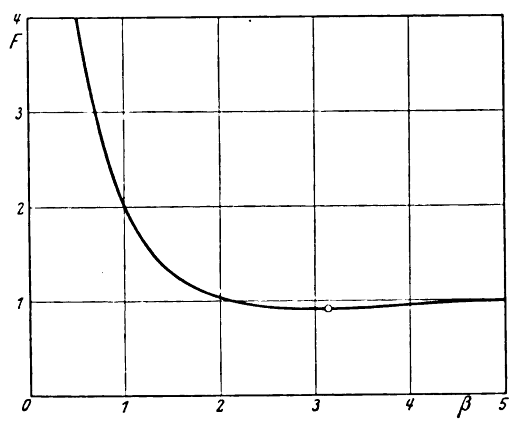


Bild 9. Zur Ermittlung des günstigsten Heizdrahtdurchmessers.

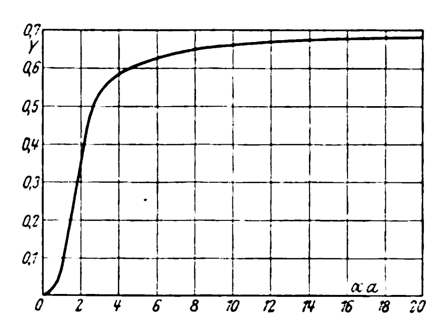


Bild 10. Zur Ermittlung des Schwellenwertes der Frequenz.

VIII. Schwellenwert der Frequenz.

Wie bereits im Abschnitt I dargetan wurde, steigt der Wirkungsgrad als Funktion von $\sqrt{\omega}$ zuerst quadratisch, dann annähernd linear an bis zu einer Schwelle, nach der er nur noch wenig zunimmt. Es ist Sache, die Frequenz in jedem Falle so zu wählen, daß η oberhalb dieses Schwellenwertes liegt.

Die Kurve $\eta = f(\sqrt{\omega})$ hat diesen Schwellenwert erreicht, wenn sowohl die in der Formel (1) auftretende Funktion Φ als die Funktion ψ der Formel (2) geradlinig verlaufen. Es ist also ω so zu wählen, daß dieser geradlinige Teil beider Funktionen erreicht ist.

Für die Funktion ψ ist dieser Punkt bereits aus dem im vorhergehenden Abschnitt Gesagten zu ermitteln. Die Funktion ψ verläuft gerade, sobald die Funktion F aus Gleichung (11) den Wert eins erreicht hat. Der Schwellenwert von ω beträgt also angenähert

$$\beta = \pi$$

oder

$$\omega = \frac{\varrho_{II}}{8 \cdot b^2 \cdot 10^{-9}}. \tag{12}$$

Wie bereits oben bemerkt wurde, wird man β und somit b und ω größer wählen als aus Gleichung (11) und (12) hervorgeht.

Auch für die Funktion Φ läßt sich die Schwelle leicht ermitteln. Hierzu betrachten wir den Ausdruck:

$$Y(\alpha a) = \frac{\mathrm{ber}\,\alpha a \cdot \mathrm{ber}'\,\alpha a + \mathrm{bei}\,\alpha a \cdot \mathrm{bei}'\,\alpha a}{\mathrm{ber}^2\,\alpha a + \mathrm{bei}^2\,\alpha a},$$

deren Verlauf im Bild 10 gezeichnet worden ist. Der Ausdruck Y wird für $\alpha a = 0$ ebenfalls null und nähert sich für $\alpha a \to \infty$ dem Wert $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$. Man sieht aus Bild 10, daß Y für $\alpha a = 10$ weniger als 10% von seinem asymptotischen Endwert abweicht. Von diesem Wert der Größe αa an verläuft die Funktion Φ aus Gleichung (1) fast gerade. Wir werden ihn als Schwellenwert bezeichnen für die Funktion Φ. Es gilt also

$$\alpha a = 10$$

oder

$$\omega = \frac{10^{11}}{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot a^2} \cdot \varrho_I. \tag{13}$$

Ist ω größer gewählt worden als beide Schwellenwerte, die aus den Gleichungen (12) und (13) hervorgehen, so wird man den Wirkungsgrad genähert aus Gleichung (3') erhalten[1].

IX. Die Vorausberechnung von Induktionsöfen.

Man kann bei dem Bau eines Induktionsofens verschiedene Ziele verfolgen. Zunächst kann man fragen, wie mit einem bestehenden Ofen ein möglichst hoher Wirkungsgrad zu erreichen ist, d. h. wie man hierzu den Kern und die Betriebsfrequenz zu wählen hat. Der häufigere Fall wird aber der sein, daß man ein vorgegebenes Volumen von gegebenem Material auf eine festgelegte Temperatur mit möglichst hohem Wirkungsgrad zu erhitzen wünscht.

Mit diesem Falle werden wir uns im folgenden ausschließlich beschäftigen. Die dabei gegebenen Formeln reichen aus, auch alle anderen Fälle leicht zu beherrschen.

Ist V das zu erhitzende Volumen in cm^3, T die Temperatur in Grad C, γ eine Strahlungskonstante, Q die im Kern dissipierte Leistung, O die Kernoberfläche in cm^2, dann gilt angenähert:

$$Q = \gamma \cdot O \cdot T \text{ [Watts]}. \tag{14}$$

Die Strahlungskonstante γ hat unter den gewöhnlich vorliegenden Isolationsverhältnissen den Wert 0,001 bis 0,005 $\frac{\text{Watt}}{\text{Grad} \cdot \text{cm}^2}$, wobei die größeren Werte zu höheren Temperaturen gehören.

Setzen wir das Verhältnis der Höhe L des Kernes zum Radius a gleich z, so gilt für zylindrische Kerne

[1] Auch Ribaud gibt Schwellenwerte an: Journ. de Phys. 1926, p. 253.

$$O = \left[\frac{V}{\pi \cdot z}\right]^{\frac{2}{3}} \cdot 2\pi(1 + z). \tag{15}$$

Man geht von einem bestimmten Verhältnis z aus, bestimmt aus Gleichung (15) O und dann aus Gleichung (14) die zu dissipierende Leistung Q. Die Annahme von z erfolgt nach konstruktiven Gesichtspunkten. Wie sich ergeben wird, kann man z in weiten Grenzen ändern, ohne daß dadurch der Wirkungsgrad stark beeinflußt würde.

Die Formel (1′) läßt sich schreiben

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \cdot z \cdot \left(\frac{V}{\pi z}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \varrho_I \cdot \alpha \cdot (w \cdot I)^2. \tag{16}$$

Der nächste Schritt ist nun der, daß man, nach Annahme von ω aus (16) mit Hilfe der bereits aus (14) berechneten Leistung Q die Amperewindungszahl pro cm w I bestimmt.

Man wird darauf w derart wählen, daß der Heizdrahtdurchmesser einerseits über dem jetzt bereits aus Gleichung (11) errechenbaren Schwellenwert liegt, andererseits aber den Strom I führen kann. Gelingt dies nicht, so ist die angenommene Frequenz zu ändern.

Die Frequenz selber wird nach Gleichung (13) daraufhin kontrolliert, ob sie über ihrem Schwellenwert liegt, wobei der Kernhalbmesser a der Gleichung

$$a = \left(\frac{V}{z \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

zu entnehmen ist.

Ist diese Kontrolle erfolgt, so wählt man den Heizspulenhalbmesser d, wobei die Dicke des Schmelztiegels zu berücksichtigen ist und weiterhin das Verhältnis der Spulenhöhe L_1 zur Kernhöhe L, das etwa 1,5 bis 2 betragen wird.

Mit diesen Daten ist die Heizvorrichtung vollständig bestimmt, und es kann nun der Wirkungsgrad kontrolliert werden.

Die Formel (3′) läßt sich schreiben

$$\eta = \frac{1}{1 + 0{,}33 \cdot \frac{L_1}{L} \cdot \frac{1}{w \cdot b} \cdot \frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{\varrho_{II}}{\varrho_I}}}. \tag{18}$$

Fällt der nach Gleichung (18) berechnete Wirkungsgrad zu ungünstig aus, so wird man die Ofenabmessungen entsprechend ändern.

X. Zahlenbeispiel.

Es soll ein Ofen gebaut werden, mit dem Wolfram bis auf 2000^0 C bei einem Volumen von 500 cm^3 zu heizen ist.

Wir wählen $z = 3$.

Aus Gleichung (15) ergibt sich $O = 356$ cm^3 und aus Gleichung (14), wenn man γ gleich $2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Watt}}{\text{Grad}\,.\,\text{cm}^2}$ setzt: $Q = 1425$ [Watts.]. Für ϱ_I nehmen wir $\varrho_I = 3 \cdot 10^{-5}$ (entspricht etwa 1000^0). Die Kreisfrequenz sei 10^6 Hertz. Dann ergibt sich aus Gleichung (16)

$$w \cdot I = 158.$$

Nimmt man für den Heizdraht Kupfer mit $\varrho_{II} = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\,\Omega \cdot \text{cm}$, so wird der Schwellenwert des Heizdrahtdurchmessers nach Gleichung (11)

$$2\,b = 0{,}029 \text{ cm}.$$

Wir wählen

$$2\,b = 0{,}3 \text{ cm}$$

und erhalten hierdurch

$$w = 3 \left[\frac{1}{cm}\right].$$

Die Stromstärke wird $\frac{I}{\sqrt{2}} \sim 37$ Amp. und kann also leicht vom Heizdraht geführt werden.

Für den Kernradius ergibt die Gleichung (17)

$$a = 3{,}77 \text{ cm}.$$

Die Frequenz soll nun über den Schwellenwerten (12) und (13) liegen. Über dem Wert (12) liegt sie sicher nach dem, was wir oben über den Wert von 2b gesagt haben. Weiter haben wir

$$\alpha a \cdot = 20{,}45 \cdot 3{,}77 \sim 77.$$

Der Schwellenwert beträgt nach Gleichung (13)

$$\alpha a = 10,$$

so daß die Frequenz auch dieser Bedingung genügt.

Wir setzen

$$a = 4 \text{ cm},$$
$$d = 6 \text{ cm},$$
$$L_1/L = 1{,}5.$$

Mit diesen Werten ergibt sich nach Gleichung (18) der Wirkungsgrad zu

$$\eta = \frac{1}{1 + 0{,}39} = 0{,}72.$$

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken. Wir haben für ϱ_{II} den kalten Wert eingesetzt. Andrerseits wird aber ϱ_I bei 2000^0 das Zweifache betragen des Wertes, den wir benutzt haben. Zusammengerechnet wirken diese beiden Einflüsse dahin, daß wir bei 2000^0 einen etwas günstigeren Wirkungsgrad erreichen werden als der eben errechnete. Man übersieht nun auch leicht, daß eine andere Annahme von z bei diesen Werten von w und b nur sehr wenig Einfluß hat auf η.

Die Werte, die man bei Dimensionierung eines Ofens nach den obigen Regeln für η erhält, stimmen ungefähr mit denjenigen Werten überein, die Ribaud für ausgeführte Öfen bei verschiedenen Kernen angibt[1].

Die Öfen der Ajax-Co., die bis zu Leistungen von 100 kW angefertigt sind, arbeiten im Mittel mit einem Wirkungsgrad von etwa 0,35.

Wir werden nun noch die Kapazität berechnen, welche den Ofenkreis auf die Betriebsfrequenz in einer der Schaltungen nach Bild 4 oder Bild 5 abstimmt.

Die Ofenreaktanz ist gemäß den Formeln (5) und (6) von den Werten ϱ_I und ϱ_{II} abhängig. Es läßt sich also nur für eine bestimmte Temperatur der Ofenkreis genau abstimmen.

Die Kapazitätsberechnung führen wir aus für die bereits früher benutzten Werte von ϱ_I und ϱ_{II}[2]. Aus Gleichung (6) folgt:

$$X_h = 2 \cdot \pi \cdot 12 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 9 \cdot 77 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}10\,\Omega.$$

Der asymptotische Wert der Funktion $P(\alpha a)$ in Gleichung (6) beträgt nämlich, ebenso wie der asymptotische Wert der Funktion Φ aus Gleichung (1):

$$\alpha a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Man findet aus Gleichung (5):

$$X_S = 4 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-9} \cdot 456 \cdot 9 \cdot 10^6 + 1{,}10 \sim 163\,\Omega.$$

[1] Journal de Phys. 1926, S. 253.

[2] Bei dem doppelten ϱ_I ändert sich X_s um weniger als 1‰.

Hierbei ist:

$$\frac{4\,b}{3\,d}\cdot U(\beta)$$

vernachlässigt gegen (1). Die Kapazität beträgt nach Gleichung (4):

$$K = \frac{1}{163} \sim 0{,}0061\ [\mu\cdot F.].$$

Den Generator wird man wegen der Überbelastbarkeit zu etwa 2,5 bis 3 kW wählen.

Hiermit ist die Berechnung des Ofens beendet.

XI. Die Heizung nichtleitender Materialien.

Sämtliche vorhergehenden Betrachtungen haben Bezug auf den Fall, daß der Kern aus leitendem Material besteht, das durch die in ihm selber zirkulierenden Wirbelströme erhitzt wird. Es kann aber auch vorkommen, daß man Nichtleiter heizen will.

In diesem Falle liegt es nahe, den Schmelztiegel aus leitendem Material zu bauen, ein Weg, der bereits in der Praxis beschritten ist.

Wir werden die hier auftretenden Verhältnisse einer näheren Betrachtung unterziehen, da sich hierbei interessante Gesichtspunkte ergeben.

Eine Theorie der Wirbelströme in einem hohlzylindrischen Leiter im magnetischen longitudinalen Wechselfeld ist gegeben von J. J. Thomson[1].

Bezeichnet man mit h die Zylinderdicke und mit a den inneren Zylinderradius, so ergibt sich, daß in bestimmten Fällen eine Zylinderdicke h existiert, welche, abhängig von der Kreisfrequenz ω und dem spezifischen Widerstand ϱ des Zylindermaterials, einer maximalen dissipierten Energie entspricht. Die diesbezüglichen Formeln Thomsons sind anwendbar, wenn

$$\alpha^2\cdot a\cdot h$$

nicht zu groß ist gegenüber der Einheit. Nimmt man einen Zylinder aus Kohle mit $\varrho \sim 90\cdot 10^{-4}$ und $\omega = 10^6$, während a etwa 3 cm und h etwa 0,5 cm beträgt, so ergibt sich

$$\alpha^2\cdot a\cdot h = 2{,}1.$$

Man wird also Thomsons Formeln anwenden dürfen.

Es beträgt der Wert von h, der zu einer maximalen dissipierten Energie gehört

$$h = \frac{\varrho\cdot 10^9}{2\,\pi\cdot a\cdot\omega}, \tag{19}$$

welcher Wert mit den obigen Daten wird

$$h = 0{,}48\ \text{cm}.$$

Die in dem Hohlzylinder dissipierte Leistung verhält sich zu derjenigen, welche unter sonst gleichen Umständen in einem Vollzylinder dissipiert wird, angenähert wie

$$\frac{\alpha\,a}{2\cdot\sqrt{2}} : 1,$$

also im vorliegenden Falle wie:

$$1{,}25 \text{ zu } 1.$$

Es ist also möglich durch eine Wahl der Tiegelwanddicke h gemäß Gleichung (19) angenähert den gleichen Wirkungsgrad zu erreichen wie mit einem massiven Kern aus gleichem Material wie der Tiegel.

Eindhoven, 17. Juli 1927.

Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

[1] Recent Researches, p. 324.



Kurzschlußvorgänge bei Einankerumformern.

Von

Prof. **Claudius Schenfer,** Moskau.

(Mitteilung aus Staatlichem Elektrotechnischem Experimental-Institut Moskau).

In einer früheren Mitteilung habe ich über Versuche berichtet, die durchgeführt wurden, um die Ursachen der vielfach beobachteten Störungen während der Rundfeuer am Kommutator bei Einankerumformern festzustellen[1].

Zur Beurteilung der Erscheinungen aber, die man bei Kurzschließen von Einankerumformern beobachten kann, ist auch die Kenntnis des zeitlichen Verlaufs des Gleichstromes, der Potentialkurve am Kommutator, der Schleifringspannungskurve usw., erforderlich.

Zum Studium der oben skizzierten Fragen wurden einige Versuche nach der in Bild I gezeigten Anordnung durchgeführt. Darin bezeichnen:

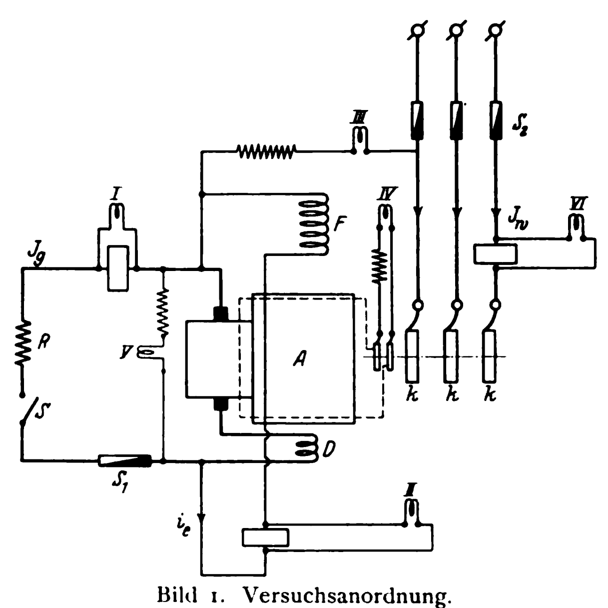


Bild 1. Versuchsanordnung.

A den Anker der Maschine,
K–K–K Schleifringe zum Anschluß an das Drehstromnetz,
F Hauptpolwicklung,
D Wendepolwicklung,
R Belastungswiderstand,
S Schalter,
S_1 und S_2 Schmelzsicherungen,
I–VI Oszillographenschleifen.

Der Kurzschluß im Gleichstromkreise wurde durch Schließen des Schalters S eingeleitet und in demselben Zeitpunkt beginnt auch die oszillographische Aufnahme der Strom-Spannungs- und Feldkurven.

Die Zeitdauer des Kurzschlusses kann durch passende Wahl der Sicherungen S_1 und S_2 geregelt werden.

[1] Vgl. Cl. Schenfer, Kurzschlußerscheinungen bei Einankerumformern, ETZ Nr. 12, 1927.

Als Versuchsmaschine diente ein Gleichstrommotor, der nach Einbau der drei Schleifringe als Einankerumformer benutzt werden konnte.

Die Maschine hat folgende Daten:

Leistung 7,5 PS,
Spannung gleichstromseitig — 120 V,
Schleifringspannung — 70 V,
1500 Umdr/Min bei 50 per/sec.

Die bei den Versuchen aufgenommenen Oszillogramme sind in den Bildern 2—10 gezeigt.

Bild 2 zeigt nun die Oszillogramme, die bei plötzlichen Kurzschließen des leerlaufenden Umformers aufgenommen wurden.

Die obere Kurve dieser Oszillogramme gibt den zeitlichen Verlauf der Luftspaltfeldkurve (B_e). Sie wurde mittels einer in die Ankernuten eingelegten Meßleiter aufgenommen.

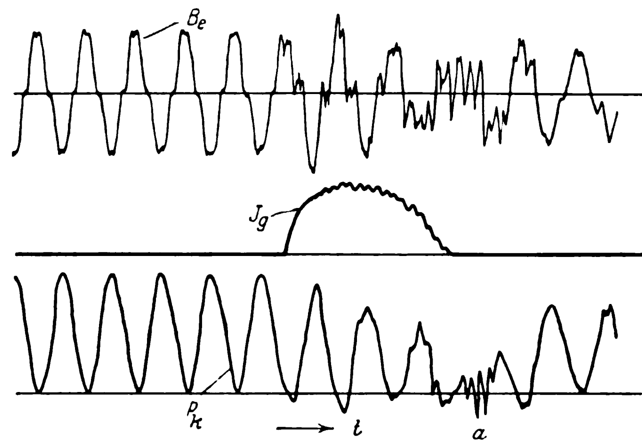


Bild 2. Die Kurven, die bei Kurzschluß des Einankerumformers aufgenommen wurden. B_e magnetische Luftinduktion, J_g zeitlicher Verlauf des Gleichstromes, P_k zeitlicher Verlauf der Potentialkurve.

Die mittlere Kurve zeigt den zeitlichen Verlauf des Gleichstromes I_g bei Kurzschließen des Umformers von der Kollektorseite.

Es ist aus Bild 2 zu ersehen, daß der Strom I_g nicht sofort nach Einleiten des Kurzschlusses bis zur vollen Höhe steigt, sondern nur allmählich, infolge der verzögernden Wirkung der Ankerselbstinduktion, anwächst. Nun sinkt der Strom I_g während das Abschmelzen der Sicherung S_1 und verschwindet beim Durchbrennen der letzteren, also bei Unterbrechung des Stromkreises.

Die Kurzschlußdauer beträgt annähernd 3 Perioden des speisenden Netzstromes, also $3 \cdot {}^1/_{50} = 0{,}06$ sec.

Die in der Stromkurve I_g auftretenden Spitzen sind durch zusätzliche Ströme in den durch die Bürsten kurzgeschlossenen Ankerspulen hervorgerufen.

Diese Ströme wachsen beträchtlich bei Kurzschlüssen, weil die Kommutierungsbedingungen in diesem Fall besonders ungünstig liegen.

Die untere Kurve des Bildes 2 gibt den zeitlichen Verlauf der Potentialkurve am Kommutator (P_k-Kurve) beim Kurzschluß auf der Gleichstromseite des Umformers. (Zur Aufnahme der P_k Kurve diente die Schleife III, Bild 1).

Beim normalen Betrieb des Umformers erscheint die Potentialkurve (wie bei Gleichstrommaschinen) in Form einer zur Abszissenachse tangenten Sinuslinie; nach Auftreten des Kurzschlusses verzerrt sich die P_k-Kurve erheblich, ihre Amplitude sinkt und ein Teil der Kurve kommt sogar ins Gebiet der negativen Ordinaten zu liegen.

Die größte Verzerrung der P_k-Kurve wurde beobachtet nicht beim Einleiten des Kurzschlusses, wie man es vielleicht auf den ersten Blick erwarten kann, sondern etwas später, fast bei Unterbrechen des Kurzschlußkreises. Diese Erscheinung kann nun zum Teil durch die verzögerte Ausbildung der Ankerrückwirkung und durch die nach den ersten Stromstoß auftretenden Pendelungen erklärt werden.

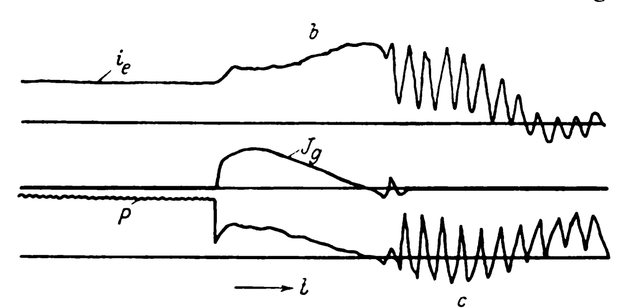


Bild 3. i_e Erregerstromkurve, J_g zeitlicher Verlauf des Gleichstromes, P zeitlicher Verlauf der Kommutator-Spannungskurve.

Die Deformierung der P_k-Kurve steht in engstem Zusammenhang mit der Verzerrung der Luftspaltfeldkurve B_e (Bild 2).

In Bild 2 entspricht der stärksten Deformation der B_e-Kurve auch die stärkste Verzerrung der P_k-Kurve (untere Kurve, Teil a).

Diese Verzerrung ist als höchst unerwünschte Erscheinung zu betrachten, denn sie begünstigt das Auftreten des sog. Rundfeuers am Kommutator.

Es ist bekannt, daß die Spannung zwischen benachbarten Lamellen von der Steilheit der Potentialkurve an der betrachteten Stelle des Kollektorumfanges abhängt; sie ist um so höher, je steiler die P_k-Kurve an den betrachteten Ort verläuft. Einige Teile der P_k-Kurve (Bild 2) verlaufen gegen die Abszissenachse sehr steil und es wird infolgedessen eine verhältnismäßig hohe Spannung Δe zwischen den entsprechenden Kollektorlamellen hervorgerufen. Eine hohe Δe erleichtert das Auftreten kleiner Lichtbogen zwischen benachbarten Lamellen, die schließlich zur Bildung des Rundfeuers Anlaß geben können.

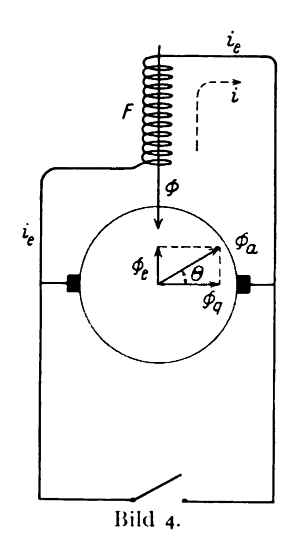


Bild 4.

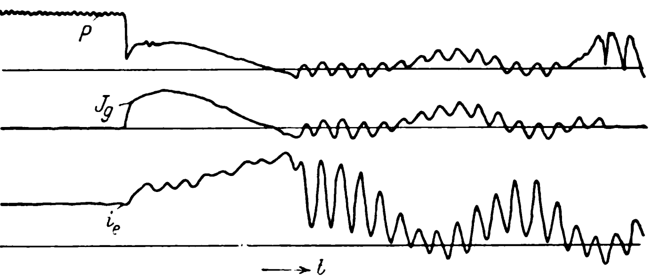


Bild 5. Kurzschluß des Einankerumformers. P zeitlicher Verlauf der Kommutatorspannung. J_g zeitlicher Verlauf des Stromes im Kommutatorkreise, i_e zeitlicher Verlauf des Erregerstromes.

Aus Bild 2 (Teil a der unteren Oszillogramme) ist zu ersehen, daß, infolge der starken Deformation der P_k-Kurve, einige Teile der letzteren sehr steil gegen die Abszissenachse geneigt verlaufen. Dies zeigt nun darauf, daß eine erhebliche Erhöhung der Spannung zwischen benachbarten Kollektorlamellen stattfindet.

Eine allzu hohe Segmentsspannung (Δ e) begünstigt das Aufrechthalten der zwischen benachbarten Lamellen beim Kurzschluß auftretenden Lichtbogen, die schließlich zum „Rundfeuer" führen können.

Bild 3 zeigt nun außer der J_g-Kurve (mittlere Oszillogramme) noch die Erregerstromkurve i_e (obere Oszillogramme) und die Kollektorspannungskurve P (untere Oszillogramme). Zur Aufnahme der i_e-Kurve diente die Schleife II, die P-Kurve wurde mittels der Schleife V aufgenommen (s. Bild 1).

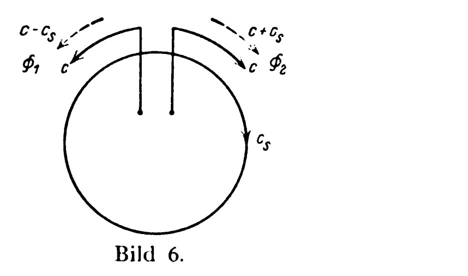


Bild 6.

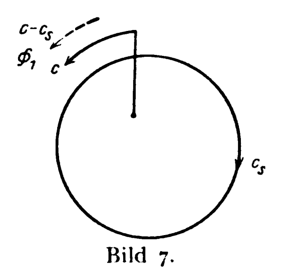


Bild 7.

Es zeigt sich dabei, daß sofort nach Einleiten des Kurzschlusses die Kollektorspannung P zunächst sehr schnell und dann langsam bis zum Verschwinden sinkt, um nach Durchbrennen der Sicherung SI und Außertrittfallen des Umformers niederzusinken, aber schon als pulsierende Spannung auszutreten. (Teil C der P-Kurve in Bild 3.)

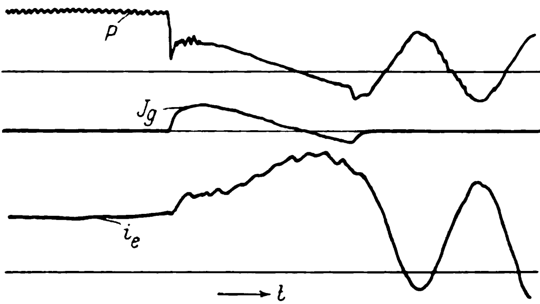


Bild 8. Kurzschluß des Einankerumformers (nur die Sicherung S_1 ist ausgeschmolzen, s. Bild 1.

Der Erregerstrom i_e (dessen Höhe von der an die Erregerwicklung aufgedruckten Kollektorspannung P abhängt) verliert nach Außertrittfallen des Umformers die Gestalt eines Gleichstromes und pulsiert entsprechend den oben erwähnten Spannungspulsationen (s. P-Kurve). Das Anwachsen des Erregerstromes i_e, den man in ersten Zeitmomenten, sofort nach Einleiten des Kurzschlusses beobachten kann, wird vielleicht nicht ganz verständlich sein (s. Teil „b" der i_e-Kurve, Bild 3).

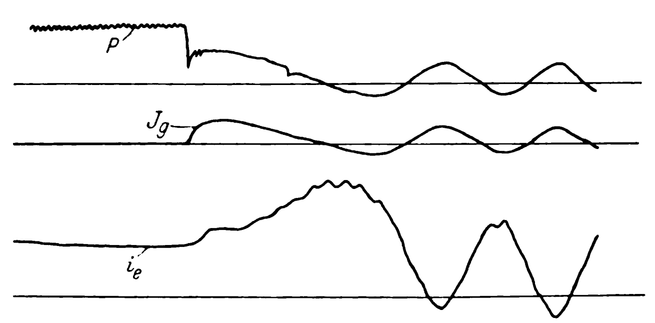


Bild 9. Kurzschluß des Einankerumformers; (keine der Sicherungen S_1—S_2 ist ausgeschmolzen, s. Bild 1).

Diese Erscheinung läßt sich aber leicht auf folgender Weise klären. Einige vom Verfasser angestellte Versuche zeigten, daß im ersten Augenblick sofort nach Auftreten des Kurzschlusses sich das Umformerankerfeld Φ_a gegen die Bürstenachse um einen Winkel Θ zu drehen sucht; es bildet sich deswegen eine Ankerflußkomponente Φ_e, die entmagnetisierend auf den Hauptpol wirkt (s. Bild 4). Die Schwächung des Erregerflusses Φ ruft in der Erregerwicklung EMK hervor; die letztere erzeugt einen zusätzlichen Strom i, der die Richtung des Erregerstromes i_e hat und den sinkenden Erregerfluß aufrecht zu halten sucht. Bild 5 gibt noch einige Oszillogramme.

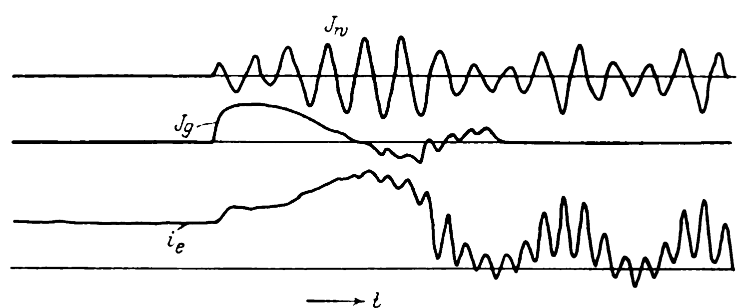


Bild 10. Zeitlicher Verlauf des Erregerstromes i_e, des Kommutatorstromes J_g und des Schleifringstromes J_w während des Kurzschlusses und nachfolgenden Außertrittfallens des Umformers.

Diese wurden bei anderen Versuchsbedingungen als die Oszillogramme des Bildes 3 aufgenommen. Es wurde nämlich nur eine der Sicherungen S_2 (auf der Wechselstromseite) abgeschmolzen, während die gleichstromseitige Sicherung S_1 ausbleibt (s. Bild 1).

Der unter solchen Bedingungen nach Außertrittfallen des Umformers in den Kollektorkreis fließende Strom I_g ist aber schon kein Gleichstrom mehr, sondern ein Strom aus zusammengesetzter Form. Dasselbe gilt auch für die P- und i_e-Kurven (Bild 5). Es ist aus Bild 5 zu ersehen, daß man die P- und i_e-Kurven als Resultat

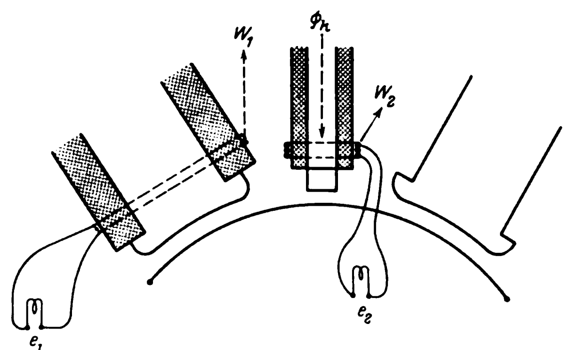


Bild 11. Versuchsanordnung.

der Zusammensetzung von je zwei Sinuskurven verschiedener Frequenz betrachten kann. Die Ursache des Auftretens im Kollektorkreis zweier verschiedener Frequenzen liegt in der Tatsache, daß nur eine der 3 Sicherungen S_2 abgeschmolzen wurde.

Bild 6 zeigt schematisch den einphasig gespeisten Umformeanker wieder. Die Ankerwicklung bildet dabei einen mit der Netzfrequenz c pulsierenden Kraftfluß Φ, den man in zwei gegenläufige Drehfelder zerlegen kann, nämlich einem rechtslaufenden Feld Φ_2 und einem linkslaufenden Feld Φ_1. Beide laufen gegen die Ankerwicklung mit der Geschwindigkeit c Umdr/sec (bei zweipoligem Anker).

Wenn sich der Anker selbst im Uhrzeigersinn mit der Geschwindigkeit cs Umdr/sec im Raume dreht, bekommen die oben erwähnten Drehfelder die Raumgeschwindigkeiten c + cs (Feld Φ_2) und c — cs Umdr/sec (Feld Φ_1).

Beide Felder (Φ_1 und Φ_2) rufen in der stillstehenden Erregerwicklung Ströme entsprechender Frequenz (c — cs und c + cs) hervor; beide Frequenzen werden auch in der Kollektorspannung auftreten.

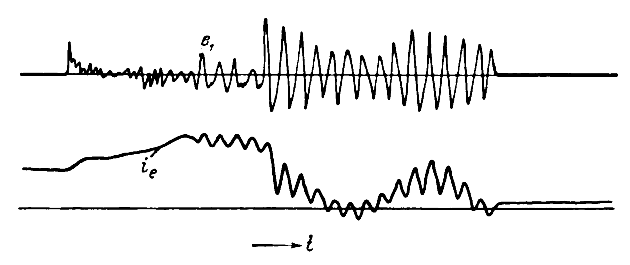


Bild 12. Verlauf der EMK e_1, die in Hilfswicklung W_1 beim plötzlichen Kurzschluß des Einankerumformers induziert wurde (s. Bild 11).

Bei dreiphasiger Speisung des Ankers von der Schleifringseite verschwindet das rechtslaufende Feld Φ_2 und das ausbleibende linkslaufende Feld Φ_1 (mit der Raumgeschwindigkeit c — cs) ruft in der Erregerwicklung einen Wechselstrom von der Schlupffrequenz c — cs hervor, der sich über den Gleichstrom lagert.

Das Obengesagte wird durch eine Reihe beim Kurzschließen des Umformers aufgenommener Oszillogramme bestätigt (s. Bild 8). Es zerschmilzt dabei nur die Sicherung S_1 auf der Gleichstromseite, während die Sicherung S_2 ausbleibt (Bild 1).

Bild 9 zeigt die Oszillogramme, die bei den kurzgeschlossenen Umformern aufgenommen wurden, und zwar für den Fall, daß nach Herausfallen keine der Sicherungen (S_1 und S_2) zerschmilzt (Bild 1).

In diesem Falle fließt im Kollektorkreise ein Strom I_g niedriger Frequenz, nämlich der Schlupffrequenz c — cs (s. Bild 7).

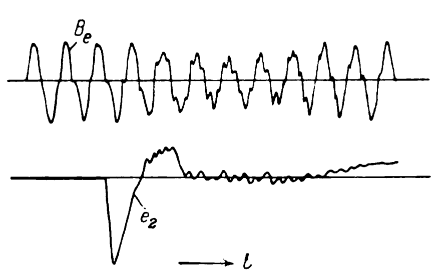


Bild 13. Zeitlicher Verlauf der EMK e_2 bei Kurzschließen des Umformers; B_e die Kurve der Luftinduktion.

Die Oszillogramme von Bild 10 zeigen den zeitlichen Verlauf des Erregerstromes i_e, Kollektorstromes I_g und des Netzstromes I_w (Schleifringstromes) während des Kurzschlusses und nachfolgenden Außertrittfallens des Umformers.

Es ist aus diesen Oszillogrammen leicht zu ersehen, daß der Schleifringstrom in diesem Falle trotz des Grundfrequenzstromes (der Netzfrequenz) noch einen „parasitären" Strom der Schlupffrequenz enthält, die zusammen die sichtbaren Schwebungen des Schleifringstromes hervorrufen.

Wir haben schon oben betont, daß nach Heraustrittfallens und bei einphasiger Speisung des Umformerankers sich zwei gegenläufige Drehfelder ausbilden, die mit den Raumgeschwindigkeiten c — cs und c + cs rotieren. Diese Felder induzieren in der Erregerwicklung EMK entsprechender Frequenz.

Die Kurvenform dieser EMK kann mittels einer auf dem Hauptpol über die Erregerwicklung gewickelten Hilfswicklung W_1 bestimmt werden (s. Bild 11).

Bild 12 zeigt nun die auf diese Weise aufgenommene Oszillogramme.

Ich habe gelegentlich in einem früheren Aufsatz experimentell gezeigt[1], daß im ersten Augenblick sofort nach Einleiten des Kurzschlusses im Einankerumformer das Gleichgewicht der MKK des Gleich- und Wechselstromes gestört wird, was unter Umständen zum unerwünschten „Umkippen" des Wendenfeldes führen kann.

Zur experimentellen Untersuchung des Wendefeldes Φ_k bei Kurzschließen des Umformers wurde die in Bild 11 skizzierte Anordnung benutzt. Auf dem Wendepol wurde eine aus einigen Windungen bestehende Hilfswicklung W_2 gelegt und ihre Enden mit den Oszillographenschleifen verbunden. Ändert sich der Wendepolkraftfluß Φ_k, so wird in der Hilfswicklung W_2 dieser Änderung proportionale EMK c_2 induziert.

Bild 13 gibt den zeitlichen Verlauf der EMK c_2 bei Kurzschließen des Umformers.

Die Tatsache, daß die e_2-Kurve neben positiven noch negative Ordinate aufweist, zeigt auf das Umkippen des Wendefeldes, denn anders müßte die e_2-Kurve ganz im Gebiet der positiven Ordinaten zu liegen kommen.

[1] Siehe ETZ Nr. 12, 1927.

Die MMK-Oberschwingungen einschichtiger Drehstromwicklungen.

Von

Robert Pohl.

Zusammenfassung.

Die MMK-Oberschwingungen von Einschichtwicklungen werden im Anschluß an eine entsprechende Arbeit über Zweischichtwicklungen[1] in ihrer Abhängigkeit vom Wickelschritt untersucht. Um einen einwandfreien Vergleich zu ermöglichen, wird der Begriff „Phasenverschachtelung" eingeführt. Die Kurven der Oberschwingungen der Einschichtwicklungen unterscheiden sich von denen der Zweischichtwicklungen gleicher Phasenverschachtelung durch eine größere Zahl von Zacken. Ihre Maximal- und Effektivwerte nehmen einen ähnlichen Verlauf, ihre Größe muß aber von Fall zu Fall bestimmt werden. Die Ergebnisse für Einschichtwicklungen mit 36, 48 und 72 Nuten je Polpaar werden mitgeteilt. Da sich eine Phasenverschachtelung, wie sie bei fortschreitenden Wicklungen durch Schrittverkürzung erzeugt wird, auch bei konzentrischen Spulenwicklungen erreichen läßt, treffen die Ergebnisse der Untersuchung fortschreitender Einschichtwicklungen sinngemäß auch auf die konzentrischen zu.

In einer früheren Untersuchung[1] wurde die Form der MMK-Oberschwingungen von Drehstromwicklungen für verschiedene Grade der Schnittverkürzung dadurch abgeleitet, daß zwei Kurven der für unverkürzten Schritt gültigen Form, aber halber Höhe der Ordinaten, gegeneinander verschoben und addiert wurden. Diese Entwicklung war dort zulässig, weil wir nur die üblichen Zweischichtwicklungen betrachteten und man sich die Schrittverkürzung bei diesen durch Verschiebung der einen Schicht gegenüber der anderen entstanden denken kann. Die Betrachtungsweise ist aber grundsätzlich nur auf Zweischichtwicklungen anwendbar. Es wurde ferner bei dieser Ableitung angenommen, daß das Nutenkupfer gleichmäßig über den inneren Statorumfang verteilt ist, so daß durch die Nuten hervorgerufene Feldtreppen in Fortfall kommen.

[1] Die MMK-Oberschwingungen der Drehstromwicklungen Arch. f. Elektrot. 1927, Heft 3.



Im nachfolgenden soll die Frage untersucht werden, inwieweit die so erhaltenen Ergebnisse auch bei Einschichtwicklungen gültig bleiben. Wenn wir bei diesen wiederum von den Nutentreppen absehen wollen, so müssen wir uns den Kupferinhalt jeder Nut gleichmäßig über die ihr entsprechende Zahnteilung ausgebreitet vorstellen. Dabei verbleibt nun aber ein grundsätzlicher Unterschied in der Form der MMK-Kurve gegenüber der Zweischichtwicklung, der aus einem Vergleich der Bilder 1 und 2 zu erkennen ist. Bild 1 stellt eine Zweischichtwicklung mit verkürztem Schritt, Bild 2 eine Einschichtwicklung mit entsprechender Schrittverkürzung



Bild 1. Phasenfolge der Zweischichtwicklungen bei 12 Nuten je Pol und Phase und Wickelschnitt 30 $\left(\frac{6}{12}\text{ Phasenverschachtelung}\right)$.
a Lage der Phasen in den Nuten,
b Lage der Phasen bei Annahme gleichmäßiger Cu-Verteilung über den Umfang.

dar, und zwar zeigt a die Anordnung der Leiter in den Nuten, b die Lage der Phasen bei gleichmäßiger Verteilung des Kupfers über den Umfang. Man erkennt bei der Zweischichtwicklung, daß in den Zonen, in denen verschiedenen Phasen angehörende Leiter einander übergreifen, die Ober- und Unterlage verschiedenen Phasen angehören, so daß eine in sich gleichmäßige Übergangszone zwischen den Phasen geschaffen wird. Bei der Einschichtwicklung bestehen diese Übergangszonen dagegen abwechselnd aus Stücken, welche der einen, und solchen, die der anderen



Bild 2. Phasenfolge der Einschichtswicklungen bei 12 Nuten je Pol und Phase und Wickelschnitt 29 $\left(\frac{6}{12}\text{ Phasenverschachtelung}\right)$.
a Lage der Phasen in den Nuten,
b Lage der Phasen bei Annahme gleichmäßiger Cu-Verteilung über den Umfang.

Phase angehören. Es rührt dies daher, daß die Spulenseiten der verschiedenen Phasen in diesen Zonen nicht wie früher über-, sondern nebeneinander angeordnet sind. Während man sich die Entstehung der Zweischichtwicklung mit verkürztem Schritt durch Verschiebung der einen Schicht gegen die andere vorstellen kann, ist die entsprechende Einschichtwicklung so entstanden zu denken, daß die gradzahligen Nutenleiter gegen die ungradzahligen um eine bestimmte Nutenzahl verrückt sind und zwar ist der Betrag der Verrückung stets eine gerade Nutenzahl.

Die Kurve der MMK-Oberschwingungen für die Einschichtwicklung läßt sich demnach nicht in der einfachen Weise ermitteln, wie es bei der Zweischichtwicklung möglich war. Wir müssen vielmehr für jede gewählte Nutenzahl die MMK-Kurve für den früher definierten Zeitpunkt a und Zeitpunkt b aufzeichnen, die vieleckige Mittelkurve dieser beiden Grenzvielecke bilden, und die Schwingung um diese Mittelkurve, deren Periodenzahl wieder das 6fache der Grundfrequenz ist, bezüglich ihres allgemeinen Verlaufes untersuchen, sowie ihre Effektiv- und Maximalwerte bilden. Dabei ergibt sich aber, wenn man den Vergleich der Einschicht- mit der Zweischichtwicklung auf gleicher Grundlage durchführen will, noch eine Schwierigkeit. Zu ihrer



Erläuterung wollen wir den Begriff „Phasenverschachtelung“ einführen. Er soll das Verhältnis der mit den benachbarten Phasen vermengten Nuten zu den gesamten Nuten je Pol und Phase kennzeichnen. So sind in Bild 1 von den 12 Nuten je Pol und Phase 12 halbe, also 6 Nuten mit den benachbarten Phasen verschachtelt. Die Wicklung besitzt also die Phasenverschachtelung $^6/_{12}$ oder 50%. Die in Bild 2 dargestellte Einschichtwicklung hat die gleiche Phasenverschachtelung $^6/_{12}$. Um sie zu erzeugen, ist aber nicht der gleiche, sondern ein um 1 kleinerer Wickelschritt (Vorwärtsschritt) erforderlich als bei der Zweischichtwicklung Bild 1. Dies erklärt sich aus Bild 3, das den Linienzug einer Zweischichtwicklung und einer Einschichtwicklung mit unverkürztem Schritt, also Phasenverschachtelung 0 darstellt. Bei der ersteren Wicklung muß der Schritt ein voller Polschritt sein, also in Nuten ausgedrückt, gleich der Nutenzahl pro Pol, hier 18. Wir schreiten also von 1 nach 19.

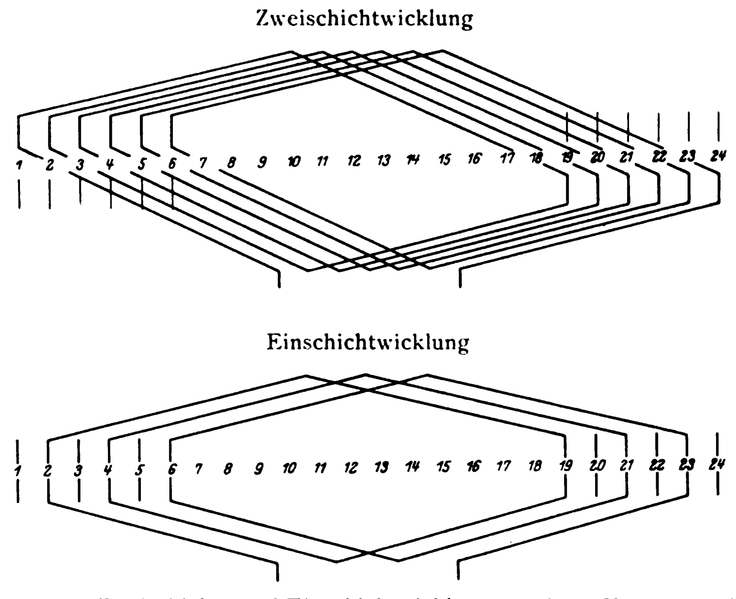


Bild 3. Linienzug von Zweischicht- und Einschichtwicklungen mit 36 Nuten je Polpaar (6 Nuten je Pol und Phase) für Phasenverschachtelung 0.

Bei der Einschichtwicklung dagegen, die stets einen Schritt von einer gradzahligen zu einer ungradzahligen Nut erfordert, muß der Wickelschritt um 1 kleiner sein als der Diametralschritt, also hier 17, d. h. von 2 nach 19. Demzufolge ist auch bei der Einschichtwicklung Bild 2 für die gleiche Phasenverschachtelung wie bei der Zweischichtwicklung Bild 1 der Wickelschritt 29 statt 30.

Da die MMK-Oberschwingung offenbar von der Phasenverschachtelung abhängt, ganz unabhängig davon, durch welchen Wickelschritt oder allgemein durch welche Wickelkopfgestaltung sie erreicht ist, so tun wir gut daran, sie grundsätzlich als Funktion der Phasenverschachtelung in % aufzutragen. Für die Zweischichtwicklung gehen die Kurven der auf S. 245 Arch. f. Elektrot. 1927, Heft 3 gegebenen Bild 7 in die des Bildes 4 über. Hierbei ist zu beachten, daß die Phasenverschachtelung über 100% hinausgehen kann, wenn nämlich durch entsprechende Schrittverkürzung mehr fremdphasige Nuten in den Bereich der Phasennuten eines Poles hineingenommen werden, als die Nutenzahl pro Pol und Phase beträgt. Praktisch wird man mit so stark verschachtelten Wicklungen nicht arbeiten. Das Bild 4 zeigt, daß das Optimum der Phasenverschachtelung zwischen 60 und 50% liegt, entsprechend 80 bis 83% Wickelschritt. Der Zusammenhang des neu eingeführten Begriffes Phasenverschachtelung (v) in % der Nuten pro Pol und Phase mit dem Wickelschritt (s) in % des

Polschrittes, d. h. der Nuten pro Pol ist für zweischichtige Dreiphasenwicklungen offenbar

$$s = 100 - \frac{v}{3}$$

und für zweischichtige Zweiphasenwicklungen

$$s = 100 - \frac{v}{2}.$$

Für einschichtige Wicklungen ist aber

$$s = 100\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{v}{3}$$

bzw.

$$s = 100\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{v}{2},$$

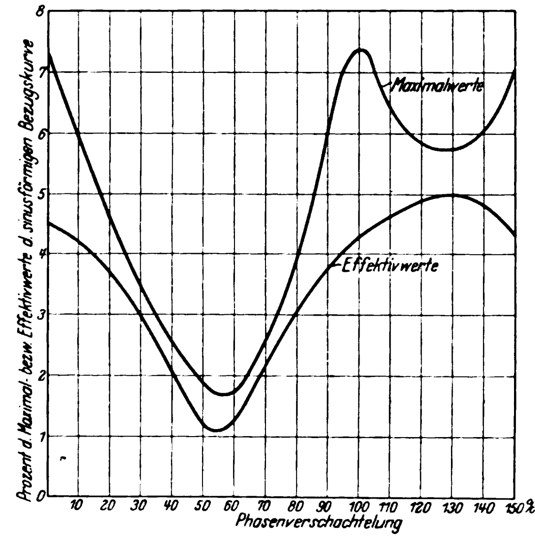


Bild 4. Maximal- und Effektivwerte der Grenzkurven der MMK-Oberschwingung um die vieleckförmige Mittelkurve für Zweischichtwicklungen in % der sinusförmigen Bezugskurvenwerte als Funktion der Phasenverschachtelung.

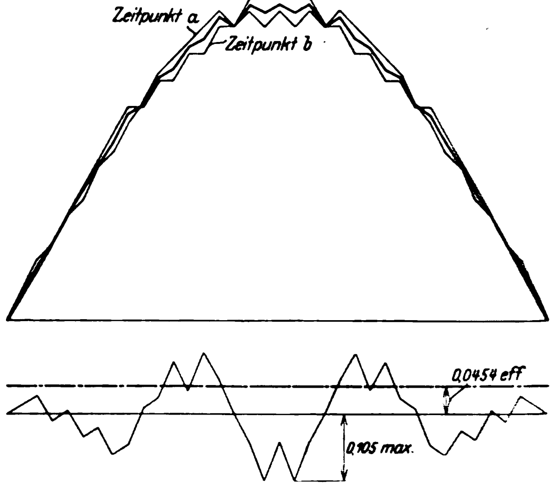


Bild 5. Grenz- und Mittelkurven von MMK nebst Oberschwingung für Zweischichtwicklungen beliebiger Nutenzahl bei Phasenverschachtelung 66,6 %.

wo m die Zahl der Nuten pro Pol ist. Wir haben bisher nur die fortschreitenden Wicklungen betrachtet. Als einschichtige Wicklungen sind nun aber auch die konzentrischen Spulenwicklungen anzusehen, bei denen jede Spulenseite eine ganze Nut füllt. Man ordnet ihre Wickelköpfe bekanntlich je nach Umständen in zwei oder drei Ebenen an. Im letzteren Falle ist es möglich, jede gewünschte Phasenverschachtelung vorzunehmen, denn man ist durch die Wickelköpfe der benachbarten Phasen nicht behindert die Spulenseiten in die entsprechenden Nuten einzuführen. Hier haben wir es also mit verschachtelten Wicklungen ohne bestimmten Wickelschritt zu tun. Ihre MMK-Oberschwingung kann daher nur als Funktion der Phasenverschachtelung betrachtet werden.

Nachfolgend sind nun zunächst die MMK-Oberschwingungen von fortschreitenden einschichtigen Drehstromwicklungen mit 36 und 72 Nuten je Polpaar untersucht und mit einer Zweischichtwicklung gleicher Phasenverschachtelung verglichen. Zu dem letzteren Vergleich ist die Verschachtelung 66,7 % gewählt, weil sich diese bei allen drei Wicklungen ausführen läßt. Für die Einschichtwicklung ist bei 36 Nuten der

Schritt 13, bei 72 Nuten 27. Das Bild 5 zeigt nun zunächst die Grenz- und Mittelkurven der MMK für 66,7% Verschachtelung bei einer Zweischichtwicklung beliebiger Nutenzahl. Die Oberschwingung ist getrennt herausgezeichnet und der Effektiv- und Maximalwert vermerkt. Zum Vergleich ist nun in Bild 6 das entsprechende Bild für eine Einschichtwicklung mit 36 Nuten dargestellt, Bild 7 zeigt das gleiche

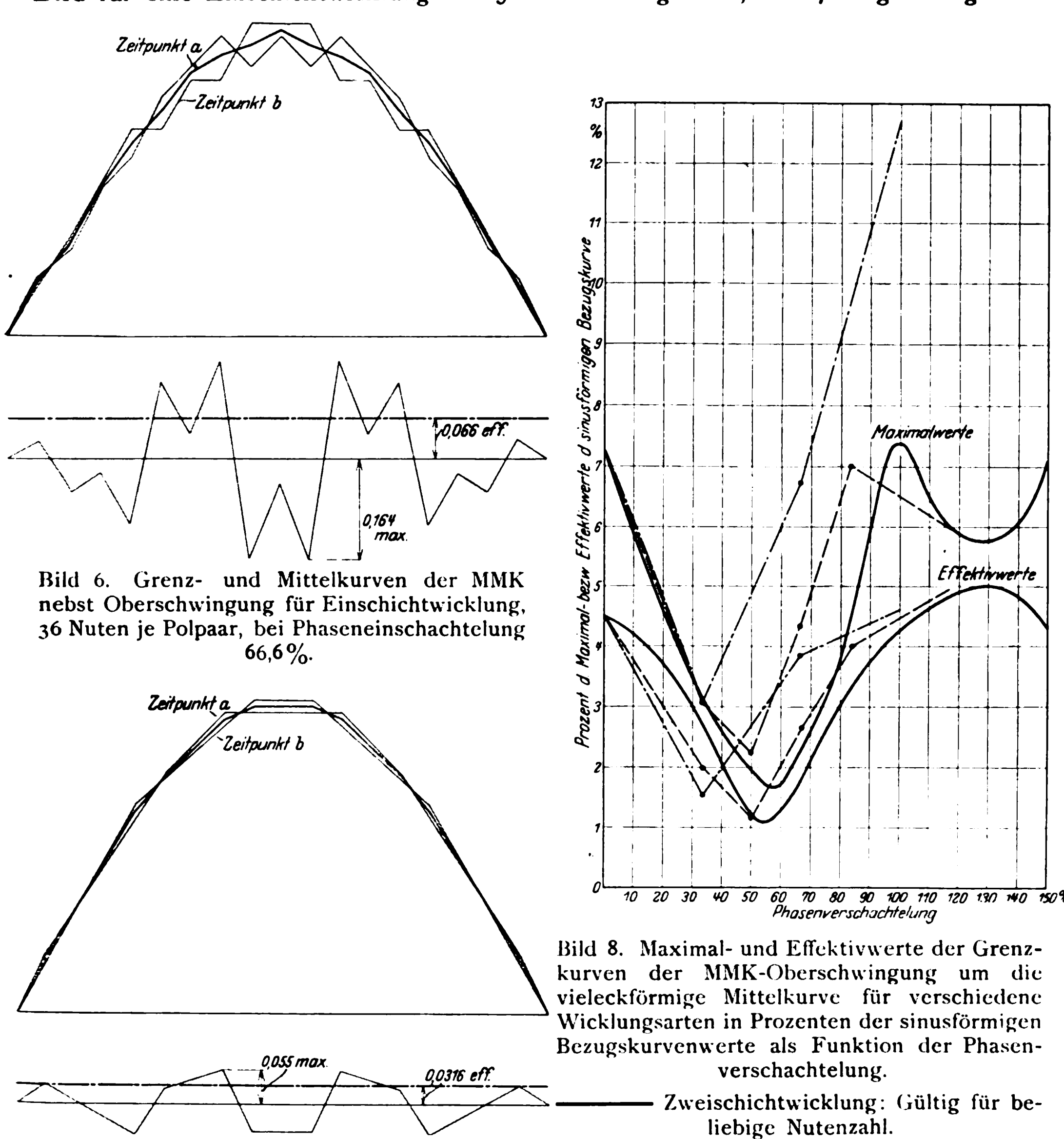


Bild 6. Grenz- und Mittelkurven der MMK nebst Oberschwingung für Einschichtwicklung, 36 Nuten je Polpaar, bei Phaseneinschachtelung 66,6%.

Bild 7. Grenz- und Mittelkurven der MMK nebst Oberschwingung für Einschichtwicklung, 72 Nuten je Polpaar bei Phasenverschachtelung 66,6%.

Bild 8. Maximal- und Effektivwerte der Grenzkurven der MMK-Oberschwingung um die vieleckförmige Mittelkurve für verschiedene Wicklungsarten in Prozenten der sinusförmigen Bezugskurvenwerte als Funktion der Phasenverschachtelung.

——— Zweischichtwicklung: Gültig für beliebige Nutenzahl.

– – – – Einschichtwicklung: Für 72 Nuten je Polpaar.

—·—·— Einschichtwicklung: Für 36 Nuten je Polpaar.

für 72 Nuten je Polpaar. Man erkennt, daß, den Nutenzahlen entsprechend, die MMK-Oberschwingung der Einschichtwicklung eine größere Anzahl von Zacken aufweist. Über die Größe der Effektiv- und Maximalwerte geben die späteren Kurven Aufschluß. Es ist anzunehmen, daß sie in Abhängigkeit von der Phasenverschachtelung einen ähnlichen Verlauf annehmen werden, wie er für Zweischichtwicklungen

ermittelt wurde (s. Bild 4). Von der Tatsache abgesehen, daß bei Einschichtwicklungen für eine gegebene Nutenzahl nur eine halb so große Anzahl von Ausführungsmöglichkeiten vorliegt als bei der Zweischichtwicklung, bestätigt die nähere Untersuchung diese Annahme. So sind in Bild 8 neben den stark ausgezogenen Kurven für die Maximal- und Effektivwerte bei der Zweischichtwicklung die entsprechenden Punkte der Einschichtwicklung mit 72 und 36 Nuten je Polpaar eingezeichnet und durch gerade Linien miteinander verbunden. Die dargestellten Punkte entsprechen bei der 36 Nutenwicklung dem Nutenschritt 17, 15, 13, 11 und bei der 72 Nutenwicklung dem Nutenschritt 35, 31, 29, 27, 25, 21. Man erkennt aus den Kurven Bild 8, daß der allgemeine Charakter der Abhängigkeit der Oberschwingung von der Schrittverkürzung bei der

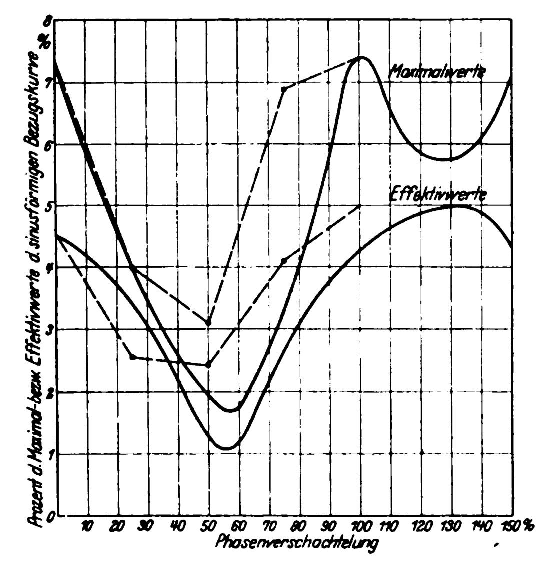


Bild 9. Maximal- und Effektivwerte der Grenzkurven der MMK-Oberschwingung um die vieleckförmige Mittelkurve für verschiedene Wicklungsarten in % der minusförmigen Bezugskurvenwerte als Funktion der Phasenverschachtelung.

Bild 10. Abhängigkeit des Wicklungsfaktors k_s von der Phasenverschachtelung.

Einschichtwicklung ähnlich derjenigen für die Zweischichtwicklung bleibt. Jedoch fallen einzelne Punkte insbesondere bei der 36-Nutenwicklung sehr stark heraus, so daß es sich empfiehlt, eine in Aussicht genommene Wicklung jeweils in der beschriebenen Art besonders zu untersuchen. Die rechnerisch ermittelten Zahlen, welche in Bild 8 aufgetragen wurden, sind in der Tabelle verzeichnet. Diese enthält auch die entsprechenden Werte für die Nutenzahl 48, und zwar für die Nutenschritte 23, 21, 19, 17, 15. Die Effektiv- und Maximalwerte sind wiederum zum Vergleich mit denjenigen der Zweischichtwicklung auf einem besonderen Kurvenblatt Bild 9 dargestellt und zeigen ein grundsätzlich gleiches Ergebnis, wie bei den Kurven Bild 8 besprochen. In allen Fällen sind die Effektiv- und Maximalwerte in Prozent der entsprechenden Werte der zugehörigen sinusförmigen Bezugskurve angegeben, d. h. derjenigen Sinuskurve, deren Flächeninhalt gleich dem mittleren Flächeninhalt der betrachteten MMK-Kurve ist. Die in der Tabelle und den Kurven gegebenen Werte für die Oberschwingung von Einschichtwicklungen gelten auch für konzentrische Wicklungen, welche die gleiche Phasenverschachtelung aufweisen.

Um für eine gegebene oder angenommene Phasenverschachtelung den zugehörigen Wicklungsfaktor k_s für die Verringerung der erzeugten EMK gegenüber der unverschachtelten (Durchmesser-) Wicklung zu erhalten, bedient man sich am einfachsten des Bildes 10. Es zeigt zunächst als Abszisse den für Zweischichtwicklungen

gültigen Wickelschritt in % des Polschrittes und als Ordinate den zugehörigen Wert k_s. Eine zweite Abszissenteilung gibt nun die zugehörige Phasenverschachtelung. Bei Einschichtwicklungen jeder Art, also auch konzentrischen Spulenwicklungen entnimmt man der Kurve für die gewählte Verschachtelung den entsprechenden Wert von k_s.

Abweichungen der MMK von der vieleckförmigen Mittelkurve bei Einschichtwicklungen für verschiedene Nutenzahlen und Phasenverschachtelungen.

Nutenzahl je Polpaar	Vorwärtsschritt in			Rückwärtsschritt in Nutteilungen	Phasenverschachtelung		Maximalwert	Maximalwert in % desjen. der Sinuskurve mit gleicher Phasenverschachtelung	Effektivwert	Effektivwert in % desjen. der Sinuskurve mit gleicher Phasenverschachtelung	Sinusförmige Bezugskurve für die betrachtete Phasenverschachtelung			
	°elektr.	Prozent	Nutteilungen		als Bruchzahl der Nuten je Pol und Phase	in %					Maximalwert	Maximalwert in %	Effektivwert	Effektivwert in %
36	170	94,5	17	15	0	0	0,189	7,35	0,081	4,5	2,57	100	1,82	100
36	150	83,3	15	13	2/6	33,3	0,0775	3,06	0,028	1,56	2,53	98,5	1,79	98,5
36	130	72,2	13	11	4/6	66,6	0,164	6,8	0,066	3,86	2,42	94	1,71	94,0
36	110	61	11	9	6/6	100	0,283	12,7	0,073	4,6	2,23	86,6	1,58	86,6
48	172,5	95,9	23	21	0	0	0,189	7,35	0,081	4,5	2,57	100	1,82	100
48	157,5	87,5	21	19	2/8	25	0,101	4,0	0,046	2,56	2,54	99	1,8	99
48	134,75	79,2	19	17	4/8	50	0,0775	3,12	0,0425	2,41	2,48	96,6	1,76	96,6
48	127,5	70,9	17	15	6/8	75	0,164	6,9	0,0685	4,08	2,37	92,4	1,68	92,4
48	112,5	62,5	15	13	8/8	100	0,164	7,4	0,078	4,93	2,22	86,6	1,58	86,6
72	175	97,2	35	33	0	0	0,189	7,35	0,081	4,5	2,57	100	1,82	100
72	155	86,1	31	29	4/12	33,3	0,0775	3,06	0,0357	2,0	2,53	98,5	1,79	98,5
72	145	80,5	29	27	6/12	50	0,0558	2,25	0,0235	1,28	2,48	96,6	1,76	96,6
72	135	75	27	25	8/12	66,6	0,105	4,34	0,0454	2,66	2,42	94	1,71	94,0
72	125	69,4	25	23	10/12	83,3	0,164	7,03	0,066	4,0	2,33	90,6	1,65	90,6
72	105	58,3	21	19	14/12	116,8	0,126	6,00	0,074	4,96	2,1	81,9	1,49	81,9

Sechsphasengleichrichteranlage mit Einphasentransformatoren.

Von

Eduard Gerecke.

Zusammenfassung.

Gegenstand der Untersuchung ist eine Sechsphasengroßgleichrichteranlage mit 3 Einphasentransformatoren. Es werden die Oszillogramme der Ströme und Spannungen abgeleitet und die Charakteristik der Gleichspannung, die Transformatorgröße und die Verhältnisse im speisenden Netz berechnet. Es zeigt sich, daß die Schaltung ebenso günstig arbeitet wie die Schaltungen mit sog. Saugdrosselspulen. Der Arbeit wird eine Einteilung der Sechsphasenschaltungen vorangestellt.

Einleitung.

Zur besseren Übersicht sei eine prinzipielle Klassifikation der Sechsphasenschaltungen für Großgleichrichteranlagen vorausgeschickt. Wir unterscheiden Grund-, Halbierungs- und Drittelungsschaltungen. Zur Erläuterung lassen wir 3 Beispiele Bild 1, 2 und 3 folgen, bei welchen zur Vereinfachung wechselstromseitig alle Ohmschen und induktiven Spannungsabfälle vernachlässigt werden.



Primärseitig seien die Wicklungen des dreischenkligen Transformators in Dreieck, sekundärseitig in Doppelstern angeordnet. Die Enden der 6 Sekundärphasen gehen überall direkt zu den Anoden, die Anfänge bei Bild 1 zum Nulleiter N, bei Bild 2 und 3 zu den 2 bzw. 3 Teilnulleitern N_1, N_2, N_3. In letztere sowie in den

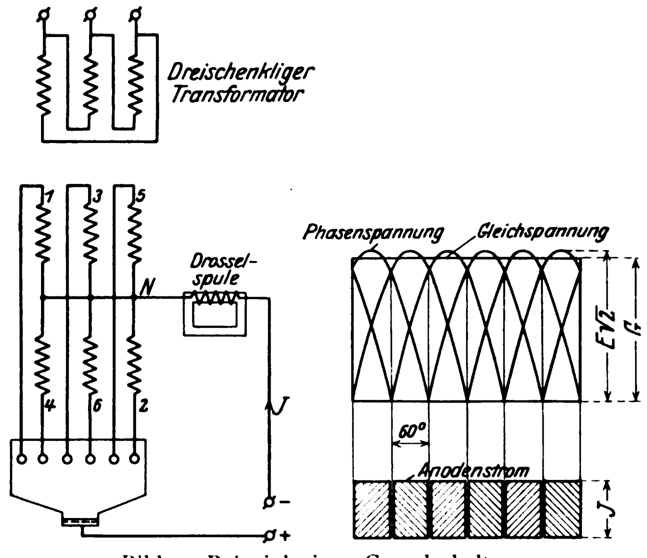


Bild 1. Beispiel einer Grundschaltung.

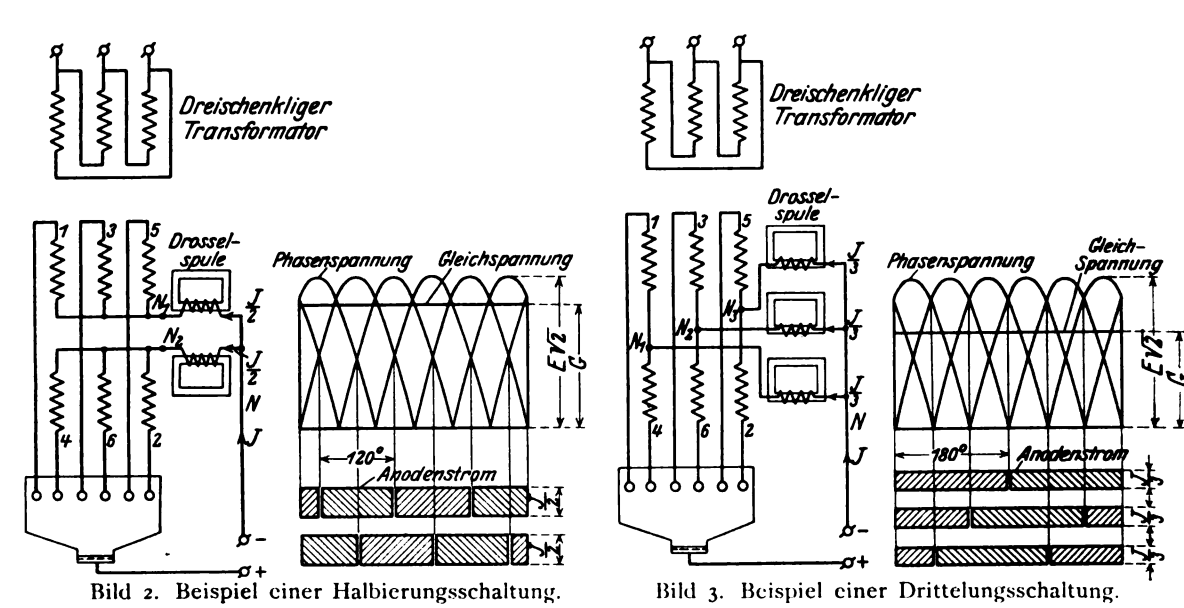


Bild 2. Beispiel einer Halbierungsschaltung. Bild 3. Beispiel einer Drittelungsschaltung.

Nulleiter N Bild 1 ist je eine unendlich große Drosselspule eingebaut; diese halten die durch sie fließenden Ströme zeitlich konstant. Aus Symmetriegründen wird jeder Teilnulleiter in Bild 2 die Hälfte, in Bild 3 einen Drittel des Gleichstromes J im Gleichstromnetz führen.

Man erkennt: Bei der Schaltung Bild 2 zerfällt der Gleichrichter in 2 parallel arbeitende Dreiphasengleichrichter, bei der Schaltung Bild 3 in 3 parallel arbeitende Zweiphasengleichrichter. Die Teilgleichrichter sind wechselstromseitig in der Spannung gegeneinander phasenverschoben. Die Schaltung Bild 1 entspricht insofern

dem Grundtypus des Sechsphasengleichrichters, als bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle wechselstromseitig jeweils nur eine Anode brennt, während bei den Schaltungen Bild 2 und 3 jeweils zwei bzw. drei Anoden gleichzeitig Strom führen. Die zugehörigen Oszillogramme der Anodenströme zeigen die Bilder 1, 2 und 3.

Die Namengebung: Grund-, Halbierungs- und Drittelungsschaltung für die 3 Schemata Bild 1, 2, 3 ist damit erklärt. Die Tabelle 1 enthält eine Übersicht über den Scheitelwert des Anodenstromes, die Brenndauer, die Zahl der gleichzeitig brennenden Anoden und über das Verhältnis $\frac{G}{E\sqrt{2}}$ der Gleichspannung G zum Scheitelwert $E\sqrt{2}$ der sekundären Phasenspannung.

Tabelle 1.

	Grundschaltung	Halbierungs-schaltung	Drittelungs-schaltung
Scheitelwert des Anodenstromes	J	$\frac{J}{2}$	$\frac{J}{3}$
Brenndauer	60°	120°	180°
Zahl der gleichzeitig brennenden Anoden	1	2	3
$\frac{G}{E\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\pi} = 0{,}955$	$\frac{3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}827$	$\frac{2}{\pi} = 0{,}637$

Werden die in Tabelle 1 vernachlässigten Spannungsabfälle wechselstromseitig mitberücksichtigt, so treten weitere charakteristische Unterschiede zwischen den 3 Schaltarten hervor. Hierüber soll nicht im einzelnen berichtet werden, wohl aber seien die Vorzüge, die die Halbierungs- und Drittelungsschaltungen gegenüber den Grundschaltungen im allgemeinen aufweisen, kurz zusammengestellt.

Die Scheinleistung des Transformators hat bei gleicher Gleichleistung im allgemeinen für die Grundschaltungen die größten, für die Halbierungsschaltungen die kleinsten Werte. Die Scheinleistung des Transformators für die Drittelungsschaltungen liegt zwischen diesen Werten. Vergleicht man die Schaltungen von dem Gesichtspunkt aus, daß sie gleiche Vollastspannungen und gleichen Spannungsabfall aufweisen sollen, so benötigen die Drittelungsschaltungen die größten Streureaktanzen und haben zugleich die kleinsten Kurzschlußströme. Die Grundschaltungen sind in dieser Hinsicht am schlechtesten dran. Die Halbierungs- und insbesondere die Drittelungsschaltungen können mit sehr kleinem Spannungsabfall gleichstromseitig und hohem Leistungsfaktor im Primärnetz gebaut werden.

Die Welligkeit des Gleichstromes und der Gleichspannung steht bei den Halbierungsschaltungen im allgemeinen zwischen den höheren Werten bei den Grundschaltungen und den niedrigeren bei den Drittelungsschaltungen.

Zu den Grundschaltungen gehört die Mehrzahl der bekannten Schaltarten, so Dreieck-Stern, Stern-Zickzack, Stern-Gabel, Stern-Polygon usw.

Die in den Bildern 2 und 3 dargestellten Schaltungen werden praktisch nicht ausgeführt, da die Drosselspulen wegen der Vormagnetisierung der sie durchfließenden Gleichströme viel zu groß ausfallen würden. Man vereinigt sie daher zu zwei- bzw. dreischenkligen Drosselspulen, bei denen sich die Gleichströme in magnetischer Hinsicht aufheben (sog. Saugdrosselspulen).

Weitere Halbierungs- und Drittelungsschaltungen erhält man durch geeignete induktive Kopplungen der Anodenströme. Man kann bei Halbierungs- und Drittelungsschaltungen den Gleichstrom im Gleichstromnetz selbst zur Unterdrückung der Vormagnetisierung der Drosselspulen, z. B. derjenigen in Bild 2 und 3 benützen, indem man ihn im richtigen Sinne und mit der entsprechenden Windungszahl über die betreffenden Drosselspulen führt.

In der Arbeit ,,Die Strom- und Spannungsverhältnisse der Großgleichrichter"[1] ist gezeigt worden, daß unter den dort gemachten Annahmen bei jeder Sechsphasenschaltung die Stromspannungscharakteristik aus einzelnen Geradenstücken und Ellipsenbogen zusammengesetzt ist und die Brenndauer einer Anode bis auf 360⁰ anwachsen

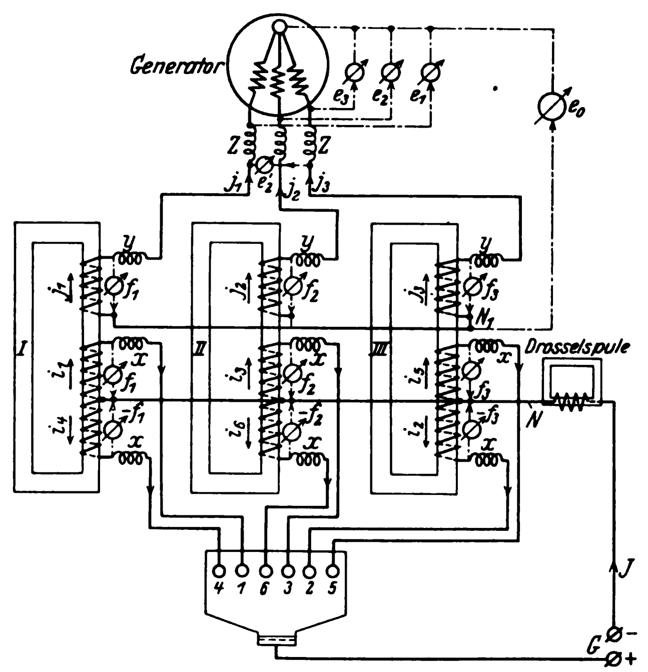


Bild 4. Sechsphasenanlage mit drei Einphasentransformatoren.

kann. Die Einteilung in Grund-, Halbierungs- und Drittelungsschaltungen läßt sich aus jenen allgemeinen Betrachtungen folgendermaßen herleiten. Vernachlässigt man die Ohmschen Widerstände und die Streureaktanzen wechselstromseitig, so wird der Kurzschlußstrom im Gleichstromnetz unendlich groß und eine bestimmte Gerade der Stromspannungscharakteristik muß parallel zur X-Achse ins Unendliche verlaufen. Ist das nun in der Bezeichnung der erwähnten Arbeit die Gerade $n = 2$, so nennen wir die Schaltung Grundschaltung, bei $n = 3$ Halbierungs- und bei $n = 4$ Drittelungsschaltung. Bei den zu diesen Geraden gehörigen Betriebszuständen brennen dann nur eine bzw. zwei bzw. drei Anoden gleichzeitig, die Brenndauer ist 60^0 bzw. 120^0 bzw. 180^0 und die Gleichspannungen können nicht unter bestimmte, in Tabelle 1 angeführte Werte fallen. Das sind die Merkmale der früheren Einteilung. Bei den praktischen naturgemäß mit Streureaktanzen ausgestatteten Anlagen sind es die obigen Geraden $n = 2$ bzw. $n = 3$ bzw. $n = 4$, auf denen betriebsmäßig gearbeitet wird und die von ihrem Schnittpunkt mit der Ordinatenachse bis zum Vollastpunkt einen kleinen, in den Grenzen von etwa 3 bis 10% liegenden Spannungsabfall aufweisen.

[1] Walter Dällenbach und Eduard Gerecke, Die Strom- und Spannungsverhältnisse der Großgleichrichter. Arch. f. Elektrot. Bd. XIV, 1924, S. 171. Diese Arbeit wird hier kurz mit Str.-Spg. bezeichnet werden.

Verwendet man zur Umformung des Drehstromes in Sechsphasenstrom, wie dies in Amerika bei reinen Drehstromanlagen vielfach üblich ist, drei Einzeltransformatoren statt einen dreischenklig-verketteten Transformator, so erhält man bei primärer Stern-, sekundärer Doppelsternschaltung eine Halbierungsschaltung. Irgendwelche Drosselspulen sind dazu nicht nötig. Jeder Transformator hat eine Primär- und 2 Sekundärwicklungen, letztere bilden ein reguläres Sechsphasensystem. Bild 4 gibt das Schema einer Anlage mit Generator, Transformatoren und Gleichrichter. Die Theorie dieser Schaltung ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Ihr Aufbau ist der gleiche wie in Str.-Spg., ausgehend vom einfachsten Falle nähern wir uns stufenweise den praktischen Verhältnissen.

1. Der einfachste Fall.

Wir vernachlässigen zunächst alle Spannungsabfälle wechselstromseitig, sowie die Magnetisierungsströme der 3 Transformatoren, wir nehmen also deren Induktivität unendlich groß an. Im Gleichstromkreis sehen wir zudem eine unendlich große Drosselspule zur Unterdrückung der Welligkeit vor.

Wegen der vollkommenen Symmetrie der Schaltung sind die Kurvenformen der Anodenströme unter sich kongruent. Die totalen sekundären Ampèrewindungen jedes Transformators bestehen daher aus zwei um 180^0 phasenverschobenen und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Teilwellen und weisen daher keine Gleichstromkomponente auf. Deshalb und wegen des Fehlens des Magnetisierungsstromes ist in jedem Moment auf jedem Transformator die Summe aller Ampèrewindungen gleich Null.

Insbesondere ist der Primärstrom Null, wenn beide Sekundärströme Null sind. Es kann daher nie eine Anode allein brennen, denn dem zugehörigen Primärstrom wäre der Weg über die beiden anderen Transformatoren verriegelt. Die Schaltung ist also sicher keine Grundschaltung.

Da die Summe der Primärströme jederzeit Null ist, müssen die 3 Sekundärphasen 1–3–5 zusammen stets ebensoviel Strom führen wie die Gegenphasen 4–6–2. Da aber die Summe aller Anodenströme jederzeit gleich dem Gleichstrom J ist, so muß in jedem der 2 erwähnten Dreiphasensysteme 1–3–5 bzw. 4–6–2 die Summe der drei Ströme gleich dem halben Gleichstrom sein. Es führen also stets in jedem der 2 Dreiphasensysteme mindestens eine Anode Strom.

Andererseits können bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle wechselstromseitig zwei oder sogar drei Sekundärphasen desselben Dreiphasensystems nie gleichzeitig brennen. Denn dann müßten die zugehörigen sekundären und also auch die entsprechenden primären Phasenspannungen der Transformatoren gleich sein, was die Gleichheit der zugehörigen Generatorphasenspannungen nach sich zieht. Das ist aber, wenn überhaupt, nur in einzelnen Zeitpunkten der Fall. Also folgt zwingend, daß stets in jedem der 2 Dreiphasensysteme eine und nur eine Anode Strom führt, und zwar sind es diejenigen, die momentan die höchsten Potentiale gegenüber dem Nulleiter N aufweisen.

e_1, $(-e_3)$, e_2, $(-e_1)$, e_3, $(-e_2)$ bedeuten in Bild 5 die Leerlaufspannungen der Anoden 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegen den Sternpunkt N. Zur Zeit $x = x_1$ führen die Anoden 1 und 2 je den halben Gleichstrom, der entsprechende Primärstrom fließt vom Generator über die Transformatoren I und III. Die Brenndauer einer Anode ist 120^0, der Scheitelwert des Anodenstromes gleich der Hälfte des Gleichstromes. Die Oszillogramme der Anoden- und Netzströme zeigt ebenfalls Bild 5, und zwar für gleiche Windungszahlen primär- und sekundärseitig. Aus allem geht hervor, daß die behandelte Schaltung eine Halbierungsschaltung ist.

Zur Zeit $x = x_1$ wird in dem aus den beiden Generator- und den Transformatorphasen I und III gebildeten Kreise (Bild 4) die treibende EMK $(e_1 - e_3)$ durch die beiden notwendig entgegengesetzt gleichen Transformatorfeldspannungen f_1 und



f_3 balanziert. Der Momentanwert g (x) der Spannung der brennenden Anoden 2 und 1 gegenüber dem Nullpunkt N, die sog. Anodenspannung, ist daher

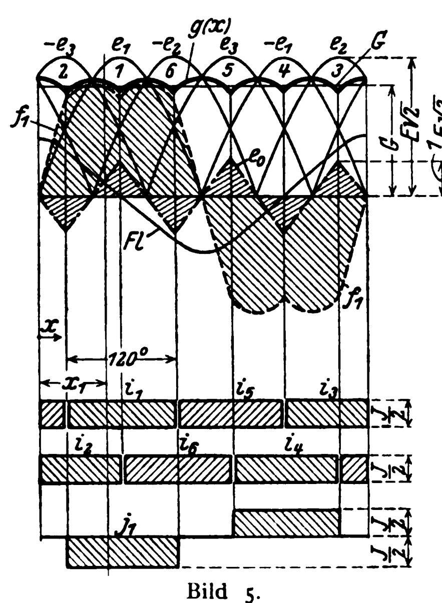


Bild 5.
Oszillogramme bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle wechselstromseitig.
Anodenspannung g (x), Gleichspannung G, Feldspannung f_1, Spannung e_0, Fluß im Eisen Fl, Anodenströme $i_1 \ldots i_6$, Netzstrom j_1.

$$g(x) = f_1 = -f_3 = \frac{e_1 - e_3}{2}, \qquad (1)$$

gleich dem arithmetischen Mittel der zugehörigen sekundären Leerlaufphasenspannungen. Bild 5 zeigt den Verlauf von g (x). Der Mittelwert G der Gleichspannung wird

$$G = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot E\sqrt{2}\,, \qquad (2)$$

wo E der Effektivwert der sekundären Phasenleerlaufspannung ist. Die Feldspannung f_2 findet man nach Kirchhoff zur Zeit $x = x_1$ zu

$$f_2 = \frac{3}{2}\cdot e_2. \qquad (3)$$

Interessant ist, wie f_1 in Bild 5 aus der Sinusform umgewandelt worden ist in eine mehr der Rechteckform sich nähernde Kurve mit 2 je 60° breiten Kuppen.

Die Potentialschwankung e_0 zwischen Transformator- und Generatorsternpunkt $e_0 = e_1 - f_1$ (Bild 4 und 5) enthält nur Harmonische 3n-facher Netzfrequenz (n = 1, 3, 5 ....). Direkte Erdung des primären Transformatornullpunktes bei geerdetem Generatornullpunkt ist nicht zulässig, da sonst durch das Einfügen des primären Nulleiters eine Grundschaltung resultiert. Einer Erdung über genügend große Ohmsche oder induktive Widerstände steht nichts im Wege. Die Spannung e_0 bewirkt einen zusätzlichen aber praktisch bedeutungslosen kapazitiven Ladestrom.

Für die Scheinleistung des Transformators sind die Eisen- und Kupferverluste maßgebend. Letztere sind durch die Effektivwerte A des Anoden- bzw. des Netzstromes N gegeben. Da der magnetische Fluß im Transformatoreisen nicht sinusförmig verläuft, müssen die Hysteresis- und Wirbelstromverluste getrennt berechnet werden. Mit guter Annäherung hängen erstere vom Scheitelwert des magnetischen Flusses, letztere vom Effektivwert der Feldspannung ab, denn die Oszillogramme der Wirbelströme verlaufen ungefähr wie die Feldspannung. Das Oszillogramm des magnetischen Flusses ist die Integralkurve der Feldspannung, siehe Bild 5. Eine sinusförmige Spannung vom Effektivwert F erzeugt den gleichen maximalen Fluß wie f_1, wenn die Beziehung gilt:

$$\int_0^{\pi} F\sqrt{2}\sin x\,dx = \int_0^{\pi} f_1\,dx. \qquad (4)$$

Setzt man f_1 ein, so wird

$$\frac{F}{E} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 1{,}067\ldots \qquad (5)$$

Der Effektivwert F' von f_1:

$$\frac{F'}{E} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}} = 1{,}021\ \ldots \qquad (6)$$

ist kleiner als F. Es läßt sich nun eine sinusförmige Spannung vom Effektivwert F_r finden, die, an den Transformator angelegt, die gleichen totalen Eisenverluste erzeugt wie die wirkliche Feldspannung f_1. F_r liegt zwischen F und F' und läßt sich

in jedem praktisch vorliegenden Fall aus den bekannten Hysteresis- und Wirbelstromverlusten der verwendeten Blechsorte aus F und F′ berechnen. Da nun die Hysteresis- die Wirbelstrom-Verluste bei weitem überwiegen, genügt es praktisch vollkommen, F_r durch F zu ersetzen. Man rechnet damit etwas zu ungünstig. Jeder der drei Einphasentransformatoren kann daher gerechnet werden wie einer für sinusförmige Spannung mit der mittleren Scheinleistung

$$\frac{1}{2}\left\{2\,F A + F N\right\}.$$

Die Verhältniszahlen $\frac{P_{II}}{P}$, $\frac{P_I}{P}$, $\frac{P_m}{P}$ der sekundären, primären und mittleren Scheinleistungen aller 3 Transformatoren zusammen im Vergleich zur Gleichleistung $P = G \cdot J$ sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_{II}}{P} &= \frac{6\,F A}{G J} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\left(\frac{F}{E}\right) = 1{,}58\ \ldots \\ \frac{P_I}{P} &= \frac{3\,F N}{G J} = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{F}{E}\right) = 1{,}12 \\ \frac{P_m}{P} &= \frac{P_I + P_{II}}{2P} = 1{,}35 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{J} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}289 \\ \frac{N}{J} &= \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}409 \\ \frac{G}{E} &= \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = 1{,}17 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Der Leistungsfaktor des Netzes ist $\frac{3}{\pi} = 0{,}955$.

2. Die Überlappung.

Wir führen jetzt die konzentriert gedachten sekundären und primären Phasenstreureaktanzen X bzw. Y sowie die Generatorphasenstreureaktanz Z ein. Sie beziehen sich auf die Frequenz des Wechselstromnetzes. Solange nur zwei Phasen gleichzeitig brennen, gelten sinngemäß die Überlegungen von Kap. 1. Für die zur Zeit x_1, Bild 6, fließenden 3 Anoden- und Netzströme i_1, i_2, i_3 bzw. j_1, j_2, j_3 gilt:

$$i_1 + i_2 + i_3 = J, \qquad (9)$$

$$i_1 = -j_1, \quad i_2 = +j_3, \quad i_3 = -j_2, \qquad (10)$$

$$j_1 + j_2 + j_3 = 0. \qquad (11)$$

Aus (11) folgt $i_1 + i_3 = i_2$ und daher

$$i_2 = i_1 + i_3 = \frac{J}{2} \qquad j_3 = +\frac{J}{2}. \qquad (12)$$

Während der Überlappung der Anoden 1 und 3 führen also Anode 2 und die zugehörige Netzphase den halben Gleichstrom. Schreibt man

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= k & i_3 &= \frac{J}{2} - k \\ j_1 &= -k & j_2 &= -\frac{J}{2} + k \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

so lenkt man die Aufmerksamkeit auf den zwischen den Phasen 1 und 3 zirkulierenden Kurzschlußstrom k, der i_1 zum Wert $\frac{J}{2}$ aufbaut und i_3 bis auf Null herunterdrückt (Bild 7).

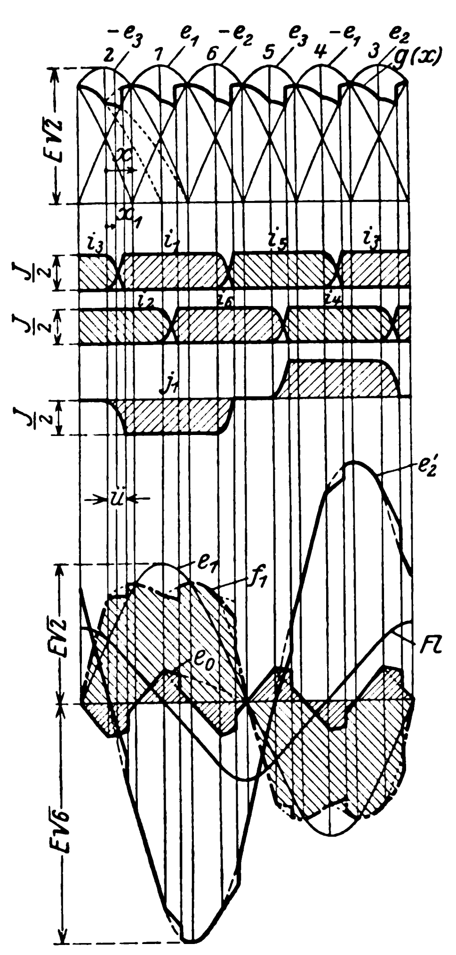


Bild 6. Oszillogramme für ü = 20°.
Anodenspannung g(x), Anodenströme $i_1 \ldots i_6$, Netzstrom j_1, Transformatorfeldspannung f_1, Fluß im Eisen Fl, verkettete Klemmenspannung e_2', Spannung e_0.

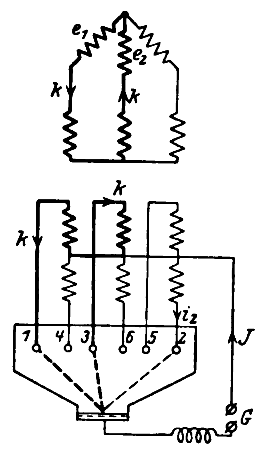


Bild 7. Verlauf der Kurzschlußbahn während der Überlappung der Phasen 1 und 3.

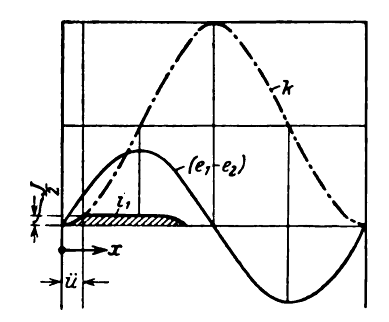


Bild 8. Kurzschlußstrom k und Anodenstrom i_1 für ü = 20°.

Die Anodenspannung g(x) ist um die Spannungsabfälle an den Reaktanzen X kleiner als die Transformatorfeldspannungen:

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= f_1 - X \cdot \frac{di_1}{dx} = f_1 - X \cdot \frac{dk}{dx} \\ g(x) &= f_2 - X \cdot \frac{di_3}{dx} = f_2 + X \cdot \frac{dk}{dx} \\ g(x) &= -f_3 - X \cdot \frac{di_2}{dx} = -f_3 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Für die 3 Kreise: Generatorphase — Transformatorphase — Voltmeter e_0 — in Bild 4 findet man:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= e_0 + f_1 - (Y+Z)\frac{dj_1}{dx} = e_0 + f_1 + (Y+Z)\frac{dk}{dx} \\ e_2 &= e_0 + f_2 - (Y+Z)\frac{dj_2}{dx} = e_0 + f_2 - (Y+Z)\frac{dk}{dx} \\ e_3 &= e_0 + f_3 - (Y+Z)\frac{dj_3}{dx} = e_0 + f_3 \\ 0 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}\right| \qquad (15)$$

also, wird:

$$e_1 - e_2 = (f_1 - f_2) + 2(Y+Z)\frac{dk}{dx}$$

und nach Gleichung (14)

$$e_1 - e_2 = 2[X+Y+Z]\frac{dk}{dx}. \qquad (16)$$

Die treibende EMK ($e_1 - e_2$) der Kurzschlußbahn Bild 7 wird also durch die Spannungsabfälle an den Reaktanzen 2 X, 2 Y, 2 Z balanziert.

Schließt man in dem Zeitpunkt der Spannungsgleichheit der Generatorphasen 1 und 2 bei offenen Sekundärwicklungen die Sekundärphasen 1 und 3 unter sich kurz (Bild 7), so tritt der in Bild 8 während einer vollen Periode gezeichnete Strom k auf. Dessen Wechselkomponente eilt der treibenden Spannung $e_1 - e_2 = E\sqrt{2}\sqrt{3}\sin x$ um 90° nach und hat den Scheitelwert $\frac{E\sqrt{6}}{2[X+Y+Z]}$, weshalb k sich ergibt zu

$$k = \frac{E\sqrt{6}}{2[X+Y+Z]}\cdot(1-\cos x). \qquad (17)$$

Der Anodenstrom i_1 folgt der Kurve k bis zum Wert $\frac{J}{2}$ am Ende der Überlappungszeit ü:

$$\frac{J}{2} = \frac{E\sqrt{6}}{2[X+Y+Z]}(1-\cos ü) = \frac{E\sqrt{6}}{[X+Y+Z]}\sin^2\left(\frac{ü}{2}\right), \qquad (18)$$

woraus folgt:

$$\sin\left(\frac{ü}{2}\right) = \sqrt{\frac{J[X+Y+Z]}{2E\sqrt{6}}}. \qquad (19)$$

Bild 6 gibt die Oszillogramme der Anoden- und Netzströme.

Durch Auflösen der Gleichungen (14), (15) und (16) findet man

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= -\frac{3}{4}\cdot e_3 \\ f_1 &= g(x) + \frac{X}{X+Y+Z}\cdot\frac{e_1-e_2}{2} \\ f_2 &= g(x) - \frac{X}{X+Y+Z}\cdot\frac{e_1-e_2}{2} \\ f_3 &= -g(x) \\ e_0 &= \frac{1}{4}\cdot e_3 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Bild 6 zeigt die daraus konstruierten Oszillogramme der Anodenspannung g(x), der Feldspannung f_1 und der Spannung e_0, sowie der verketteten primären Klemmenspannung e_2'. Die kleinen in der verketteten Spannung e_2' auftretenden Zwickel bestätigen, daß die Generatorreaktanzen nur während der Überlappungszeiten in Tätigkeit treten.



Die Anodenspannung $g(x)$ wird während der Überlappungszeit ü um den Betrag

$$\frac{e_1 - e_3}{2} - \left(-\frac{3}{4} e_3\right) = \frac{e_1 - e_2}{4} = \frac{E\sqrt{2}\sqrt{3}\sin x}{4}$$

herabgesetzt gegenüber ihrem früheren Wert in Abschnitt 1. Der Mittelwert G der Gleichspannung sinkt daher um

$$G_0 - G = \frac{3}{\pi}\int_0^{ü}\frac{E\sqrt{6}\sin x}{4}\,dx = \frac{3}{4\pi}E\sqrt{6}(1-\cos ü) = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot E\sqrt{2}\cdot\sin^2\left(\frac{ü}{2}\right) \qquad (21)$$

oder

$$G_0 - G = G_0\cdot\sin^2\left(\frac{ü}{2}\right),$$

vom früheren Wert

$$G_0 = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot E\sqrt{2} \qquad (2)$$

ab und läßt sich vermittels Gleichung (19) auch schreiben

$$G_0 - G = \frac{3}{\pi}\cdot\frac{X+Y+Z}{4}\cdot J. \qquad (22)$$

Dieser induktive Spannungsabfall wächst also proportional zum Gleichstrom J und hat den für Halbierungsschaltungen charakteristischen kleinen Wert (vgl. Str.-Spg. S. 198). Der prozentuale induktive Spannungsabfall ε hängt mit ü zusammen durch:

$$\varepsilon = \frac{G_0 - G}{G_0} = \sin^2\left(\frac{ü}{2}\right). \qquad (23)$$

Die Feldspannung f_1 in Bild 6 zeigt während der Überlappungszeiten Abweichungen vom Verlauf von Bild 5, und der Maximalwert des magnetischen Flusses im Eisen (Bild 6) wächst mit zunehmender Belastung. Der Effektivwert der äquivalenten Sinusspannung, die den gleichen maximalen Fluß erzeugen würde wie f_1, folgt durch Integration zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{F}{E} = \sigma = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}(1+\cos ü) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\varepsilon \\ \sigma = 1{,}067 + 0{,}433\cdot\varepsilon \qquad \text{für } ü \leqq 30^0\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Die Spannung F soll als maßgebend für die Eisenverluste und also auch für die Scheinleistungen der Transformatoren betrachtet werden.

Die Effektivwerte A und N der Phasenströme werden zufolge der günstigeren Kurvenform bei Überlappung etwas kleiner als in Abschnitt 1, nämlich:

$$\frac{A}{J} = \frac{N}{\sqrt{2}\cdot J} = \frac{\sqrt{1 - 3\cdot\psi(ü)}}{2\sqrt{3}} \approx \frac{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{ü}{\pi}}{2\sqrt{3}} \qquad (25)$$

ü im Bogenmaß, wo

$$\psi(ü) = \frac{(2+\cos ü)\sin ü - (1 + 2\cos ü)\,ü}{2\pi(1-\cos ü)^2} \approx \frac{2}{15}\cdot\frac{ü}{\pi}$$

ein kleiner fast genau mit ü proportionaler Wert ist (Str.-Spg. S. 181, 183, Bild 8). Für die sekundären, primären und mittleren Scheinleistungen der 3 Transformatoren zusammen im Verhältnis zur Gleichleistung

$$P = GJ$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned}P_{II} = \frac{6FA}{GJ} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-3\cdot\psi(ü)}}{\cos^2\left(\frac{ü}{2}\right)}\cdot\sigma \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{ü}{\pi}}{1-\varepsilon}\cdot\sigma \\ P_I : P_m : P_{II} = 1 : \frac{1+\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = 1 : 1{,}207 : 1{,}414\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Die mittlere Scheinleistung für die hier besprochene Schaltung mit drei Einphasentransformatoren ist σ-mal größer (praktisch 8—9%) als die bekannte Schaltung mit Saugdrosselspule. Dafür wird aber keine solche Drosselspule benötigt. Andererseits ist zufolge der Wachstumsgesetze der Transformatoren der Preis pro kVA bei 3 Einzeltransformatoren etwas größer als bei einem dreischenkligen.

Die Scheinleistung des Generators ist

$$P_g = 3\,N\,E = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 - 3 \cdot \psi(\ddot{u})}}{\cos^2\left(\frac{\ddot{u}}{2}\right)} \cdot P \approx \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{\ddot{u}}{\pi}}{1 - \varepsilon} \cdot P. \tag{27}$$

Die verkettete primäre Klemmenspannung an den 3 Transformatoren sinkt vom Leerlaufwert $E\sqrt{3}$ ab auf $E\sqrt{3}\,\tau$ mit

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{3}{\pi}\,\varkappa\,(1 - \varkappa)\,(2\,\ddot{u} - \sin 2\,\ddot{u})} \tag{28}$$

und

$$\varkappa = \frac{Z}{2\,[X + Y + Z]}.$$

Der Leistungsfaktor des Netzes wird

$$\lambda = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\ddot{u}}{2}\right)}{\sqrt{1 - 3 \cdot \psi(\ddot{u})}} \cdot \frac{1}{\tau}. \tag{29}$$

Im idealen Kurzschluß im Gleichstromnetz, wobei der Lichtbogenabfall vernachlässigt wird, ist die Brenndauer der Anoden 360° und die Kurvenform der Anodenströme ist die gleiche wie die des Stromes k im Bild 8. Der Kurzschlußstrom J_k im Gleichstromnetz beträgt hierbei

$$J_k = \frac{6\,E\sqrt{2}}{X + 2\,Y + 2\,Z}$$

und die Netzphasen führen Ströme vom Effektivwert

$$N_k = \frac{2\,E}{X + 2\,Y + 2\,Z}.$$

3. Der Magnetisierungsstrom.

In diesem Kapitel soll der Magnetisierungsstrom der Transformatoren berücksichtigt werden unter der Annahme konstanter Permeabilität. Die Streureaktanzen X, Y, Z dagegen vernachlässigen wir wieder.

Ist S die Leerlaufreaktanz einer der 3 gleich großen Wicklungen jedes Transformators, so folgt für die Feldspannungen:

$$\left.\begin{aligned} -S\frac{d\,(j_1 + i_1 - i_4)}{dx} &= f_1 = e_1 - e_0 \\ -S\frac{d\,(j_2 + i_3 - i_6)}{dx} &= f_2 = e_2 - e_0 \\ -S\frac{d\,(j_3 + i_5 - i_2)}{dx} &= f_3 = e_3 - e_0 \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Bei offener Gleichstromseite gehorchen die primären Leerlaufströme j_{10}, j_{20}, j_{30} den Gleichungen:

$$e_1 = -S\frac{d\,j_{10}}{dx} \qquad e_2 = -S\frac{d\,j_{20}}{dx} \qquad e_3 = -S\frac{d\,j_{30}}{dx}. \tag{31}$$

Definieren wir ferner einen Strom j aus

$$e_0 = -S\frac{dj}{dx}, \tag{32}$$

so folgt aus diesen Gleichungen

$$j_1 + i_1 - i_4 = j_{10} - j \quad \text{usw.}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} j_1 &= j_{10} - j - (i_1 - i_4) \\ j_2 &= j_{20} - j - (i_3 - i_6) \\ j_3 &= j_{30} - j - (i_5 - i_2) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Durch Addition dieser 3 Gleichungen resultiert

$$3j = -i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 + i_6. \tag{34}$$

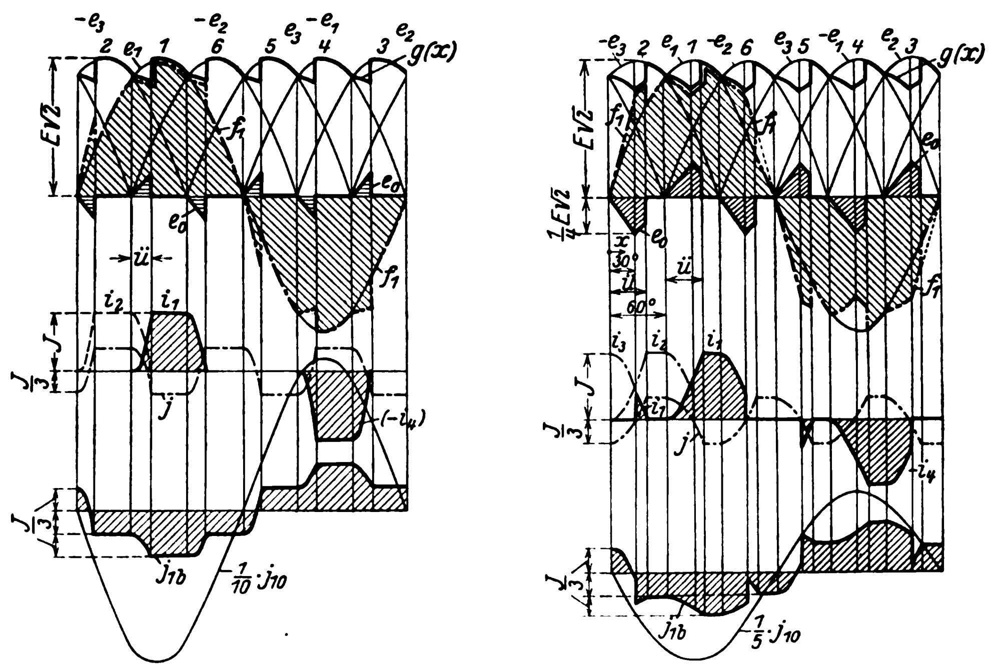


Bild 9. Ströme und Spannungen unterhalb des kritischen Stromes bei ü = 20°.

Bild 10. Ströme und Spannungen unterhalb des kritischen Stromes bei ü = 40°.

Anodenspannung g(x), Spannung e_0, Feldspannung f_1, Anodenströme i_1 und $(-i_4)$, Strom j, Netzströme $j_{1 0}$ und $j_{1 b}$.

Die Summe der Ampèrewindungen pro Transformator ist nicht mehr Null und auch nicht gleich dem Magnetisierungsstrom des Transformators bei Leerlauf. Von diesem subtrahiert sich vielmehr noch ein zusätzlicher Strom j, der durch die Abweichung der Feldspannung gegenüber ihrem Wert bei offener Gleichstromseite hervorgerufen wird. Die Magnetisierungsströme im Leerlauf erzeugen die Gegen-EMKe zu den sinusförmigen Generatorspannungen, der Strom j dagegen eine bei allen drei Transformatoren jederzeit gleiche Wechselspannung mit Harmonischen 3-, 9-, 15- ......facher Netzfrequenz, die sich in einer Potentialschwankung des primären Transformatornullpunktes gegenüber dem Generatornullpunkt äußert.

Wir betrachten jetzt einige typische Belastungsfälle. Bei sehr kleinen Gleichströmen arbeitet die Schaltung wie eine Grundschaltung; die einzelnen Anoden lösen sich der Reihe nach ab, solange die Überlappung ü zweier Anoden den Wert 30° nicht überschreitet, Bild 9. Neben dem Strom j sind dort der von der Belastung herrührende Teil

$$j_{1b} = -(i_1 - i_4) - j \tag{35}$$

des Netzstromes j_1 sowie der Leerlaufstrom j_{10} gezeichnet. Letzterer ist sehr viel größer als j_{1b}. Die Spannungen g(x) und f_1 in Bild 9 ergeben sich ohne weiteres.

e_0 findet man als Differenz von e_1 und f_1 und man überzeugt sich leicht, daß die Kurve e_0 tatsächlich die Differentialkurve von j, also Gleichung (32) erfüllt ist.

Wächst ü über 30° hinaus, so erreicht bei $x = 30°$ in Bild 10 die Spannung f_1 der Anode 1 den Wert g(x), diese nimmt alsdann Strom auf. Vor $x = 30°$ brennen die Anoden 3 u. 2, nachher würden die Phasen 3, 2 u. 1 gleichzeitig brennen. Da aber keine Streureaktanzen zugegen sind, können nicht zwei Phasen des gleichen sekundären Dreiphasensystems, wie 3 u. 1, gleichzeitig Strom führen. Der Strom der Phase 3 geht daher bei $x = 30°$ plötzlich auf Phase 1 über (Bild 10), alsdann brennen die Phasen 2 und 1 gleichzeitig, worauf Phase 1

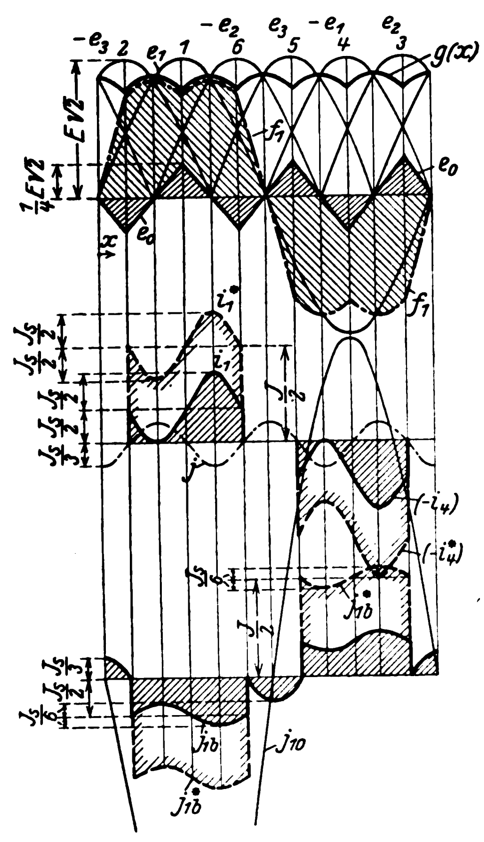


Bild 11. Ströme und Spannungen bei und oberhalb des kritischen Stromes ü = 60°.
Anodenspannung g(x), Spannung e_0, Feldspannung f_1, Anodenströme i. und $(-i_4)$, Strom j, Netzströme j_{10} und j_{1b}.

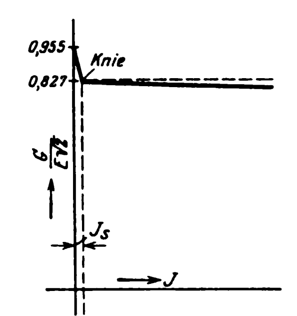


Bild 12. Stromspannungs-Charakteristik.
- - - - - ohne Streureaktanzen,
——— mit Streureaktanzen.

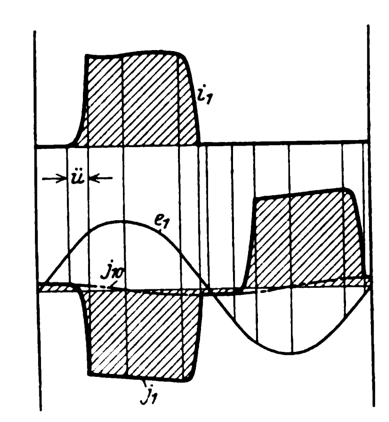


Bild 13. Anodenstrom und Netzstrom unter Berücksichtigung des Magnetisierungsstromes und der Streureaktanzen.

bei $x = ü$ erlischt. Nun brennt Phase 2 zunächst allein weiter, bis bei $x = 60°$ Phase 1 abermals zündet. Wir haben den typischen Fall des Anodenstromes mit V o r l ä u f e r. Die Ströme i_1, i_4, j, j_{1b} und j_{10}, sowie die Spannungen g(x), f_1 und e_0 sind in Bild 10 zusammengestellt.

Besonderes Interesse verdient der Grenzfall ü = 60° in Bild 11. Der Anodenstrom brennt dauernd während 120°, wir sind bei der Arbeitsweise der Halbierungsschaltungen angelangt. Der aus 6 Kuppen bestehende Strom j erzeugt die spitzenförmige Spannung e_0. Diese sowie f_1 und g(x) haben die in Bild 11 dargestellte Form angenommen und ändern sich nicht mehr, wenn der Gleichstrom weiter ansteigt. Die Anodenstromkurve i_1^* verschiebt sich dabei immer mehr parallel zu sich selbst von der Abszissenachse weg, sie behält stets die schwache Welligkeit unverändert bei und geht erst bei $S = \infty$ in die Form Bild 5 über.

Die Stromspannungs-Charakteristik (Bild 12), die die Gleichspannung G in Funktion des Gleichstromes J darstellt, fällt zunächst vom Leerlaufpunkt $G = \frac{3}{\pi} E\sqrt{2}$ geradlinig und sehr steil ab und geht dann vom „Knie" weg bei $G = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E\sqrt{2}$ horizontal weiter. Sind Streureaktanzen vorhanden, so tritt vom Knie an ein ganz schwacher Spannungsabfall auf (bis zum Vollastpunkt praktisch etwa 3 bis 5%). Die kritische Stromstärke J_s beim Knie ergibt sich leicht aus Bild 11. Da dort

$$e_0 = -\frac{1}{2} E\sqrt{2} \sin x = -S\frac{dj}{dx}$$

und j von $x = 0$ bis $x = 30^0$ um $\frac{J_s}{3}$ ansteigt, folgt durch Integration letzterer Gleichung

$$\frac{J_s}{3} = \Big|j\Big|_0^{30} = \frac{E\sqrt{2}}{2S}\int_0^{30^0} \sin x \cdot dx = \frac{E\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{4S}$$

und

$$J_s = \frac{3(2-\sqrt{3})}{4} \cdot \frac{E\sqrt{2}}{S} = 0{,}284 \cdot \frac{E}{S}\,. \tag{36}$$

Besonders interessiert das Verhältnis J_s/J des kritischen Stromes zum Vollastgleichstrom, das wir sogleich angenähert für den Fall mit Streureaktanzen berechnen wollen. Drückt man in Gleichung (36) vermittels Gleichung (24) E durch F aus und berücksichtigt man Gleichung (25)

$$N = \frac{J}{\sqrt{6}}\sqrt{1 - 3 \cdot \psi(\ddot{u})},$$

so erhält man

$$\frac{J_s}{J} = \frac{3(2-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{E}{SJ} = \frac{3(2-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{1-3\cdot\psi(\ddot{u})}}{\sigma} \cdot \frac{\left(\frac{F}{S}\right)}{N}\,. \tag{37}$$

Wählt man $\ddot{u} \approx 23^0$ entsprechend einem induktiven Spannungsabfall $\varepsilon = 4\%$ [Gleichung (23)] und bezeichnet man mit μ das Verhältnis des primären Magnetisierungsstromes $\left(\frac{F}{S}\right)$ zum Vollaststrom N, so wird aus Gleichung (37)

$$\frac{J_s}{J} = 0{,}104 \cdot \mu\,. \tag{38}$$

Beträgt der Magnetisierungsstrom 6% des Vollaststromes primärseitig, so ist der kritische Strom J_s 6‰ des Vollastgleichstromes, also sehr klein.

Der allgemeinste Fall: Endliche Transformatorinduktivitäten und Streureaktanzen gleichzeitig ist rechnerisch ziemlich umständlich und führt zu keinen neuen wesentlichen Resultaten. Anodenstrom und Netzstrom sind in Bild 13 dargestellt. Bei praktischen Berechnungen verfährt man wie in Str.-Spg. Kap. 4, S. 202. Für den Leistungsfaktor im Primärnetz findet man von $^1/_4$ bis $^6/_4$ Last und einem induktiven Spannungsabfall von $\varepsilon = 4\%$ Werte von etwa 0,90 bis 0,93.

Zum Schluß seien noch einige ähnliche Schaltungen mit drei Einphasentransformatoren erwähnt. Bis jetzt waren Primär- und Sekundärseite in Stern geschaltet. Als weitere elektrische Verkettungsmöglichkeiten bleiben primär △- oder Zickzackschaltung, sekundär Zickzack- oder Gabelschaltung. Dieses sind aber alles Grundschaltungen mit Ausnahme von: primär Zickzack, sekundär Stern. Hierbei ist die Potentialdifferenz e_0 dauernd Null, dagegen die Scheinleistung der Transformatoren um 8% größer als bei Stern/Sternschaltung.



Elektrische Felder einiger Hochspannungskabel.

Von

V. Fock, W. Malyschew und **Alexander Walther** in Leningrad.

Für die Hochspannungsindustrie ist in manchen Fällen eine genaue Kenntnis des von metallischen Leitern gebildeten elektrischen Feldes notwendig. Solche Felder lassen sich oft theoretisch nur schwierig berechnen. Es müßten deshalb die Methoden von nicht unbedeutendem Interesse sein, welche die elektrischen Felder rein experimentell zu messen erlauben. Eine solche Methode ist die der Kapazitätssonde[1], die von N. Semenoff vorgeschlagen und von Anton Walther und A. Protopopow im hiesigen Laboratorium entwickelt worden ist.

Der vorliegende Aufsatz zerfällt in zwei Teile; im ersten werden die neulich im hiesigen Laboratorium mittels der Kapazitätssonde gewonnenen Resultate besprochen, im zweiten Teil wird eines von den gemessenen Feldern theoretisch berechnet[2].

Es wurden hauptsächlich solche Felder untersucht, die für die Kabelindustrie von Interesse waren. Es seien erwähnt:

1. das Feld eines sektorförmigen Drehstromkabels,
2. das Feld eines Einleiterkabels mit verseilter Innenseele.

1. Methodik der Messungen.

Die Idee der Methodik ist die folgende (Bild 1): Wird in das von zwei oder mehreren Elektroden A A gebildete elektrische Feld ein Leiter S gebracht, der so geformt ist, daß er gänzlich in eine Niveaufläche zu liegen kommt, darauf an die Elektroden und an den parallel zu ihnen geschalteten Schieberwiderstand R eine Wechselspannung angelegt und der Schieber C selbst mit dem Leiter S elektrisch verbunden, so wird in diesem Verbindungsleiter D im allgemeinen ein Kapazitätsstrom zirkulieren. Dieser Kapazitätsstrom wird sein Minimum dann erreichen, wenn das Potential des Schiebers demjenigen der Niveaufläche, in der der Leiter S zu liegen kommt, fortwährend gleich sein wird. Schalten wir nun in D einen empfindlichen Strommesser ein, so können wir diese Anordnung zur Ausmessung des Feldes zwischen den Elektroden A—A benutzen. Tatsächlich genügt dazu, die Lage des Schiebers zu bestimmen, bei der der Strom sein Minimum erreichen wird. Dann muß das Potential des Schiebers mit dem Potential desjenigen Teiles des Feldes zusammenfallen, wo der Leiter S, die „Sonde", zu liegen kommt. Eine solche Messung kann in verschiedenen Teilen des Feldes wiederholt werden und dadurch das ganze Feld ausgemessen werden.

Diese Anordnung fällt eigentlich mit derjenigen einer einfachen Kapazitätsbrücke zusammen. Die Kapazitäten werden hier von der Sonde und den entsprechenden Elektroden gebildet. Da der in der Diagonale D fließende Kapazitätsstrom sehr klein ist, muß er mittels einer oder mehrerer Glühkathodenröhren verstärkt werden.

Der verstärkte Strom wird weiter durch ein Telephon geschickt.

Damit die Anordnung richtig arbeitet, sind folgende Vorsichtsmaßregeln unbedingt nötig:

1. Die Sonde muß gänzlich in einer Niveaufläche liegen und dabei von nicht zu kleiner Kapazität sein. In Fällen von zylindrischen Feldern ist als Sonde ein zu der Achse parallel montierter Draht zu gebrauchen, in allgemeinen Fällen von Axialsymmetrie koaxiale Ringe.

---

[1] N. Semenoff und Anton Walther, Zeitschr. f. Phys., **19**, S. 136, 1923.

[2] Der experimentelle Teil der Arbeit ist von Malyschew und A. Walther, der theoretische von V. Fock und W. Malyschew ausgeführt worden.



2. Außer der Sonde selbst müssen alle übrigen Teile der Diagonale D von fremden elektrischen Feldern gründlich elektrostatisch geschützt werden.

Für die Messung des Feldes kann entweder eine bewegliche Sonde angewandt werden, oder es werden eine Reihe von unbeweglichen Sonden in das Feld eingeführt. Im letzteren Fall ist es zu raten, die geometrischen Dimensionen des Feldes so groß wie möglich zu wählen, um der Wechselwirkung der Sonden miteinander möglichst vorzubeugen.

Die Anordnung, von der wir Gebrauch machen, ist in Bild 2 abgebildet. B, B′, B″ sind hier drei das Feld bildende Elektroden (z. B. die drei Innenleiter eines Drehstromkabels). Die an sie angelegte Spannung wird von den Enden des Schieberwiderstandes R sowie von dem Schieber D entnommen. S_1, S_2, S_3 sind die Sonden. Sie können mittels des Umschalters K mit dem Gitter der Glühkathodenröhre verbunden werden. Die Kathode der Röhre ist geerdet. In den Anodenkreis ist das Telephon T eingeführt. Alle Zuleitungen von den Sonden zum Gitter der Röhre sind durch geerdete Metallröhren geschützt. Der Schieber C ist gleichfalls geerdet. Als Spannungsquelle diente ein Röhrengenerator, dessen Frequenz zwischen 500 und 2500 Per/sec verändert werden konnte.

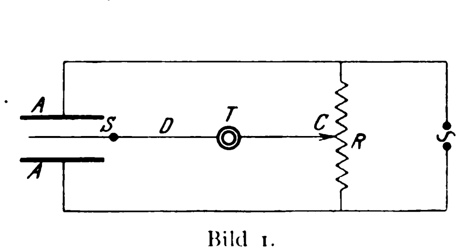


Bild 1.

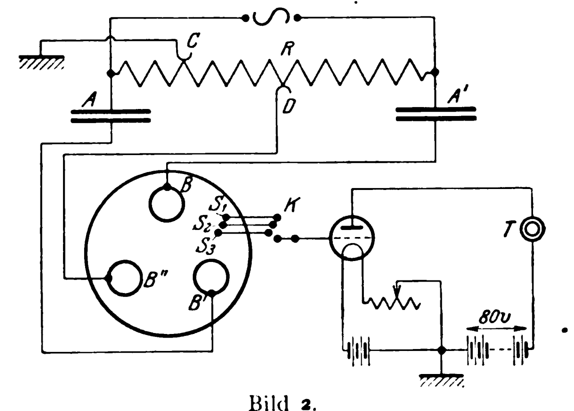


Bild 2.

Die Messungen werden folgendermaßen ausgeführt: Mittels des Umschalters K wird das Gitter der Röhre mit einer beliebigen Sonde verbunden. Dann wird der Schieber C so lange verschoben, bis das Telephon verstummt. Nach der Lage des Schiebers kann dann das Potential der Sonde bestimmt werden.

Was die Genauigkeit der Methodik betrifft, so wird sie hauptsächlich durch mögliche Fehler in der Bestimmung der geometrischen Lage der Elektroden und der Sonden bestimmt. In unseren Messungen betrug sie etwa 2 bis 3 %.

Im folgenden werden wir einige von den gemessenen Feldern ausführlich besprechen. Bei unseren Messungen stellten wir uns keineswegs die Aufgabe, das Problem allgemein zu behandeln, um so mehr als dies schon von anderen Autoren (Atkinson[1], Deutsch[2]) ausgeführt worden ist. Wir beabsichtigten nur einige spezielle für die heimatliche Kabelindustrie wichtige Fragen zu lösen. Außerdem suchten wir durch diese Messungen die Methode der Kapazitätssonde weiter zu begründen und zu erweitern.

2. Das elektrische Feld des Drehstromkabels mit sektorförmigen Kupferseelen[3].

Das Feld wurde nicht in einem natürlichen Kabel, sondern an einem speziell hergestellten Modell gemessen. Die Dimensionen dieses Modells, sowie die Lage

[1] Atkinson, Ref. ETZ 1922, S. 205.

[2] Deutsch, ETZ 1911.

[3] Diese Aufgabe ist auch von Atkinson (ETZ 1922) experimentell behandelt worden. Leider fehlen in seiner Arbeit genaue Angaben über diese Felder, so daß ein zahlenmäßiger Vergleich mit unseren Resultaten unausführbar ist.

der Seelen sind in Bild 3 angeführt. Als Dielektrikum diente Luft. Für die Messung wurden in das Feld eine Reihe von unbeweglichen Sonden eingeführt. Die Lagen der Sonden sind auf Bild 3 mit Kreisen (NN 1—16 ohne Striche) bezeichnet. Es war gar nicht nötig, die Sonden im ganzen Feld zu verteilen; man konnte sich mit $^1/_3$ des Feldes beschränken. Nach der ersten Messung konnte nämlich durch eine Umschaltung der Spannung an den Seelen das Feld sozusagen gedreht und an dieselben Sonden das zweite Drittel des Feldes herangeführt werden, darauf das dritte. Die Lagen, die die Sonden einnehmen würden, wenn nicht das Feld, sondern sie selbst im Feld eine Drehung um den Mittelpunkt als Achse erfahren würden, sind mit denselben Zahlen, wie im ersten Fall, aber mit einem (Drehung um 120°) und zwei (Drehung um 240°) Strichen bezeichnet. Der vollen Gewißheit halber wurden außerdem in das Feld noch einige Kontrollsonden eingeführt.

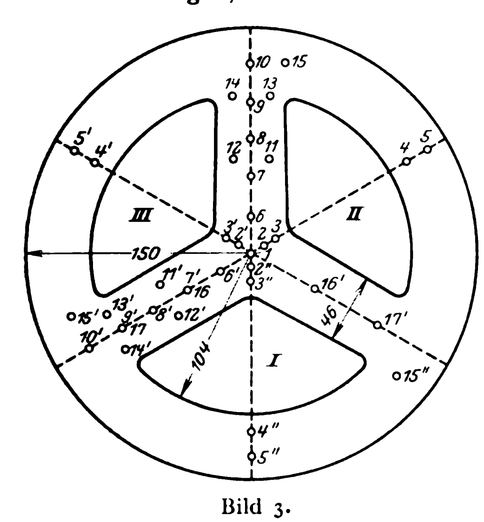
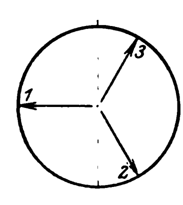


Bild 3.



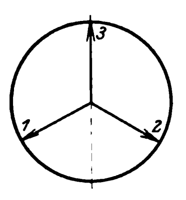


Bild 4.

Da sich die Werte der an die Seelen angelegten Spannungen bei dem Drehstrom fortwährend ändern, konnte nur das Feld für verschiedene Angenblickswerte der Spannungen bestimmt werden. Zwei solche Werte sind von besonderem Inter-

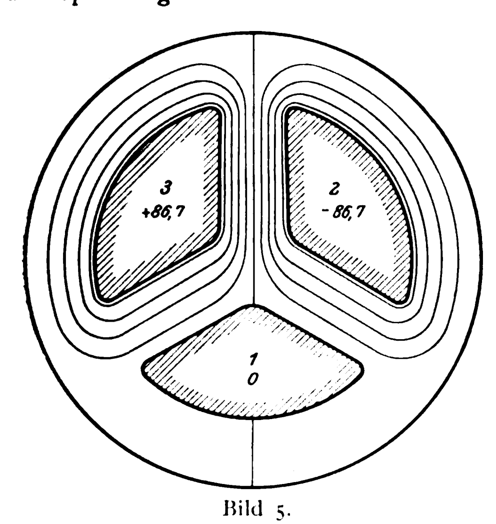


Bild 5.

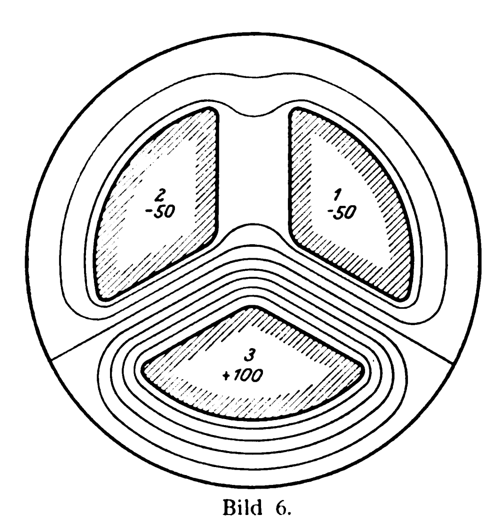


Bild 6.

esse. 1. Eine Seele (1) ist bei 0, die anderen beiden bei $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (— 86,7 %) (2) und $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (+ 86,7 %) (3) der maximalen Spannung (Augenblick 1). 2. Eine Seele ist bei der maximalen Spannung (100%) (3), die anderen (1 und 2) bei $-^1/_2$ (— 50%)

derselben (Augenblick 2). Diese Feldverteilungen wiederholen sich 6mal während einer Periode. Der Abstand zwischen ihnen beträgt $^1/_{12}$ Periode (vgl. Bild 4).

Es wurden für diese beiden Fälle die Potentiale der durch Kreise in Bild 3 gekennzeichneten Punkte gemessen. Die gewonnenen Resultate sind in Tabelle 1 angeführt. Die erste Spalte enthält die Nummern der Sonde, die zweite ihren Abstand vom Zentrum, die dritte den Wert des Potentials (Prozente der maximalen Spannung des Wechselstroms) für den Augenblick 1, die vierte diejenigen, die dem Augenblick 2 entsprechen. Auf Grund dieser Daten wurden die Niveaulinien des Feldes konstruiert. Die entsprechenden Bilder sind in Bild 5 (erster Augenblick) und in Bild 6 (zweiter Augenblick) wiedergegeben[1].

Tabelle 1.
Drehstromkabel mit sektorförmigen Seelen. Spannung in Prozenten der Maximalwerte.

N der Sonde	Abstand vom Zentrum	Augenblick 1	Augenblick 2	N	Abstand vom Zentrum	Augenblick 1	Augenblick 2
1	0	0	0	1′	0	— 1,5	0
2	9,2	21,3	— 12,2	2′	9,2	— 22,0	— 12,7
3	18,4	48,3	— 27,6	3′	18,4	— 48,9	— 29,0
4	119,3	51,3	— 29,8	4′	119,3	— 52,2	— 29,8
5	134,6	23,0	— 13,7	5′	134,6	— 23,4	— 13,4
6	25	— 4,4	— 39,2	6′	25	— 33,0	— 22,5
7	50	0,6	— 46,75	7′	50	— 41,3	— 22,5
8	75	0,6	— 45,7	8′	75	— 41,0	22,4
9	100	— 2,0	— 37,9	9′	100	— 33,0	19,7
10	125	1,1	— 17,5	10′	125	— 15,9	8,6
11	62,5	47,3	— 47,5	11′	62,5	— 65,7	— 16,4
12	62,5	— 44,6	— 47,5	12′	62,5	— 19,7	62,0
13	104	33,3	— 36,8	13′	104	— 48,6	— 10,5
14	104	— 32,7	— 36,5	14′	104	— 16,5	46,7
15	127	21,8	— 16,5	15′	127	— 26,6	— 10,2
16	50	— 42,1	22,5	16′	50	39,3	26,0
17	100	— 34,7	17,5	17′	100	31,0	22,0
				2″	9,2	—	25,3
				3″	18,4	—	57,6
				4″	119,3	—	59,0
				5″	134,6	—	26,5
				15″	127,0	5,1	26,2

3. Das elektrische Feld eines verseilten Einleiterkabels.

Die Messungen wurden wiederum an einem vergrößerten Modell in Luft ausgeführt. Um das Problem als Zweidimensional behandeln zu können, wurden die einzelnen Drähte des Innenleiters als parallele gerade Zylinder ausgebildet, obgleich sie tatsächlich im Kabel in einer Schraubenlinie gelegen sind. Es wurden die Fälle eines 7-drahtigen und eines 19-drahtigen Leiters gewählt. Die Dimensionen der Modelle und die Lage der Leiter sind auf Bild 7 und 8 angeführt.

Die Aufgabe bestand darin, zu ermitteln, um wieviel die Feldstärke an der Oberfläche der Seele von derjenigen abweichen konnte, die man bekam, wenn man die Seele als kreisförmig annahm. Um diese Frage beantworten zu können, war ein

[1] Wegen der Schwierigkeit, die die genaue Eintragung der Niveaulinien bildet, können Bild 5 und 6 nur für eine qualitative, nicht aber für eine quantitative Beurteilung des Feldes dienen.

Ausmessen des ganzen Feldes gar nicht nötig. Es genügte, die Feldstärke an dem äußersten Punkt des Leiters (Bild 7 und 8c) und in der Nähe des Berührungspunktes zwischen zwei benachbarten Leitern zu bestimmen. Im ersten Punkt war die Feldstärke am größten, im zweiten am kleinsten. Es wurde deshalb nur die Potentialverteilung längs den Schnitten OA und OB gemessen.

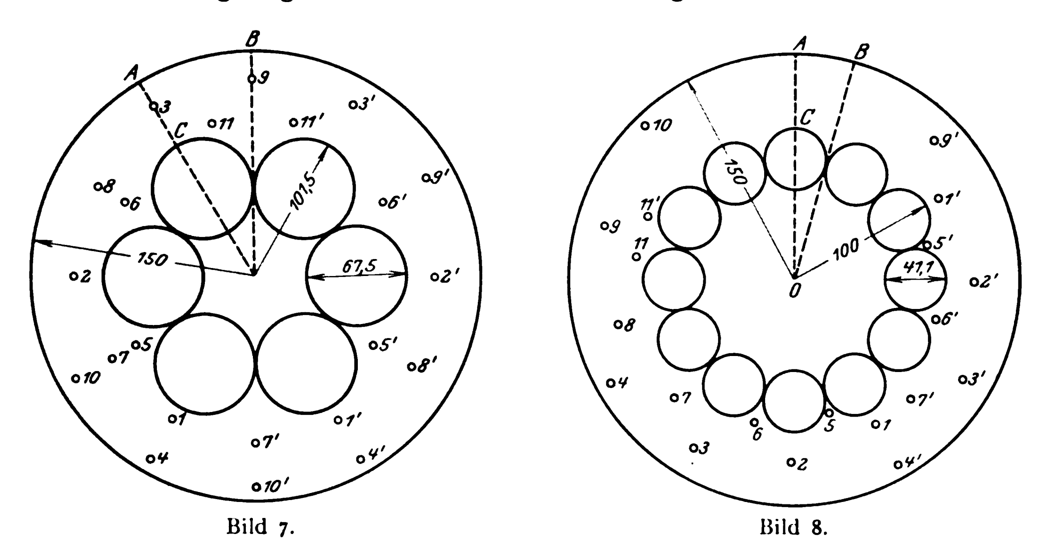


Bild 7. Bild 8.

Um eine Wechselwirkung der Sonden zu verhüten, wurden sie im ganzen Feld verteilt. Die Lage der Sonden ist in Bild 7 und 8 angegeben. Die durch Striche gekennzeichneten dienten für die Kontrolle.

Tabelle 2.
Verseiltes Kabel. Sechs äußere Drähte. Seele bei 100 V. Mantel bei 0.

N der Sonde	Abstand vom Zentrum		V	
	r	lg · r		
1	110	2,041	73,4	Schnitt OA
2	120	2,079	52,3	
3	130	2,114	32,6	
4	140	2,146	16,1	
5	90	1,954	98,0	Schnitt OB
6	98	1,991	89,6	
7	110	2,041	67,8	
8	120	2,079	50,1	
9	130	2,114	33,4	
10	140	2,146	17,5	
11	105	2,021	79,9	

Die Resultate der Messungen sind in der Tabelle 2 (6 äußere Drähte) und 3 (12 äußere Drähte), sowie in Bild 9 und 10 angeführt. In den Bildern ist der Übersichtlichkeit halber r in einem logarithmischen Maßstab abgetragen. Dann müßte, falls die Seele ein Kreiszylinder wäre, die Spannungsverteilung durch eine Gerade wiedergegeben werden. Tatsächlich ist die Feldstärke an den Leitern (Schnitt OA) selbst etwas vergrößert (um etwa 20%), zwischen den Leitern (Schnitt OB) bedeutend vermindert.

Das diesen Fällen entsprechende elektrische Feld ist von einem von uns theoretisch berechnet worden (vgl. § 4), und zwar für die Seele mit 12 äußeren Drähten. Die Resultate sind in der Tabelle 3 (zweite Spalte), sowie in Bild 10

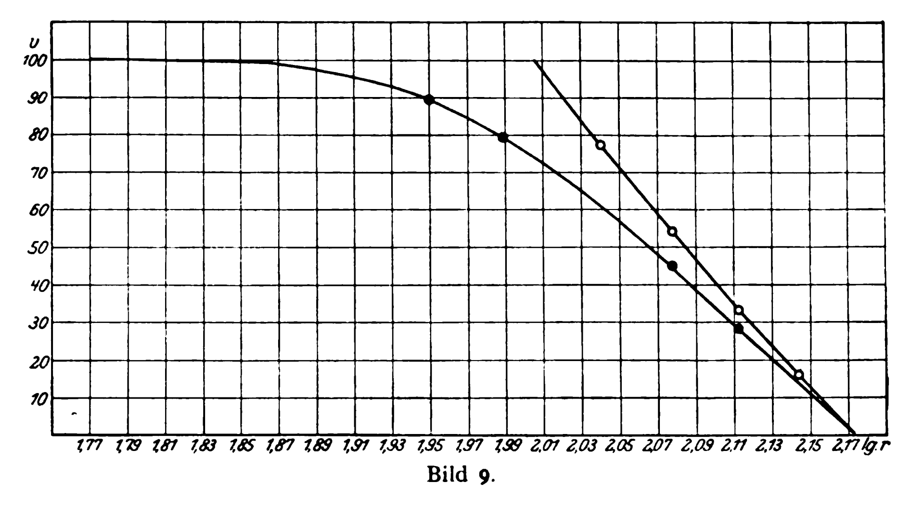


Bild 9.

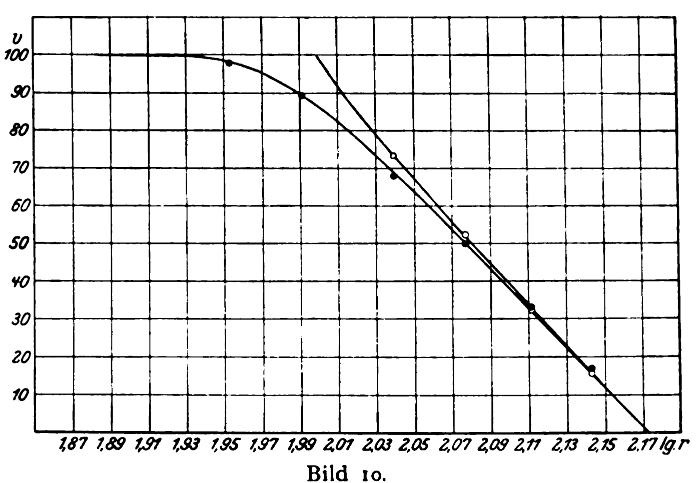


Bild 10.

Tabelle 3.

Verseiltes Kabel. Zwölf äußere Drähte. Seele bei 100 V. Mantel bei O V.

N der Sonde	Abstand vom Zentrum		Spannung Volt	
	r	lg · r	beobachtet	berechnet
1	110	2,041	73,4	73,4
2	120	2,079	52,3	52,0
3	130	2,114	32,6	32,8
4	140	2,1461	16,1	16,0
5	90	1,954	98,0	98,4
6	98	1,991	89,6	89,7
7	110	2,041	67,8	69,0
8	120	2,079	50,1	50,2
9	130	2,114	33,4	32,4
10	140	2,146	17,5	15,9

(Linien, die Punkte entsprechen den gemessenen Werten) angeführt. Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Werten erweist sich als befriedigend. Die von uns ermittelte Erhöhung der Feldstärke an der Oberfläche des Leiters steht in gutem Einklang mit den von Atkinson gemessenen (20 bis 25%) und von Deutsch berechneten (20 bis 24%) Werten.

4. Die theoretische Berechnung des elektrischen Feldes eines verseilten Einleiterkabels.

Um das elektrische Feld eines Kabels zu berechnen, dessen Seele aus einer Reihe von zylindrischen Leitern besteht, genügt es, das Viereck A′ B′ C′ D′ von Bild 11 (Ebene der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$) auf das Rechteck ABCD von Bild 12 (Ebene der komplexen Veränderlichen $w = u + iv$) konform abzubilden.

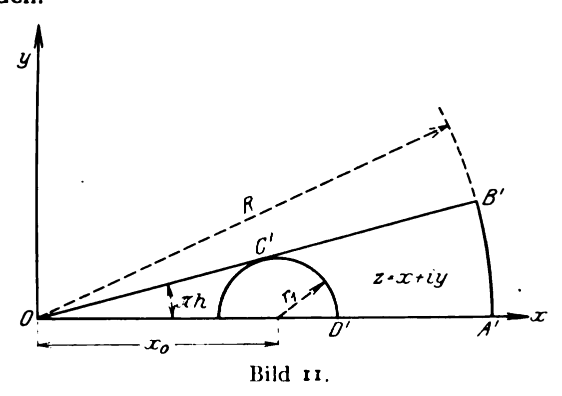


Bild 11.

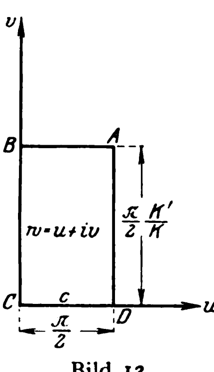


Bild 12.

Ist dies gelungen, so läßt sich das ganze Problem auf eine Bestimmung des Potentials innerhalb des Rechteckes ABCD zurückführen, wobei es bekannt ist, daß längs CD $\varphi = \varphi_1$, längs AB $\varphi = \varphi_2$ und längs AD und BC $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ sind. Das Potential φ wird offenbar eine lineare Funktion der Koordinate v sein. Setzen wir die Länge von AB gleich $\frac{\pi}{2}$ und diejenige von BC gleich $\frac{\pi}{2}\lambda$, so ergibt sich für φ der Ausdruck

$$\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot v. \tag{1}$$

Um das Potential in irgendeinem Punkt des Viereckes A′B′C′D′ zu finden, genügt es, die Ordinate v des entsprechenden Punktes des Rechteckes ABCD anzugeben.

Das Problem der konformen Abbildung eines solchen Viereckes auf ein Rechteck ist schon früher von einem von uns gelöst worden[1] und wurde dann für die Berechnung des thermischen Feldes eines Kabels angewandt[2]. Die Ableitung der entsprechenden Formeln ist ziemlich kompliziert; wir werden uns daher hier damit begnügen, die fertigen Ausdrücke anzuführen, und zwar für den Fall, wo der äußere Kreis (A′B′) von dem inneren (C′D′) weit absteht, so daß das Viereck A′B′C′D′ radial gestreckt ist. Der entgegengesetzte Fall, wo A′B′ und C′D′ nahe aneinander liegen, ist soeben in der erwähnten Arbeit behandelt worden.

[1] V. Fock, Über die konforme Abbildung eines Kreisvierecks mit verschwindenden Winkeln auf eine Halbebene. Journ. d. Phys.-Mathem. Gesellsch. von Leningrad, Bd. 1, Heft 2, 1927 (russisch).

[2] V. Fock, Über die Wärmeleitung in mehrphasigen Kabeln. Arch. f. Elektrot., Bd. XVI. S. 332, 1926.

Wir wollen als Koordinatenursprung den Punkt O (Bild 11) nehmen und die Achse OX so richten, daß sie das Zentrum des kleinen Kreises schneidet. Weiterhin wollen wir den Winkel AOB gleich πh setzen und den Maßstab so wählen, daß die Abszisse des Zentrums des kleinen Kreises x gleich

$$x_0 = \frac{1}{1 - \operatorname{Sin} \pi h} \tag{2}$$

wird. Es sei der Radius des großen Kreises in demselben Maßstab gleich R;

$$OA' = R. \tag{3}$$

Das Verhältnis der Seiten des Rechteckes

$$\lambda = \frac{B'C'}{A'B'} \tag{4}$$

kann dann aus der Gleichung

$$R \cdot A(-h) = e^{\pi h \lambda} \frac{\Pi(-h, e^{-\pi\lambda})}{\Pi(h, e^{-\pi\lambda})} \tag{5}$$

berechnet werden.

In der Gleichung (5) ist durch $\Pi(h, q)$ die Reihe

$$\Pi(h, q) = 1 + \frac{q^2}{16(1+h)^2} + \ldots\ldots. \tag{6}$$

bezeichnet. Die Große $A(-h)$ ist gleich

$$A(-h) = \frac{1}{A(h)} = \frac{\Gamma(1-h)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+h\right)}{\Gamma(1+h)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-h\right)} \operatorname{Ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi h}{2}\right), \tag{7}$$

wo $\Gamma(\alpha)$ die bekannte Gammafunktion ist, für die ausführliche Tabellen vorhanden sind[1]. Bei unseren Voraussetzungen ist $\lambda \gg 1$, daher ist $e^{-2\pi\lambda}$ eine sehr kleine Größe, so daß wir in den meisten Fällen die Reihe $\Pi(h, q)$ durch ihr konstantes Glied, d. h. durch 1, ersetzen können. Dann ergibt sich für die rechte Seite der Gleichung (5) der Wert $e^{\pi h \lambda}$.

Wir wollen weiter die Größe

$$b(h) = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}+h\right) - \psi\left(\frac{1}{2}-h\right) \tag{8}$$

einführen, wo

$$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \tag{9}$$

die logarithmische Ableitung der Gammafunktion ist[2]. Es sei weiterhin

$$B(h) = \frac{1 + \operatorname{Sin}\pi h}{2\pi^2} \Gamma^2\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right). \tag{10}$$

Wir werden von der üblichen Bezeichnungsweise der hypergeometrischen Reihe Gebrauch machen:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1 \cdot 2} x^2 + \ldots \tag{11}$$

Außerdem wollen wir der Kürze halber

$$y_1 = F\left(\frac{1}{2}+h,\ \frac{1}{2}-h,\ 1,\ -\operatorname{Sh}^2\frac{v}{2}\right) \tag{12}$$

[1] Vgl. z. B. Jahnke-Emde, Funktionstafeln.

[2] Die Tabellen der Funktion $\psi(\alpha)$ kann man in dem zitierten Buch von Jahnke-Emde finden.

$$
\left.\begin{aligned}
y_2 = &\left\{b(h) - \lg \operatorname{nat}\left(\operatorname{Sh}^2 \frac{v}{2}\right)\right\} y_1 + \\
+ &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{\frac{1}{4} - h^2} + \frac{3}{\frac{9}{4} - h^2} + \ldots \frac{2n-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - h^2}\right)\right\} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{1}{4} - h^2\right) \ldots \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - h^2\right]}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2} \left(\operatorname{Sh}^2 \frac{v}{2}\right)^n
\end{aligned}\right| \quad (13)
$$

setzen.

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir nun Formeln angeben, die bis auf einen Fehler von der Ordnung $e^{-2\pi\lambda}$ die gesuchte konforme Abbildung bewirken. Wir wollen diese Formeln für zwei Fälle niederschreiben, erstens für den Fall, wo der Punkt, für den das Potential berechnet werden soll, auf der Geraden BC liegt, zweitens für den Fall, wo der fragliche Punkt auf der Geraden AD gelegen ist.

Für die auf BC gelegenen Punkte ist

$$
z = e^{\pi i h} A(h) e^{2hv} \frac{F\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2}, 1 - h, e^{-2v}\right) - \frac{1}{4(1+h)} e^{2v - 2\lambda}}{F\left(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2}, 1 + h, e^{-2v}\right) - \frac{1}{4(1-h)} e^{2v - 2\lambda}}, \quad (14)
$$

oder

$$
z = e^{\pi i h} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi h}{2}\right) \frac{y_2 + y_1 \pi \operatorname{tg} \pi h}{y_2 - y_1 \pi \operatorname{tg} \pi h}. \quad (15)
$$

Für die auf AD gelegenen Punkte

$$
z = A(h) e^{2hv} \frac{F\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2}, 1 - h, -e^{-2v}\right) + \frac{1}{4(1+h)} e^{2v - 2\pi\lambda}}{F\left(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2}, 1 + h, -e^{-2v}\right) + \frac{1}{4(1-h)} e^{2v - 2\pi\lambda}}, \quad (16)
$$

oder

$$
z = \frac{B(h) F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}, \frac{1}{4} + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{Sh}^2 v\right) - 2 \operatorname{Sh} v \cdot F\left(\frac{3}{4} - \frac{h}{2}, \frac{3}{4} + \frac{h}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{Sh}^2 v\right)}{B(-h) F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}, \frac{1}{4} + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{Sh}^2 v\right) - 2 \operatorname{Sh} v \cdot F\left(\frac{3}{4} - \frac{h}{2}, \frac{3}{4} + \frac{h}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{Sh}^2 v\right)}. \quad (17)
$$

Um allgemeine Formeln zu bekommen, die für eine beliebige Lage der fraglichen Punkte gültig sind, genügt es in (14) und (15) v durch $-iw$, in (16) und (17) v durch $i\frac{\pi}{2} - iw$ zu ersetzen.

Die zweiten Glieder im Zähler und Nenner der Gleichungen (14) und (16) sind Korrektionsglieder. In der Nähe von AB $\left(v \text{ nahe zu } \frac{\pi}{2}\lambda\right)$ werden diese Korrektionsglieder von der Größenordnung von $e^{-\pi\lambda}$ sein. Wir müssen sie beachten, wenn wir den möglichen Fehler bis zu der Größenordnung von $e^{-2\pi\lambda}$ (nicht $e^{-\pi\lambda}$) herabdrücken wollen.

Ist v nicht zu klein $\left(\text{z. B. } v > \frac{1}{2}\right)$, so müssen wir von den Formeln (14) und (16), im Gegenfall von den Formeln (15) und (17) Gebrauch machen.

Wenn wir nun v eine Reihe von Werten zuschreiben und mittels der Formeln (14) bis (17) die entsprechenden Werte von z berechnen, so können wir bestimmen, welchen Punkten der ursprünglichen Ebene (Kabelquerschnitt) die von uns gewählten Werte des Potentials entsprechen. Darauf können wir mittels graphischer Interpolation das Potential beliebiger anderer Punkte des elektrischen Feldes bestimmen.

Die Untersuchung ist auf Anregung der Nordischen Kabelfabrik zu Leningrad unternommen worden und wurde durch sie subsidiert. Dem Technischen Direktor der Fabrik Herr Ing. S. Jakowlew sowie Herr Ing. S. Bragin sind wir für ihr freundliches Entgegenkommen zu bestem Dank verpflichtet.

August 1927. Physikalisch-Technisches Laboratorinm.

Ein graphisches Verfahren zur Berechnung des Boucherotmotors.

Von

Hans Lund.

Mitteilung aus dem Maschinenversuchsfeld der AEG-Fabriken, Brunnenstraße.

Das Ziel der nachstehenden Rechnung ist ein praktisch brauchbares Diagramm, das die Konstanten des Boucherotmotors unter Berücksichtigung des Primärwiderstandes derart zu bestimmen ermöglicht, daß beim ersten Entwurf das Optimum aller Verhältnisse mit ausreichender Annäherung getroffen werden kann.

Ersetzt man in der Gleichung für den Primärstrom des normalen Asynchronmotors

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{E}_K}{K_1} \frac{\frac{R_2}{K_2} + j s}{\frac{R_1}{K_1} \cdot \frac{R_2}{K_2} + j \frac{R_2}{K_2} + j \frac{R_1}{K_1} s - \sigma s} \tag{1}$$

den Widerstand R_2 durch den Ausdruck

$$r_r + \frac{r_2 (r_1 + j k s)}{r_1 + r_2 + j k s}, \tag{2}$$

worin r_r unter Vernachlässigung der Induktivität den auf den Stab reduzierten Ringwiderstand bedeutet, so erhält man die Gleichung für den Primärstrom des Boucherotmotors bei beliebigem Schlupf mit den drei Veränderlichen r_1 (Stabwiderstand des inneren Käfigs), r_2 (Stabwiderstand des äußeren Käfigs) und

$$k = 0{,}8\, \pi^2 \nu L \left(\frac{h}{d} + \frac{\pi}{2} \right) 10^{-8}.$$

h bezeichnet die Höhe, d die Breite des Schlitzes zwischen den beiden Wicklungen. Für den Drehstrommotor ist

$$K_2 = \frac{K_1}{12 W_1^2} \cdot \frac{Z_2}{p^2} \cdot \frac{1 + \sigma_2}{1 + \sigma_1}.$$

$W_1 = \frac{f_1 q_1 w_1}{a_1}$ = primäre effektive Windungszahl einer Phase,

Z_2 = Gesamtzahl der Rotornuten,

p = Polpaarzahl.

Mit Rücksicht auf den Wirkungsgrad sind r_1 und r_2 durch folgende Beziehung miteinander verbunden:

$$R_2 = r_r + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}, \tag{3}$$

so daß sich für r_1 und r_2 mit $\frac{r_2}{r_1} = u$ aus (3) die Gleichungen (4) ergeben:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= (R_2 - r_r) \frac{1 + u}{u} \\ r_2 &= (R_2 - r_r)(1 + u) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Führt man diese Beziehungen in (2) ein und wählt anstatt k $v = \frac{k}{r_1}$ zur Veränderlichen, so erhält man den Ausdruck

$$r_r + \frac{(R_2 - r_r)(1 + u) + j (R_2 - r_r)(1 + u) v s}{1 + u + j v s},$$

der an Stelle von (2) in die Gleichung (1) einzusetzen ist.



Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_1}{K_1} &= \alpha, \\ \frac{R_2}{K_2} &= \beta, \\ \frac{r_r}{K_2} &= \gamma, \\ \frac{r_2}{r_1} &= u, \\ \frac{k}{r_1} &= v \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und

$$1 + u = u'$$

ergibt sich die gesuchte Gleichung für den Primärstrom des Boucherotmotors:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{E}_K}{K_1} \cdot \frac{\beta u' + j s u' - s^2 v + j[s\gamma + (\beta - \gamma) s u'] v}{(\alpha\beta - \sigma s) u' + j(\alpha s + \beta) u' - [\gamma + (\beta - \gamma) u' + \alpha s] s v + j[\alpha\gamma - \sigma s + \alpha(\beta - \gamma) u'] s \cdot v}. \tag{6a}$$

Diese Gleichung ist die Ausgangsgleichung für die Entwicklung des Diagramms. Sie ist nur von u und v als Unbekannten abhängig, zwei Größen, durch die der Boucherotmotor vollständig bestimmt ist, wenn die Daten des normalen Kurzschlußmotors, aus dem der Boucherotmotor entwickelt werden soll, bekannt sind. Zähler und Nenner sind in bezug auf die beiden Veränderlichen vom ersten Grade. Infolgedessen ergeben sich für den geometrischen Ort des Endpunktes von $\mathfrak{J}_1$ bei bestimmtem Schlupf s zwei Kreisscharen, von denen die eine für konstantes u und veränderliches v und die andere für konstantes v und veränderliches u gilt.

Die Kreisschar u = konst.

Die Mittelpunktskoordinaten der Kreise mit dem Parameter v sind:

$$x_{m,u} = \frac{E_K}{K_1} \frac{\beta^2 u' + \sigma s^2 - \beta\gamma(u' - 1)}{(\alpha^2 + \sigma^2) s^2 + \beta[\beta u' - \gamma(u' - 1)](1 + \alpha^2) + \sigma s(1 - \sigma)[\beta(u' + 1) - \gamma(u' - 1)]}$$

und

$$y_{m,u} = \frac{E_K}{2 K_1} \frac{(1 - \sigma) s[\beta(u' + 1) - \gamma(u' - 1)] - 2\alpha\beta\delta(u' - 1) + 2\alpha(\beta^2 u' + s^2)}{(\alpha^2 + \sigma^2) s^2 + (1 + \alpha^2)\beta[\beta u' - \delta(u' - 1)] + (1 - \sigma)\alpha s[\beta(u' + 1) - \gamma(u' - 1)]} \tag{7}$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (7) u′, so erhält man die folgende Beziehung zwischen den Mittelpunktskoordinaten der u-Kreise.

$$y_{m,u} = \frac{1}{2} \frac{(\alpha s + \beta)^2 - (\sigma s - \alpha\beta)^2}{(\alpha s + \beta)(\sigma s - \alpha\beta)} \cdot x_{m,u} + \frac{E_K}{2 K_1} \cdot \frac{\sigma s^2 - 2\alpha\beta s - \beta^2}{(\alpha s + \beta)(\sigma s - \alpha\beta)}. \tag{8}$$

Die Mittelpunkte aller Kreise mit konstantem u liegen auf einer Geraden. Wir bezeichnen diese Gerade im folgenden als die „u-Gerade".

Mit u = 0, (u′ = 1), gehen die Gleichungen (7) in die Koordinaten des Endpunktes von $\mathfrak{J}_1$ P_{0s} für den normalen Motor über. P_{01} würde dem Kurzschlußpunkt des normalen Motors entsprechen. Die Koordinaten des Punktes P_{0s} sind:

$$x_{0s} = \frac{E_K}{K_1} \cdot \frac{\beta^2 + \sigma s^2}{(\alpha s + \beta)^2 + (\sigma s - \alpha\beta)^2} \tag{9}$$

und

$$y_{0s} = \frac{E_K}{K_1} \cdot \frac{(\alpha s + \beta) s - \beta(\sigma s - \alpha\beta)}{(\alpha s + \beta)^2 + (\sigma s - \alpha\beta)^2}.$$

Die u-Gerade läuft also immer durch den Punkt des Heylandkreises, der für den gewählten Schlupf den Endpunkt des Vektors beim normalen Motor darstellt.



Die Gleichung das Heylandkreises in rechtwinkligen Koordinaten lautet:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

wenn

$$a = \frac{E_K}{2K_1} \cdot \frac{1 + \sigma}{\alpha^2 + \sigma}$$

und

$$b = \frac{E_K}{K_1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \sigma}.$$

r = Haldmesser des Heylandkreises.

Die Tangente an den Heylandkreis im Punkte P_{os} hat die Richtungskonstante

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x_{os}}{y_{os} - b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha s + \beta)^2 - (\sigma s - \alpha \beta)^2}{(\alpha s + \beta)(\sigma s - \alpha \beta)}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich der Richtungskonstanten der u-Geraden [Gleichung (8)]. Damit ist die Lage der u-Geraden als Tangente an den Heylandkreis in Punkt P_{os} bestimmt (Bild 1). Der Parameter der u-Kreise ist v. Mit $v = 0$ müssen alle u-Kreise durch den Punkt P_{os} laufen; denn mit $v = 0$ wird der Boucherotmotor

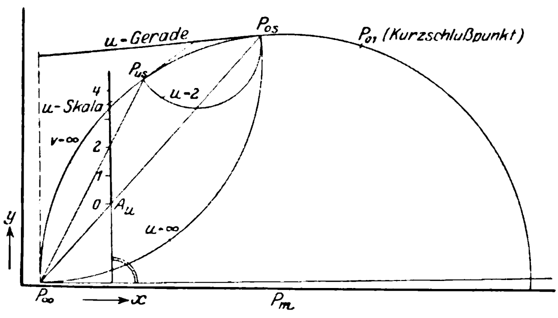


Bild 1. Lage der u-Kreise.

zum normalen Motor. P_{os} ist also ein allen u-Kreisen gemeinsamer Peripheriepunkt. Einen zweiten Umfangspunkt für jeden u-Kreis findet man durch die Betrachtung der Lage des Stromvektors bei $v = \infty$. $v = \infty$ bedeutet, daß die innere Wicklung elektrisch nicht vorhanden ist. Die Lage von $\mathfrak{J}_1$ ist die gleiche wie beim normalen Asynchronmotor mit dem Sekundärwiderstand $r_r + r_2$ anstatt R_2 beim Schlupf s.

Setzt man in der Gleichung (6a) $v = \infty$, so erhält man:

$$J_1 = \frac{\mathfrak{E}_K}{K_1} \cdot \frac{-s + j\beta + j(\beta - \gamma) \cdot u}{-(\alpha s + \beta) - j(\sigma s - \alpha \beta) - (\beta - \gamma) u + j \alpha (\beta - \gamma) u}. \qquad (10)$$

Der Kreis, den diese Gleichung beschreibt, ist mit dem Heylandkreis identisch. Die Endpunkte P_{us} der Stromvektoren findet man der Vorschrift der Gleichung (10) entsprechend nach der auf Bild 1 angegebenen Konstruktion. Der Anfangspunkt A_u der u-Skala liegt auf der Strecke $P_\infty P_{os}$ im Abstande

$$\frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{(\alpha s + \beta)^2 + (\sigma s - \alpha \beta)^2}{1 + \alpha^2}} \text{ von } P_\infty.$$

Trägt man die Zahl, die dieser Ausdruck darstellt, in cm auf, so ist die u-Skala eine cm-Skala. Für den Punkt P_∞ gelten die Werte $u = \infty$ und $v = \infty$. Er fällt unabhängig vom Schlupf mit dem Leerlaufspunkt des normalen Motors zusammen. Die u-Skala steht auf dem Durchmesser des Heylandkreises durch P_∞ senkrecht. Die Tangenten an den Heylandkreis im Punkt P_{os} und P_{us} schneiden sich im Mittelpunkt des zugehörigen u-Kreises. Der Mittelpunkt des Kreises $u = \infty$, d. h. $r_2 = \infty$, liegt im Schnittpunkt der beiden Tangenten durch P_{os} und den Leerlaufspunkt an den Heylandkreis. Damit sind die u-Kreise vollständig bestimmt.

Zu ihrer Konstruktion ist außer der Bestimmung von P_{os} nur die Berechnung des Ausdrucks

$$\frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{(\alpha s+\beta)^2+(\sigma s-\alpha\beta)^2}{1+\alpha^2}}$$

nötig.

Die Kreisschar v = konst.

Mit u' als Parameter nimmt die Gleichung (6a) die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= \frac{\mathfrak{E}_K}{K_1}\cdot\\ &\cdot\frac{-s^2 v+j\gamma s v+\beta u'+j[(\beta-\gamma)s v+s]u'}{-(\gamma+\alpha s)s v+j(\alpha\gamma-\sigma s)s v+[\alpha\beta-\sigma s-(\beta-\gamma)s v]u'+j[\alpha(\beta-\gamma)s v+\alpha s+\beta]u'}\end{aligned}\right\}\quad(6\text{b})$$

Die Mittelpunktskoordinaten der v = Kreise sind

$$\left.\begin{aligned}x_{mv} &= \frac{E_K}{2K_1}\cdot\frac{2(\sigma s^2+\beta\gamma)+(\beta-\gamma)s^2(1+\sigma)v}{(\beta+\gamma)\alpha s(1-\sigma)+(\alpha^2+\sigma)s^2(\beta-\gamma)v+\sigma^2 s^2+\alpha^2(s^2+\beta\gamma)+\beta\gamma}\\ y_{mv} &= \frac{E_K}{2K_1}\cdot\frac{(\beta+\gamma)s(1-\sigma)+2\alpha[\beta\gamma+s^2+(\beta-\gamma)v s^2]}{(\beta+\gamma)\alpha s(1-\sigma)+(\alpha^2+\sigma)s^2(\beta-\gamma)v+\sigma^2 s^2-\alpha^2(s^2+\beta\gamma)+\beta\gamma}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Durch Elimination von v findet man, daß zwischen den Mittelpunktskoordinaten auch der v-Kreise eine geradlinige Beziehung besteht:

$$\left.\begin{aligned}y_{mv} = {}&\frac{(\beta+\gamma)(\sigma-\alpha^2)s+2\alpha(\sigma s^2-\beta\gamma)}{(\sigma s-\alpha\beta)(\sigma s-\alpha\gamma)-(\alpha s+\beta)(\alpha s+\gamma)}x_{m\gamma}-\\ &\frac{E_K}{2K_1}\cdot\frac{(\beta+\gamma)(1+\sigma)s-2\alpha(s^2+\beta\gamma)}{(\sigma s-\alpha\beta)(\sigma s-\alpha\gamma)-(\alpha s+\beta)(\alpha s+\gamma)}\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Für $v=\infty$ wird

$$x_{mv}=\frac{E_K}{2K_1}\cdot\frac{1+\sigma}{\alpha^2+\sigma}$$

und

$$y_{mv}=\frac{E_K}{K_1}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma}.$$

D. h. die v-Gerade läuft durch den Mittelpunkt des Heylandkreises. Ihre Richtungskonstante ist

$$\frac{(\beta+\gamma)(\sigma-\alpha^2)s+2\alpha(\sigma s^2-\beta\gamma)}{(\sigma s-\alpha\beta)(\sigma s-\alpha\gamma)-(\alpha s+\beta)(\alpha s+\gamma)}.$$

Dieser Ausdruck geht unter Vernachlässigung des Primär- und des Ringwiderstandes in die Form $\frac{R_2}{K_2\sigma s}$ über. Die v-Gerade ist also dann der Strecke $P_\infty P_{os}$ parallel.

Ein allen v-Kreisen gemeinsamer Punkt ist P_{os} für $u=0$. Ein zweiter Peripheriepunkt ergibt sich aus der Gleichung (6b) für $u=\infty$.

$$\mathfrak{J}_1=\frac{\mathfrak{E}_K}{K_1}\cdot\frac{\beta+j[(\beta-\gamma)s v+s]}{\alpha\beta-\sigma s-(\beta-\gamma)s v+j[\alpha s+\beta+\alpha(\beta-\gamma)s v]}.\quad(13)$$

Der Kreis $u=\infty$, den diese Gleichung beschreibt, ist aus den früheren Betrachtungen schon bekannt. Er bedeutet den geometrischen Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{J}_1$ bei bestimmtem Schlupf und veränderlichem v unter der Voraussetzung, daß der äußere Käfig des Motors unwirksam ist. Bild 2 zeigt die Konstruktion, die die Punkte P_{vs} bestimmt, in denen die verschiedenen v-Kreise den Kreis $u=\infty$ schneiden. Der Anfangspunkt der v-Skala A_v auf der Strecke $P_\infty P_{os}$ liegt von P_∞ um

$$\frac{1}{(\beta-\gamma)\,s}\sqrt{\frac{(\alpha\,s+\beta)^2+(\sigma\,s-\alpha\,\beta)^2}{1+\alpha^2}}$$

entfernt und steht senkrecht auf dem Durchmesser des $u=\infty$-Kreises im Punkte P_∞. Da dieser Durchmesser aber auch Tangente an den Heylandkreis ist, so stehen die u-Skala und die v-Skala aufeinander senkrecht.

Mit den Peripheriepunkten P_{0s} und P_{vs} und der Bestimmung, daß die Mittelpunkte auf der v-Geraden liegen sollen, sind die v-Kreise gegeben.

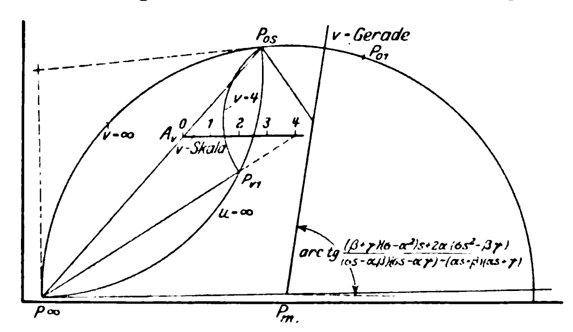


Bild 2. Lage der v-Kreise.

Der Schmiegungskreis in Punkt s = 0.

Die Gleichung für den Schmiegungskreis an das Diagramm des Boucherotmotors im Punkte $s=0$ erhält man, wenn man in der Gleichung (1) R_2 durch den Ausdruck

$$r_r+\frac{r_1\,r_2}{r_1+r_2}+j\,\frac{r_2^2}{(r_1+r_2)^2}\,k\,s$$

ersetzt oder $\frac{R_2}{K_2}$ durch

$$\beta+j\,\frac{u}{1+u}\,(\beta-\gamma)\,v. \tag{14}$$

Man erhält dann

$$\mathfrak{J}_1=\frac{\mathfrak{E}_K}{K_1}\cdot\frac{\beta+j\left(1+\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v\right)s}{\alpha\beta+j\beta-\left(\sigma+\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v\right)s+j\,\alpha\left(1+\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v\right)s}. \tag{15}$$

Daraus ergeben sich die Mittelpunktskoordinaten des Schmiegungskreises:

$$x_{ms}=\frac{E_K}{2\,K_1}\cdot\frac{1+\sigma+2\,\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v}{\alpha^2+\sigma+(1+\alpha^2)\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v}$$

und

$$y_{ms}=\frac{E_K}{K_1}\,\frac{\alpha\left[1+\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v\right]}{\alpha^2+\sigma+(1+\alpha^2)\frac{u}{1+u}(\beta-\gamma)\,v} \tag{16}$$

Beim Entwurf des Motors konstruiert man zunächst das Diagramm für den Kurzschlußpunkt ($s=1$). Dazu sind außer den für den Heylandkreis des normalen Motors zu berechnenden Werten nur die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{\beta-\gamma}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2+(\sigma-\alpha\,\beta)^2}{1+\alpha^2}}$$

und
$$\frac{(\beta+\gamma)(\sigma-\alpha^2)+2\alpha(\sigma-\beta\gamma)}{(\sigma-\alpha\beta)(\sigma-\alpha\gamma)-(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$$

zu berechnen. Aus der Lage des innerhalb der beiden Kreise für $v=\infty$ und für $u=\infty$ beliebig wählbaren Kurzschlußpunktes ergeben sich die Größen u und v. Der mit diesen gewählten Werten errechnete Schmiegungskreis beschreibt das Verhalten des Motors bei geringem Schlupf. Nur in seltenen Fällen wird es nötig sein, zur Kontrolle des Drehmoments bei mittleren Tourenzahlen auch das Diagramm für $s=0{,}5$ zu entwerfen. — Das Bild 3 enthält alle zur Berechnung des Boucherotmotors notwendigen Formeln.

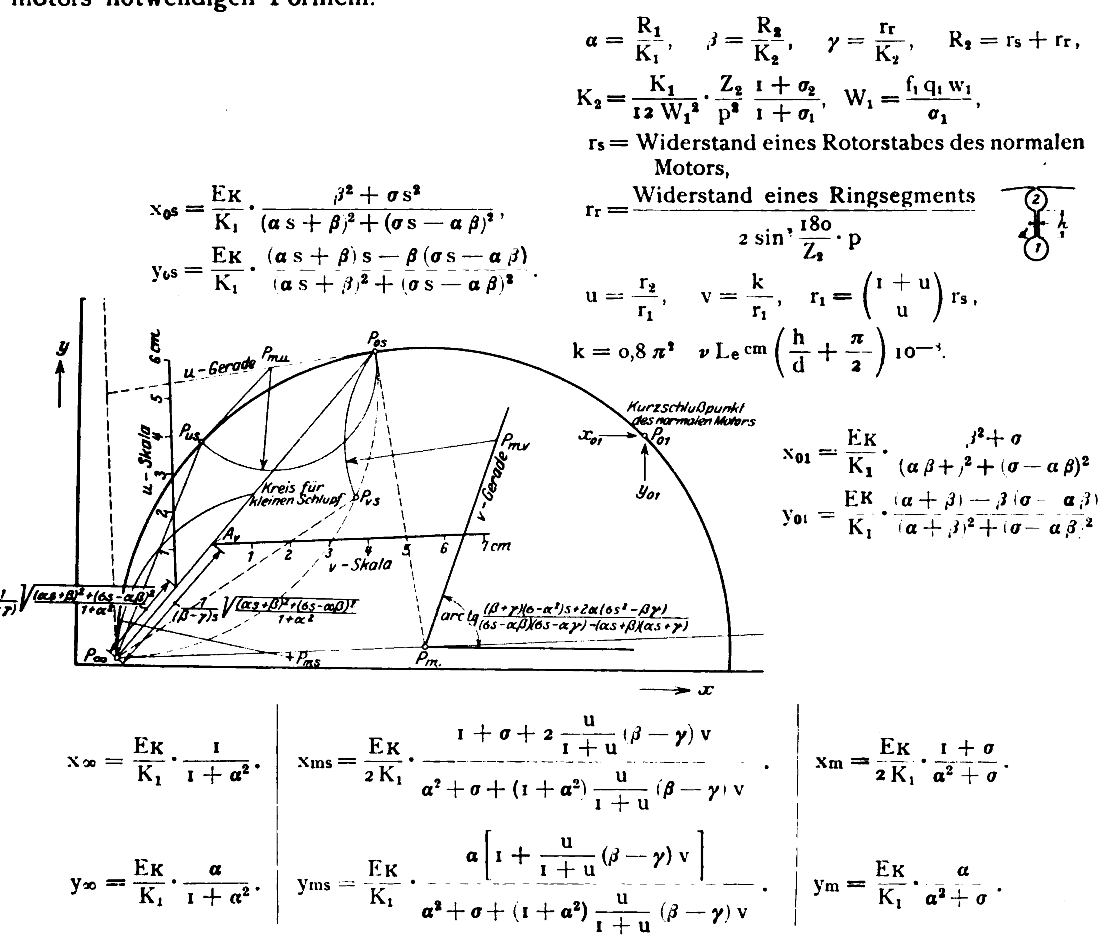


Bild 3. Unterlagen zur Berechnung des Boucherotmotors.

Berechnungsbeispiel.

Ein normaler 1500-touriger 5,5 kW-Drehstrommotor mit Kurzschlußanker sei in einen Boucherotmotor umzubauen:

Die Konstanten des normalen Motors.

Phasenspannung $E_k = 220$ V,
Leerlaufstrom einer Phase $J_l = 3{,}85$ A,
$\sigma = 0{,}043$,
$K_1 \cong \frac{E_k}{J_l} = \frac{220}{3{,}85} = 57{,}1$ Ohm,

$R_1 = 0{,}86$ Ohm,

W_1 (effektive Windungszahl) $= \frac{f_1 q_1 w_1}{a_1} = \frac{0{,}96 \cdot 3 \cdot 48}{2} = 69$,

Z_2 (Zahl der Rotorstäbe) $= 44$,

$$K_2 = \frac{K_1}{12\, W_1^2} \cdot \frac{Z_2}{p^2} \cdot \frac{1 + \sigma_2}{1 + \sigma_1} \sim \frac{K_1}{12\, W_1^2} \cdot \frac{Z_2}{p^2} = \frac{57{,}1}{12 \cdot 69^2} \cdot \frac{44}{4} = 1{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm},$$

$$R_2 = r_s + r_r = 0{,}93 \cdot 10^{-4} + 0{,}75 \cdot 10^{-4} = 1{,}68 \cdot 10^{-4} \text{ Ohm},$$

$$\alpha = \frac{R_1}{K_1} = 1{,}51 \cdot 10^{-2}, \qquad \beta = \frac{R_2}{K_2} = 1{,}53 \cdot 10^{-2}, \qquad \gamma = \frac{r_r}{K_2} = 0{,}68 \cdot 10^{-2}.$$

Heylandkreis:

Leerlaufspunkt P_∞

$$x_\infty = J_1 \cdot \frac{1}{1 + \alpha^2} = 3{,}85 \text{ A},$$

$$y_\infty = J_1 \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} = 5{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ A},$$

Mittelpunkt P_m

$$x_m = \frac{J_1}{2} \frac{1 + \sigma}{\alpha^2 + \sigma} = 46{,}3 \text{ A},$$

$$y_m = J_1 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \sigma} = 1{,}34 \text{ A}.$$

Kurzschlußpunkt P_{01}

$$x_{01} = J_1 \frac{\beta^2 + \sigma}{(\alpha + \beta)^2 + (\sigma - \alpha\beta)^2} = 60{,}1 \text{ A},$$

$$y_{01} = J_1 \cdot \frac{(\alpha + \beta) - \beta(\sigma - \alpha\beta)}{(\alpha + \beta)^2 + (\sigma - \alpha\beta)^2} = 41{,}4 \text{ A}.$$

Diagramm des Boucherotmotors für s = 1 (Bild 4).

$$\frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{(\alpha + \beta)^2 + (\sigma - \alpha\beta)^2}{1 + \alpha^2}} \sim \frac{1}{\beta - \gamma} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + (\sigma - \alpha\beta)^2} = 6{,}19 \text{ cm}$$

$$\frac{(\beta + \gamma)(\sigma - \alpha^2) + 2(\sigma - \beta\gamma)}{(\sigma - \alpha\beta)(\sigma - \alpha\gamma) - (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)} = 1{,}9.$$

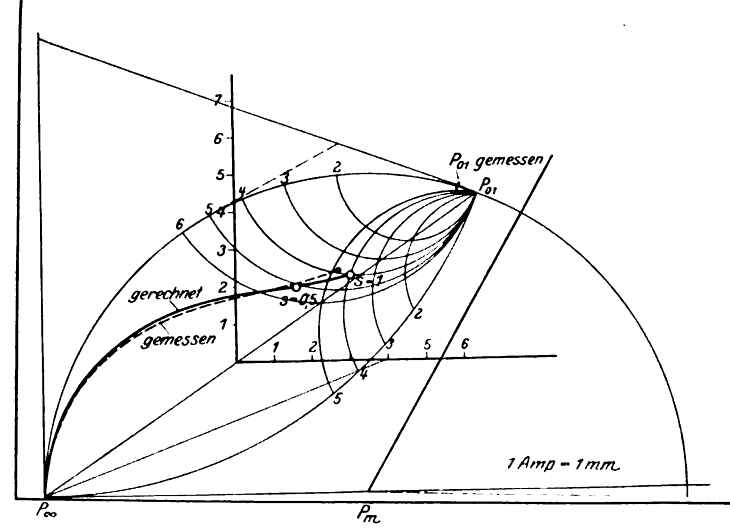


Bild 4. Primärstromdiagramm eines 1500tourigen 5,5 kW-Boucherotmotors (Rechnung u. Versuch).

Lediglich diese beiden Werte sind zur Konstruktion der u- und v-Kreise zu berechnen.

Sind u = 4 und v = 4 zwei Werte, die in bezug auf Anfahrstrom und Anzugmoment den Anforderungen entsprechen, so erhält man damit die Mittelpunktskoordinaten für den Schmiegungskreis in s = 0:

$$x_{m\,s} = \frac{J_1}{2}\,\frac{1 + \sigma + 2\,\frac{u}{1+u}\,(\beta - \gamma)\,v}{\alpha^2 + \sigma + (1 + \alpha^2)\,\frac{u}{1+u}\,(\beta - \gamma)\,v} = 29{,}9 \text{ A},$$

und

$$y_{m\,s} = J_1\,\frac{\alpha\left[1 + \frac{u}{1+u}\,(\beta - \gamma)\,v\right]}{\alpha^2 + \sigma + (1 + \alpha^2)\,\frac{u}{1+u}\,(\beta - \gamma)\,v} = 0{,}84 \text{ A}.$$

Diagramm für s = 0,5 (Bild 5).

Der Primärstromvektor des normalen Motors hat für s = 0,5 die Endpunktskoordinaten:

$$x_{o\,s} = J_1\,\frac{\beta^2 + \sigma s^2}{(\alpha s + \beta)^2 + (\sigma s - \alpha\beta)^2} = 43{,}4 \text{ A}.$$

$$y_{o\,s} = J_1 \cdot \frac{(\alpha s + \beta)\,s - \beta\,(\sigma s - \alpha\beta)}{(\alpha s + \beta)^2 + (\sigma s - \alpha\beta)^2} = 43{,}8 \text{ A}.$$

$$\frac{1}{\beta - \gamma} \cdot \sqrt{\frac{(\alpha s + \beta)^2 + (\sigma s - \alpha\beta)^2}{1 + \alpha^2}} = 3{,}67.$$

$$\frac{1}{(\beta - \gamma)\,s} \cdot \sqrt{\frac{(\alpha s + \beta)^2 + \beta\,(\sigma s - \alpha\beta)^2}{1 + \alpha^2}} = 7{,}34.$$

$$\frac{(\beta + \gamma)\,(\sigma - \alpha^2)\,s + 2\,\alpha\,(\sigma s^2 - \beta\gamma)}{(\sigma s - \alpha\beta)\,(\sigma s - \alpha\gamma) - (\alpha s + \beta)\,(\alpha s + \gamma)} = 6{,}16.$$

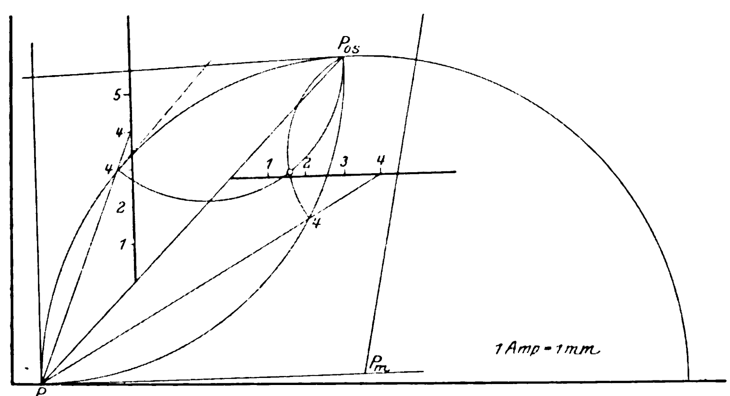


Bild 5. Diagramm für s = 0,5.

Mit diesen Werten ist das Bild 5 gezeichnet. Der Endpunkt des Primärstromvektors für s = 0,5 und u = 4, v = 4 ist in Bild 4 übertragen. Mit den Punkten s = 1 und s = 0,5 und dem Schmiegungskreis im Punkte s = 0 ist das Diagramm des Boucherotmotors mit praktisch ausreichender Genauigkeit bestimmt.

Beitrag zur Messung des Zündverzuges bei der Glimmentladung.

Von

M. Büge.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Breslau.

Die im folgenden mitgeteilten Versuche sind als Vorarbeiten für eine systematische Untersuchung des Zündverzuges bei der Glimmentladung aufzufassen. Die gestellten Fragen sind:

1. Die als Zündverzug angesprochene Zeit t_m, die zwischen dem Anlegen der Spannung an eine Entladestrecke und dem Überschlag vergeht, ergibt sich als Mittelwert aus einer großen Zahl Einzelmessungen t. Entspricht die Verteilungskurve dieser Einzelmessungen der theoretisch erwarteten?

2. In welcher Größenordnung liegt die Wartezeit T, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einzelmessungen verstreichen muß, damit das Ergebnis jeder Einzelmessung von den vorhergehenden unabhängig wird?

Wie verläuft die Kurve $t_m = f(T)$?

Wie verschiebt sich die Kurve $t_m = f(T)$ bei Änderung der Vorionisation oder Änderung der angelegten Spannung?

Versuchsanordnung.

A. Schaltung.

Die zur Messung des Zündverzuges benutzte Schaltung ist in Bild 1 dargestellt. Mit Hilfe des Spannungsteilers Sp.-T., der von der Batterie B gespeist wird, kann

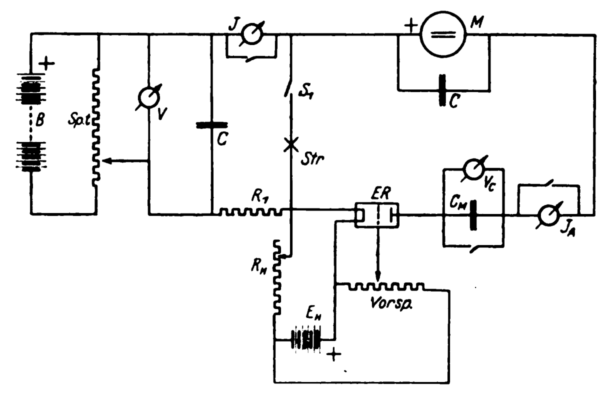


Bild 1. Schaltschema zur Messung des Zündverzuges einer Entladestrecke Str.

eine veränderliche Spannung V an die Entladestrecke Str. gelegt werden. Dieser sind Amperemeter J, induktionsfreier Vorschaltwiderstand R_1, und Schalter S_1 vorgeschaltet. Parallel zum Spannungsteiler liegt ein Kondensator von 10 MF. Die Spannung an der Entladestrecke, vermindert um die der Maschine M, ergibt die Anodenspannung für die Dreielektrodenröhre ER. Im Anodenkreis dieser liegt das Anodenamperemeter J_A und der Meßkondensator C_M, diesem parallel das statische Voltmeter V_C. Es bedeuten:

E_z Zündspannung der Entladestrecke (die im Augenblick des Zündens an den Elektroden herrschende Spannung),
E_B Brennspannung der Entladestrecke,
E_A Zwischen Anode und Kathode der Dreielektrodenröhre liegende Spannung,
E_M Spannung der Gleichstrommaschine M.



E_M ist so gewählt, daß bei der gegebenen Gittervorspannung der Röhre ihr Anodenstrom Null ist, wenn an den Klemmen der Entladestrecke die Spannung E_B herrscht. Solange an den Klemmen der Entladestrecke eine Spannung größer als E_B liegt, kann ein Anodenstrom fließen, d. h. er fließt nur während des Zündverzuges t (Bedingung $E_z > E_B$). Die maximale Anodenspannung beträgt $E_z - E_M$. Während des Zündverzuges sinkt diese dauernd, da ein Teil zur Aufladung des Kondensators C verbraucht wird (Kondensatorspannung V_C). Da Heizstrom und Gittervorspannung der Röhre so gewählt sind, daß der Anodenstrom J_A möglichst unabhängig von E_A ist, gilt für kleine Werte von t:

$$t = \frac{V_C \cdot C}{J_A}.$$

Die Gleichung verliert ihre Gültigkeit bei größeren Werten von V_C.

Eine Untersuchung der Fehlerquellen der Anordnung erübrigt sich in Hinblick auf eine ähnliche Schaltung im Archiv für Elektrotechnik 1927, Heft 6.

Analog dem dort Gesagten wird auch in vorliegender Arbeit angenommen, daß der Anstieg des Entladestromes von sehr kleinen Beträgen zu dem großen durch den Vorschaltwiderstand bedingten im Vergleich zur Dauer des Zündverzuges momentan erfolgt.

B. Entladestrecke.

Als Entladestrecke wurde eine der käuflichen Glimmlampen (Betriebsspannung 220 Volt) nach Entfernung des eingebauten Vorschaltwiderstandes verwendet. Die Belastung erfolgte stets in derselben Richtung.

C. Vorionisation.

Sämtliche Messungen wurden mit ganz geringer Vorionisation ausgeführt. Als Ionisator diente eine in verschiedener Entfernung von der Entladestrecke aufgestellte Metallfadenlampe. Der Meßraum war stets gegen das Tageslicht abgeschlossen. Die Messung des außerordentlich geringen unselbständigen Ionisationsstromes mußte unterbleiben, da das Glas des Entladegefäßes nicht genügend isolierte.

Ausgeführte Versuche.

Die für die Einzelwerte des Zündverzuges zu erwartende Verteilungskurve ist von Prof. M. v. Laue untersucht (Ann. der Physik 1925, 76) und es ist erhalten

$$n_t^{\infty} = e^{-\beta \int_0^t p(t)\, dt}. \tag{1}$$

Hierin bedeuten n_t^{∞} die Zahl der Vergrößerungzeiten, ausgedrückt in Prozenten der Gesamtzahl, die größer oder gleich t sind. Im speziellen ist $n_0^{\infty} = 100\%$. β bedeutet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von der ionisierenden Quelle in dem Raume der Entladung ein Elektron oder Ion gebildet wird. β hängt also ab von der Stärke der Vorionisation, dem Volumen des Entladeraumes und der Ionisierungsfähigkeit des verwendeten Gases. p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein solches primäres Elektron oder Ion sich durch Stoßionisation so stark vermehren kann, daß es wirklich zum Überschlag kommt. p ist also abhängig von der Natur des Gases, der Länge der Entladestrecke und der Überspannung (vgl. K. Zuber, Über die Verzögerungszeit bei der Funkenentladung. Ann. der Physik 1925, 76.) Gleichung (1) kann geschrieben werden:

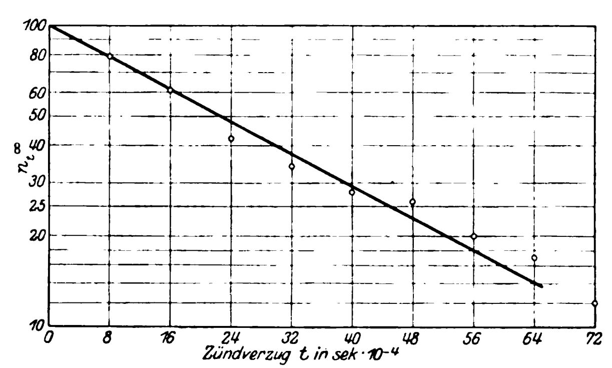
$$\lg n_t^{\infty} = -\beta \int_0^t p(t)\, dt. \tag{2}$$

Wenn p(t) von t unabhängig ist, gilt

$$\lg n_t^{\infty} = -\beta p t. \tag{3}$$

Für den Fall, daß zwischen den Einzelmessungen eine so große Zeit (Wartezeit T) vergeht, daß jede Einzelmessung von den vorhergehenden unabhängig ist, ergibt die Darstellung der n_t^∞ auf logarithmischem Papier eine Gerade. Der mittlere Zündverzug wird dann als die der Ordinate $n_t^\infty = 36{,}80$ zugehörige Abszisse gefunden (vgl. K. Zuber).

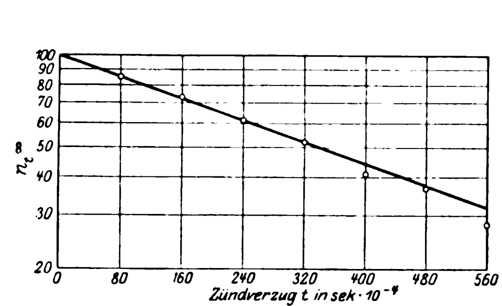
Eine Bestätigung dieser Gleichungen erbrachte Zuber in der zitierten Arbeit für Funkenentladungen bei einer Größenordnung des mittleren Zündverzuges von



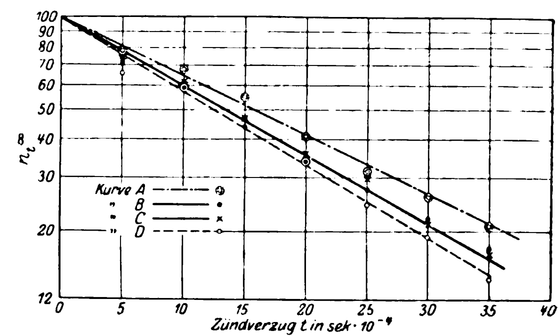
Kurve 1. Verteilungskurve der Einzelmessungen des Zündverzuges.

0,5 Sek. Die in der vorliegenden Arbeit erhaltenen Mittelwerte des Zündverzuges liegen zwischen 10^{-2} und 10^{-4} Sek.

Kurve 1 stellt eine Verteilung dar, für die bestimmt p unabhängig von t ist. Die Wartezeit T zwischen zwei Einzelmessungen beträgt 5 Minuten, die Zahl der Einzelmessungen n = 100. Die maximale Abweichung von der gezeichneten Geraden



Kurve 2. Verteilungskurve der Einzelmessungen des Zündverzuges.



Kurve 3. Unter gleichen Versuchsbedingungen aufgenommene Verteilungskurven.

beträgt 6%. Kurve 2 gibt eine Verteilung, für die bestimmt p abhängig von t ist. $T = {}^1/_2$ Min. n = 100. Auch hier sind die Abweichungen von der gezeichneten Geraden außerordentlich gering; sie liegen in dem Kurvengebiet, für das die Messung als ungenau erkannt ist. Es ergibt sich daher, daß diese Darstellungsweise kein ausreichendes Kriterium liefert, ob die Wartezeit zwischen zwei Einzelmessungen genügend lang ist, damit die Einzelmessungen voneinander unabhängig werden. (Es bleibt festzustellen, ob die Verteilungskurven durch irgendwelche Eigenschaften — z. B. elektrolytische — der Glaswände der Entladestrecke beeinflußt werden.)

Da die Gesamtheit der Messungen längere Zeit in Anspruch nahm, war es erforderlich, die Genauigkeit zu untersuchen, mit der einmal erhaltene Versuchsergebnisse jederzeit wiedererhalten werden konnten. Es wurden daher 4 Verteilungskurven unter gleichen Versuchsbedingungen in einem Abstand von 48 Stunden aufgenommen (Kurve 3). $T = {}^1/_2$ Min.

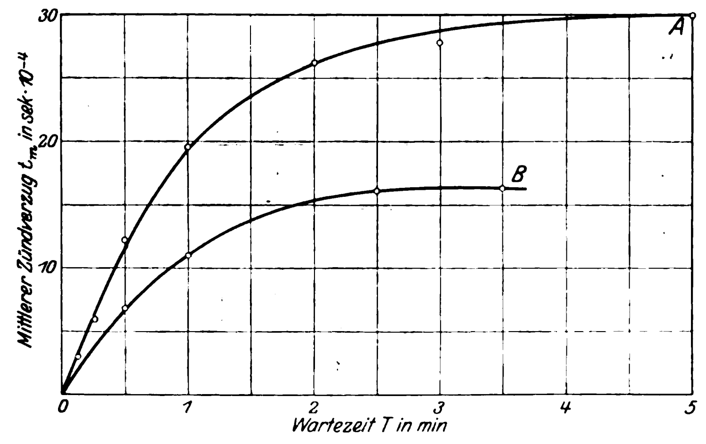
$n_A = 483; \quad n_B = 462; \quad n_C = 433; \quad n_D = 340;$

p ist bestimmt abhängig von t. Die Ergebnisse decken sich gut. Abweichungen von den gezeichneten Geraden sind im Gegensatz zu Kurve 2 deutlich vorhanden.

Um eine Entscheidung zu erhalten, ob bei einer bestimmten Wartezeit die Einzelmessungen untereinander unabhändig sind, wird die Kurve $t_m = f(T)$ aufgenommen (Kurve 4 und 5, bzw. Tabelle 1).

Tabelle 1.

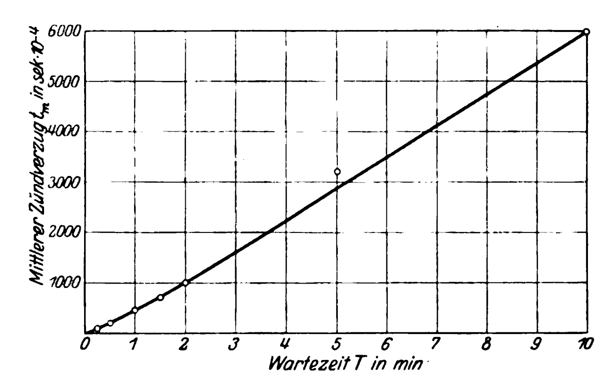
Kurve 4_A	Wartezeit T in Min.	1/8	1/4	1/2	1	2	3	5		
	Zahl der Einzelmessungen n	100	200	200	400	200	200	100		
	Mittlerer Zündverzug t_m in Sek. 10^{-4}	3,22	5,9	12,2	19,4	26,2	27,85	30		
Kurve 4_B	Wartezeit T in Min.	1/2	1	2,5	3,5					
	Zahl der Einzelmessungen n	200	250	300	200					
	Mittlerer Zündverzug t_m in Sek. 10^{-4}	6,8	12	16,1	16,3					
Kurve 5	Wartezeit T in Min.	1/8	1/4	1/2	3/4	1	3/2	2	5	10
	Zahl der Einzelmessungen n	100	200	500	200	200	100	100	100	119
	Mittlerer Zündverzug t_m in Sek. 10^{-4}	41,5	49,5	188	281	449	690	1002	3221	5980



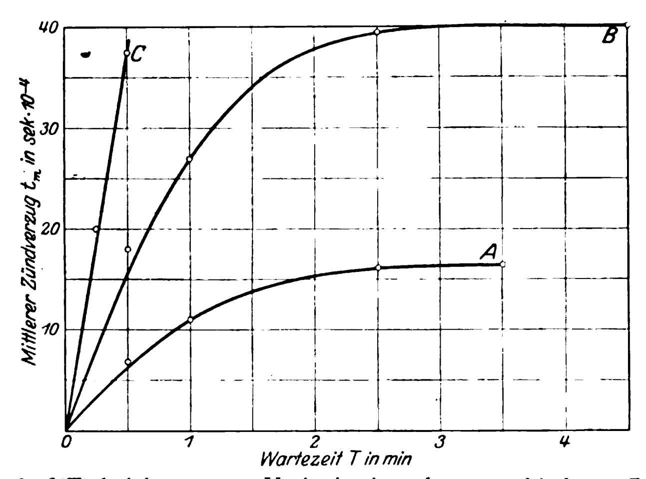
Kurve 4. Mittlerer Zündverzug t_m in Abhängigkeit von der zwischen zwei Einzelmessungen verstrichenen Zeit T bei verschiedener Vorionisation.

Kurve 4_A zeigt ein Konstantwerden des mittleren Zündverzuges oberhalb einer Wartezeit von 5 Minuten. Zur Aufnahme der Kurve 4_B wurde die Vorionisation etwas verstärkt. (Die Glimmlampe war frei in dem normal beleuchteten Arbeitsraum aufgehängt. Eine 50kerzige Metallfadenlampe hatte zur Aufnahme von 4_A einen Abstand von von 70 cm zur Glimmlampe, zur Aufnahme von 4_B einen solchen

von ungefähr 50 cm.) Die geringe Vergrößerung der Vorionisation läßt den Zündverzug bereits bei $T = 3$ Min. konstant werden. Bei ganz schwacher Vorionisation (Glimmlampe hängt in einem dichtschließenden schwarzen Pappkasten) ist selbst bei $T = 10$ Min. eine Konstanz von t_m nicht angedeutet (Kurve 5).



Kurve 5. t_m als f (T) bei ganz schwacher Vorionisation.



Kurve 6. t_m als f(T) bei konstanter Vorionisation aber verschiedener Zündspannung.

Tabelle 2.

		Werte der Kurve 6_A wie 4_B			
Kurve 6_B	Wartezeit T in Min.	$^1/_2$	1	$^5/_2$	$^9/_2$
	Zahl der Einzelmessungen n	200	200	200	200
	Mittlerer Zündverzug t_m in Sek. 10^{-4}	18	27	39.5	40
Kurve 6_C	Wartezeit T in Min.	$^1/_4$	$^1/_2$		
	Zahl der Einzelmessungen n	200	200		
	Mittlerer Zündverzug t_m in Sek. 10^{-4}	20	37.5		

Die Versuche zeigen, wie die erforderliche Wartezeit mit steigender Vorionisation außerordentlich abnimmt. Zuber findet in der zitierten Arbeit bei einer Vorionisation mit einem Mesothorpräparat eine Wartedauer von 5 Sek. ausreichend.

Kurve 6 bzw. Tabelle 2 zeigt die Funktion $t_m = f(T)$ bei konstanter Vorionisation, aber verschiedener Zündspannung, und zwar ist $E_{zA} - E_{zB} = E_{zB} - E_{zC} \cong 3$ Volt. Es zeigt sich, daß bei diesen geringen Spannungsunterschieden die erforderliche Wartedauer dieselbe bleibt.

Zusammenfassung.

Es wird eine Anordnung zur Messung des Zündverzuges bei der Glimmentladung beschrieben.

Die Darstellung der n_t^∞ liefert kein exaktes Kriterium dafür, ob die Wartezeit zwischen zwei Einzelmessungen genügend groß ist, damit die Einzelmessungen voneinander unabhängig werden.

Die Aufnahme der Kurven: „Mittlerer Zündverzug in Abhängigkeit von der Wartezeit" zeigt, wie die erforderliche Wartezeit mit steigender Vorionisation kleiner wird, sie zeigt gleichzeitig die Abnahme des mittleren Zündverzuges mit steigender Vorionisation.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, dem Direktor des Elektrotechnischen Institutes, Herrn Prof. Dr.-Ing. Gg. Hilpert für viele Anregungen bei der vorliegenden Arbeit zu danken, ebenso für die Liebenswürdigkeit, mit der er die Ausführung der sehr langwierigen Messungen unterstützte.

Der einphasige Kurzschluß des Drehstromgenerators mit Resonanzkreis an der offenen Phase.

Von

A. Mandl, AEG Berlin, Großmaschinenfabrik.

Die Frage, ob man große Drehstromgeneratoren mit einer starken Querfelddämpfung versehen soll, ist von Biermanns[1] in seinem bekannten Buche dahin beantwortet worden, daß die Querfelddämpfung geeignet ist, die Überspannungen zu unterdrücken, die im einphasigen Kurzschluß an der nicht kurzgeschlossenen Phase induziert werden. Biermanns hat auch auf die besondere Gefahr hingewiesen, die darin besteht, daß die an der offenen Phase induzierte Spannung in der angeschlossenen Leitung einen Resonanzkreis vorfindet, wodurch besonders hohe Überspannungen entstehen können[2].

Wir werden uns mit diesem letzten Fall beschäftigen und uns die Frage vorlegen: Welche Spannungen entstehen im einphasigen Kurzschluß, wenn die nicht kurzgeschlossene Phase einen Resonanzkreis vorstellt für eine der induzierten Harmonischen? Man ist versucht, die Spannung, die an der offenen Phase (ohne angeschlossenen Resonanzkreis) induziert wird, in ihre Harmonischen zu zerlegen und jene besonders zu betrachten, für welche Resonanz besteht. Es müßte, sofern die Spannung unveränderlich bestehen bleibt, ein sehr großer Strom dieser Frequenz ins Netz fließen und dort sehr hohe Spannungen erzeugen. Wir werden uns davon überzeugen, daß die Rückwirkung dieses Stromes auf den Generator nicht vernachlässigt werden darf.

[1] J. Biermanns, „Überstrom in Hochspannungsanlagen" Seite 171 usw.
[2] Siehe auch Vorschriftenbuch des VDE S. 105 „Leitsätze für den Schutz gegen Überspannungen".



Wir legen unseren Betrachtungen der Einfachheit halber einen Generator zugrunde, dessen Stator eine unverkettete Zweiphasenwicklung enthält, wie in Bild 1 dargestellt. Die Statorphase S (Wicklungsachse horizontal) werde kurzgeschlossen, die Statorphase o (Wicklungsachse vertikal) sei offen oder an den Resonanzkreis angeschlossen. R sei die Erregerwicklung des Rotors, ihre Wicklungsachse stehe im Moment $\varphi = 0$, wie gezeichnet, vertikal. Q sei eine evtl. vorhandene Querfelddämpfung. Die Streuinduktivität jeder Wicklung ist als außenliegende Drosselspule gezeichnet. Wir machen die folgenden üblichen, vereinfachenden Annahmen:

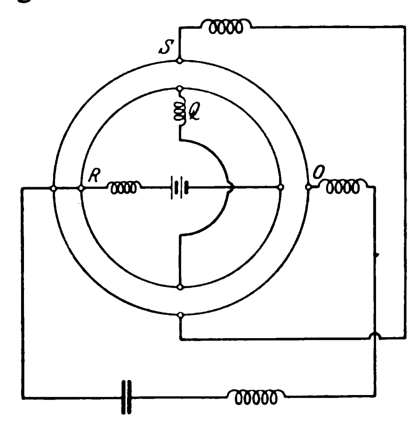


Bild 1. Synchrongenerator mit den Wicklungen S und O im Stator, R und Q im Rotor. S kurzgeschlossen, o offen, R gleichstromerregt, Q Querfelddämpfung.

1. Alle Wicklungen sind so angeordnet, daß sie längs des Luftspaltes sinusförmig verteilte Durchflutungen ergeben.
2. Die magnetische Leitfähigkeit ist im Stator und Rotor nach allen Radialrichtungen dieselbe.
3. Der Generator sei vollständig ungesättigt (geradlinige Leerlaufcharakteristik).
4. Stator- und Rotorstreuung sind konstant, d. h. vom Momentanwert der Ströme und von der momentanen Relativstellung Stator zu Rotor unabhängig.
5. Stator- und Rotorstreuung sind einander gleich.
6. Alle Wicklungen sind widerstandsfrei; wir vernachlässigen demnach den Einfluß der Dämpfung.

Die Voraussetzungen 2 und 5 werden wir später fallen lassen.

Um den Umfang der uns gestellten Aufgabe zu erkennen, müssen wir klarstellen, was es heißt, die angeschlossene Leitung bilde einen Resonanzkreis für die offene Phase. Es sind 4 Fälle möglich:

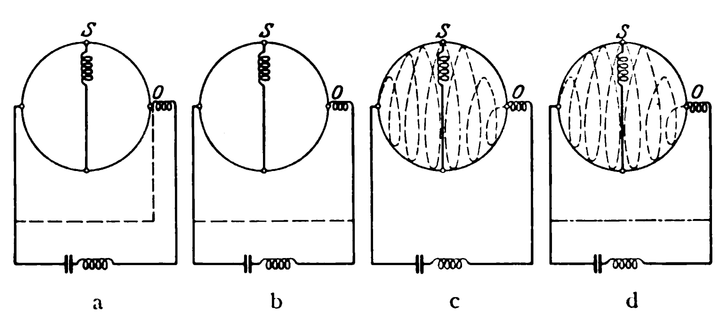


Bild 2. Die in Betracht kommenden Resonanzfälle an der offenen Phase o.
a) Mit Einbeziehung der Streuinduktivität,
b) der angeschlossene Kreis für sich,
c) mit Einbeziehung der Generatorgesamtinduktivität,
d) Kombination von b und c.

a) Der angeschlossene Kreis bildet mit Einbeziehung der Statorstreuinduktivität den Resonanzkreis. Wir können uns die offene Phase für die Resonanzfrequenz vor ihrer Streuinduktivität kurzgeschlossen denken, wie dies Bild 2a andeutet. Der Kurzschluß für die Resonanzfrequenz ist demnach an den beiden Statorachsen S und o unsymmetrisch.

b) Der angeschlossene Kreis wird für sich allein betrachtet ohne Einbeziehung der Streuinduktivität von o. Für seine Eigenfrequenz kann die offene Phase



o, wie in Bild 2 b angedeutet, kurzgeschlossen gedacht werden. Dieser Kurzschluß ist demnach vollständig symmetrisch an S und o für die Eigenfrequenz des angeschlossenen Kreises.

c) Der angeschlossene Kreis ist in Resonanz mit der Gesamtinduktivität der offenen Phase (s. Bild 2 c). Das ist die Induktivität, die durch das den Luftspalt übersetzende Hauptfeld und durch das Streufeld gebildet wird und für deren Widerstand bei der Grundfrequenz oft der Ausdruck synchrone Reaktanz gebraucht wird. Wenn diese Resonanz für die Grundfrequenz vorhanden ist, dann tritt bekanntlich Selbsterregung ein.

d) Der angeschlossene Kreis ist für eine bestimmte Frequenz in Resonanz mit der Gesamtinduktivität von o und für eine zweite Frequenz in Resonanz mit der Streuinduktivität (Bild 2 d).

Die Fälle a und b unterscheiden sich fast nicht voneinander. Wir werden deshalb, um einfacher zu rechnen, nur den symmetrischen Fall b in Betracht ziehen und ihn als Resonanz mit der Streuinduktivität bezeichnen zum Unterschied von Fall c: Resonanz mit der Gesamtinduktivität. Der Fall d ist eine Kombination von b und c. Dabei muß die Resonanzfrequenz für die Streuinduktivität größer sein, als die für die Hauptinduktivität.

Wir haben die Rechnung durchzuführen für dauernden und plötzlichen Kurzschluß, mit und ohne Querfelddämpfung, für gleiche und ungleiche magnetische Leitfähigkeit in der Rotor-, Längs- und Querachse, für gleiche und ungleiche Streuung im Stator und Rotor. Wir beginnen, um die anzuwendende Methode deutlich darzustellen, mit dem bekannten Fall des einphasigen Kurzschlusses ohne Resonanzkreis an der offenen Phase o.

Fall 1.

Dauerkurzschluß an Statorphase S, Statorphase o offen ohne Resonanzkreis, Rotor R gleichstromerregt (System 1) und ohne Querfelddämpfung. Voraussetzungsgemäß erzeugt der Gleichstrom R_0 in der Rotorwicklung R eine sinusförmig am Umfang verteilte Felderregerkurve, welche mit der Rotorwicklung R ... R_0 Kraftflußverkettungen, mit der Statorwicklung S wegen der Streuung jedoch nur $R_0\,\alpha$ Verkettungen erzeugt. α ist eine Verhältniszahl, die wenig kleiner als 1 ist[1]. Das rotierende Feld $R_0\alpha$ schneidet die Wicklung S mit Grundfrequenz und erzeugt dort einen Strom $2S_1$, der ein sinusförmig verteiltes Wechselstromvolumen ergibt. Wir zerlegen in bekannter Weise das von $2S_1$ hervorgerufene Wechselfeld in 2 Drehfelder mit- und gegenläufig von der halben Stärke S_1. Das gegenläufige Drehfeld erzeugt an der Rotorwicklung eine Spannung zweifacher Frequenz, welche den Strom $2R_2$ fließen läßt. Wir zerlegen das von $2R_2$ getriebene am Rotor haftende Wechselfeld in 2 Drehfelder, von welchen das mitlaufende an der Statorwicklung S die dreifache Frequenz erzeugt. Wir können diese Zerlegung beliebig lange fortsetzen und erhalten eine unendlich lange Reihe von höheren Harmonischen wie in Bild 3 für die Rotorstellung $\varphi = 0$ dargestellt. Die Zerlegung der Wechselfelder in Drehfelder ist dort

[1] Der Zusammenhang der Größe α mit den Teilstreuungskoeffizienten τ_1 bezw. τ_2 und mit dem totalen Streuungskoeffizienten τ ist einfach herzustellen.

Es ist

$$1 + \tau_1 = 1 + \tau_2 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{somit} \quad \alpha = \frac{1}{1+\tau_1} = \frac{1}{1+\tau_2}$$

und

$$\tau = 1 - \frac{1}{(1+\tau_1)\,(1+\tau_2)} = 1 - \alpha^2 \quad \text{somit} \quad \alpha^2 = 1 - \tau \quad \text{und} \quad \alpha = \sqrt{1-\tau}\,.$$

Es sind demnach alle im folgenden abgeleiteten Beziehungen und Ergebnisse ohne weiteres auch durch den totalen Streuungskoeffizienten τ auszudrücken.

bereits durchgeführt. Zu jedem Drehfeld ist mit Pfeil die Umlaufrichtung angegeben. Die Zahl bei dem Pfeil bedeutet die räumliche Winkelgeschwindigkeit, ausgedrückt in Einheiten der synchronen. In dem dem Bild 3 zugrundeliegenden Zeitmoment $\varphi = 0$ steht die Achse von R senkrecht zu jener von S. Die Statorströme sind deshalb alle Null. Wir können nun 2 Gleichungssysteme anschreiben. Es muß für jede Frequenz die Verkettungszahl mit der Statorwicklung S und mit der Rotorwicklung R konstant bleiben, da beide Wicklungen widerstandslos kurzgeschlossen sind. Bei Anschreibung der Gleichungen betrachten wir als Vorzeichenregel, daß positive Drehfelder R und S, wie in Bild 3 gezeichnet, nach oben gerichtet liegen sollen. Wir erhalten die beiden folgenden Gleichungssysteme:

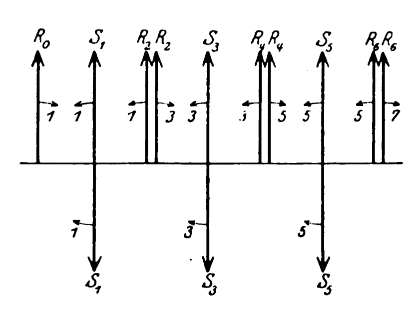


Bild 3. Schema der entstehenden Drehstromsysteme oder Felder im Dauerkurzschluß von S, Phase O gänzlich offen, ohne Querfelddämpfung. Erregung des Rotors mit Gleichstrom R_0 (System 1, zu Fall 1).

$R_0\,\alpha - 2S_1 - R_2\,\alpha = 0$ die erste Harmonische an der Statorwicklung

$R_2\,\alpha - 2S_3 - R_4\,\alpha = 0$ die dritte Harmonische an der Statorwicklung

$R_4\,\alpha - 2S_5 - R_6\,\alpha = 0$ die fünfte Harmonische an der Statorwicklung

usw.

$S_1\,\alpha + 2R_2 - S_3\,\alpha = 0$ die zweite Harmonische an der Rotorwicklung R

$S_3\,\alpha + 2R_4 - S_5\,\alpha = 0$ „ vierte „ „ „ „ „

$S_5\,\alpha + 2R_6 - S_7\,\alpha = 0$ „ sechste „ „ „ „ „

usw.

Aus den Gleichungen ergibt sich sofort

$$R_2 = KR_0 \qquad \text{und} \qquad S_3 = KS_1$$
$$R_4 = KR_2 = K^2R_0 \qquad\qquad S_5 = KS_3 = K^2S_1$$
$$R_6 = KR_4 = K^3R_0 \qquad\qquad S_7 = KS_5 = K^3S_1$$

und aus der ersten Gleichung der ersten Gruppe $R_0\,\alpha - 2S_1 - R_0K\,\alpha = 0$ und demnach $S_1 = R_0\,\frac{\alpha}{2}\,(1 - K)$. Dies in die erste Gleichung der zweiten Gruppe eingesetzt $R_0\,\frac{\alpha^2}{2}\,(1 - K)^2 + 2KR_0 = 0$ und daraus $K = \frac{\alpha^2 - 2 + 2\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2}$. K ist stets negativ, und zwar ist für

$\alpha =$	0,7	0,8	0,9	1
$K =$	$-0{,}166$	$-0{,}25$	$-0{,}394$	-1

Da $\frac{\alpha^2}{4}\,(1 - K)^2 + K = 0$ ist, so ist $\frac{\alpha}{2}\,(1 - K) = \sqrt{-K}$ und $S_1 = R_0\sqrt{-K}$.

Damit haben wir zunächst alle Felder gefunden. Die Felder R_0, S_1, R_2, S_3, R_4 usw. nehmen nach einer geometrischen Reihe ab mit dem Faktor $\sqrt{-K}$. Als Vorzeichenregel gilt, daß R_0, R_2, R_4, so wie sie aufeinanderfolgen, verschiedene Vorzeichen haben (da K negativ ist). Dasselbe gilt von S_1, S_3, S_5 usw. S_1 hat dasselbe Vorzeichen wie R_0.

Wir sind damit in der Lage, die Spannungen an der offenen Phase 0 zu berechnen. Die in der Wicklung S fließenden Ströme scheiden dabei aus, da S und 0 senkrecht zueinander stehen und sich induktiv gegenseitig nicht beeinflussen können. Es sind demnach nur die Ströme R zu berücksichtigen, und zwar erzeugen.

$\alpha\,(R_0 + R_2)$ die erste Harmonische

$\alpha\,(R_2 + R_4)$ die dritte Harmonische

$\alpha\,(R_4 + R_6)$ die fünfte Harmonische usw.

Dabei ist zu beachten, daß die Felder in Bild 3 in dem Moment $\varphi = 0$ aufgezeichnet sind, in welchem sie alle gleichzeitig ihren Maximalwert erreichen. Der Maximalwert der Spannung an der offenen Phase wird 90^0 vorher oder nachher erzeugt, so daß, wenn wir die erste Harmonische positiv zählen, die dritte negativ, die fünfte positiv usw. zu rechnen ist. Der Höchstwert der an der offenen Phase 0 induzierten Spannung beträgt demnach

$$\alpha \{1 (R_0 + R_2) - 3 (R_2 + R_4) + 5 (R_4 + R_6) - 7 (R_6 + R_8) + . . \} = \alpha \{R_0 - 2 R_2 + 2 R_4 - 2 R_6 + . . \} =$$
$$= \alpha \{R_0 - 2 R_0 K (1 - K + K^2 - K^3 + . . \} = \alpha \left\{R_0 - 2 R_0 \frac{K}{1 + K}\right\} = \alpha R_0 \frac{1 - K}{1 + K} = \frac{\alpha R_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

$\alpha \cdot R_0$ ist der Maximalwert der je Phase induzierten Leerlaufspannung. Im einphasigen Dauerkurzschluß wird somit

an der offenen Phase für $\alpha = 0{,}7$ 0,8 0,9
als Höchstwert das 1,4 1,67 2,3 fache des Höchstwertes der Leerlaufspannung induziert.

Wir wollen uns noch ein Bild machen über die Größe des gemeinsamen, den Luftspalt übersetzenden Feldes, welches von der Resultierenden J_{Res} aller Stator- und Rotorströme getrieben wird. Diese Summe beträgt für

$$\varphi = 0 : J_{Res} = \alpha (R_0 + 2 R_2 + 2 R_4 + . .) = \alpha (R_0 + 2 R_0 K + 2 R_0 K^2 + . .) = \alpha R_0 \frac{1 + K}{1 - K}$$

$$\varphi = 90^0 : J_{Res} = \alpha (R_0 - 2 R_2 + 2 R_4 - 2 R_6 + . . - 2 S_1 + 2 S_3 - 2 S_5 + 2 S_7 - . .) = \alpha R_0 \frac{1 - \sqrt{-K}}{1 + \sqrt{-K}}$$

$\alpha \cdot R_0$ ist das Luftspaltfeld im Leerlauf. Im einphasigen Dauerkurzschluß beträgt das Luftspaltfeld für

	$\alpha = 0{,}7$	0,8	0,9	
und $\varphi = 0$ das	0,715	0,6	0,435	fache des Leerlaufluftspaltfeldes,
$\varphi = 90^0$ das	0,372	0,333	0,230	fache des Leerlaufluftspaltfeldes.

Die resultierende Verkettungszahl aller entstehenden Felder mit der Statorwicklung S und Rotorwicklung R, die je für sich dauernd kurzgeschlossen sind, ist konstant, und zwar für die Statorwicklung S dauernd Null und für die Rotorwicklung R dauernd $R_0 \frac{1 + K}{1 - K}$.

Fall 2.

Dauerkurzschluß an der Statorphase S, Statorphase 0 offen ohne Resonanzkreis, Rotor in der Achse R kurzgeschlossen ohne Querfelddämpfung, Stator S gleichstromerregt mit S_0. (System 2.)

Dieser Fall interessiert uns wegen des plötzlichen Kurzschlusses. Die Aufeinanderfolge der Felder, wie sie von S_0 erregt werden, ist in Bild 4 für den Zeitpunkt entsprechend der Rotorstellung $\varphi = 0$ dargestellt. Als Vorzeichenregel beachten wir, daß Stromsysteme oder Felder, die in Bild 4 nach links gerichtet sind, positiv zählen. Der Drehsinn der einzelnen Felder ist wieder durch Pfeile, die räumliche Winkelgeschwindigkeit (im Verhältnis zur synchronen) durch die dazu geschriebenen Zahlen gekennzeichnet. Die beiden Gleichungssysteme für die kurzgeschlossenen Wicklungen S und R lauten:

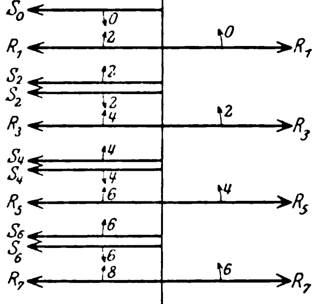


Bild 4. Schema der entstehenden Drehstromsysteme oder Felder im Dauerkurzschluß von S, Phase O gänzlich offen, Rotor in der Achse R kurzgeschlossen, ohne Querfelddämpfung. Erregung des Stators mit Gleichstrom S_0 (System 2, zu Fall 2).

$R_1 \alpha + 2 S_2 - R_3 \alpha = 0$ die 2. an S
$S_0 \alpha - 2 R_1 - S_2 \alpha = 0$ die 1. an R
$R_3 \alpha + 2 S_4 - R_5 \alpha = 0$ die 4. an S
$S_2 \alpha - 2 R_3 - S_4 \alpha = 0$ die 3. an R usw.

Es folgt sofort:

$$S_2 = S_0 K \qquad R_3 = R_1 K$$
$$S_4 = S_0 K^2 \qquad R_5 = R_1 K^2 \quad \text{usw.}$$

Für K ergibt sich derselbe Wert wie unter Fall 1 und für

$$R_1 = S_0 \sqrt{-K}.$$

Die Spannung an der offenen Phase wird wieder nur von den Feldern R erzeugt, und zwar von

$R_1 + R_3$ die zweite Harmonische,

$R_3 + R_5$ die vierte Harmonische usw.

Der Höchstwert der Spannung wird im Zeitpunkte $\varphi = 90^0$ erzeugt, in welchem die einzelnen Harmonischen, wie man leicht überlegt, abwechselnd positiv und negativ zu zählen sind. Der Höchstwert beträgt

$$\alpha \{2(R_1 + R_3) - 4(R_3 + R_5) + 6(R_5 + R_7) - ..\} = \alpha \{2 R_1 - 2 R_3 + 2 R_5 - ..\} =$$
$$= 2 R_1 \alpha (1 - K + K^2 - ..) = 2 \alpha S_0 \sqrt{-K} \frac{1}{1 + K}.$$

Das Luftspaltfeld wird von der Summe J_{Res} aller Ströme getrieben. Diese Summe beträgt für

$$\varphi = 0: J_{Res} = \alpha (S_0 + 2 S_2 + 2 S_4 + 2 S_6 + ..) = \alpha S_0 \frac{1 + K}{1 - K}$$
$$\varphi = 90^0: J_{Res} = \alpha (S_0 - 2 S_2 + 2 S_4 - 2 S_6 + .. - 2 R_1 + 2 R_3 - 2 R_5 + 2 R_7 - ..) =$$
$$= \alpha S_0 \frac{1 - \sqrt{-K}}{1 + \sqrt{-K}}.$$

Die resultierende Verkettungszahl aller entstehenden Felder mit der Statorwicklung S und Rotorwicklung R, die je für sich dauernd kurzgeschlossen sind, ist konstant, und zwar für die Statorwicklung S dauernd $S_0 \frac{1 + K}{1 - K}$ und für die Rotorwicklung R dauernd Null.

Fall 3.

Plötzlicher Kurzschluß der Statorphase S, Statorphase 0 offen ohne Resonanzkreis, Rotor R gleichstromerregt mit Strom G und ohne Querfelddämpfung.

Der plötzliche Kurzschluß erfolge im Zeitpunkte $\varphi = -90^0$, also 90^0 vor der in Bild 1 aufgezeichneten und mit $\varphi = 0$ bezeichneten Stellung. In dieser Stellung ist die Rotorwicklung R mit dem Feld G, die Statorwicklung S mit dem Feld αG verkettet. Die beiden Wicklungen sind widerstandslos kurzgeschlossen und halten ihre Verkettungszahl aufrecht. Wir können uns die zur Ausbildung kommenden Felder in 2 Systeme zerlegt denken, von welchen eines dem Fall 1, das andere dem Fall 2 entspricht.

System 1.

Seine Verkettungszahl mit der Statorwicklung beträgt dauernd Null, die mit der Rotorwicklung $R_0 \frac{1 + K}{1 - K} = G$. Es ist somit $R_0 = G \frac{1 - K}{1 + K}$ und die Spannung dieses Systems an der offenen Phase im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$

$$\alpha R_0 \frac{1 - K}{1 + K} = \alpha G \left(\frac{1 - K}{1 + K}\right)^2 = \frac{\alpha G}{1 - \alpha^2}.$$

Sie besteht nur aus ungeradzahligen Harmonischen. Das Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0$ beträgt

$$\alpha R_0 \frac{1 + K}{1 - K} = \alpha G$$

und ist vertikal nach oben gerichtet.

System 2.

Seine Verkettungszahl mit der Rotorwicklung beträgt dauernd Null, die mit der Statorwicklung $S_0 \frac{1+K}{1-K} = \alpha G$. Es ist somit $S_0 = \alpha G \frac{1-K}{1+K}$ und die Spannung dieses Systems an der offenen Phase im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$

$$2\alpha S_0 \sqrt{-K} \frac{1}{1+K} = 2\alpha^2 G \sqrt{-K} \frac{1-K}{(1+K)^2} = \alpha G \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Sie besteht nur aus geradzahligen Harmonischen. Das Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0$ beträgt

$$\alpha S_0 \frac{1+K}{1-K} = \alpha^2 G$$

und ist horizontal nach links gerichtet.

Die beiden Systeme 1 und 2 beschreiben richtig den Vorgang nach dem plötzlichen Kurzschluß, den wir damit durch Übereinanderlagerung von 2 Dauerkurzschlüssen dargestellt haben, von denen der eine im Rotor, der andere im Stator erregt wird. Jeder von beiden ergibt mit der anderen Wicklung dauernd die Verkettungszahl Null. Die Verkettungszahl mit der eigenen Wicklung wird durch entsprechende Wahl der Erregerstromstärke R_0 bzw. S_0 auf den richtigen Wert G im Rotor und $G\alpha$ im Stator gebracht.

Der Höchstwert der von beiden Systemen induzierten Spannung an der offenen Phase 0 beträgt zur Zeit $\varphi = 90^0 : \alpha G \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$, und zwar für

$\alpha =$ 0,7	0,8	0,9	1	
2,93	4,55	9,55	∞	mal der Leerlaufspannung αG.

Das resultierende Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0$ ist

$$\sqrt{(\alpha G)^2 + (\alpha^2 G)^2} = \alpha G \sqrt{1+\alpha^2}$$

$= 1,22 \quad 1,28 \quad 1,34 \quad 1,414$ mal dem Leerlaufluftspaltfeld αG.

Der Höchstwert des Statorstromes wird in der Stellung $\varphi = 90^0$ also 180^0 nach Eintritt des Kurzschlusses erreicht, und zwar

System 1.

$$2S_1 - 2S_3 + 2S_5 - \ldots = \frac{2S_1}{1+K} = 2G \frac{1-K}{(1+K)^2} \sqrt{-K} = \frac{\alpha G}{1-\alpha^2},$$

System 2.

$$S_0 - 2S_2 + 2S_4 - \ldots = S_0 \frac{1-K}{1+K} = \alpha G \left(\frac{1-K}{1+K}\right)^2 = \frac{\alpha G}{1-\alpha^2}.$$

Die Summe beträgt $\frac{2G\alpha}{1-\alpha^2}$.

Fall 4.

Dauerkurzschluß an Statorphase S. Statorphase 0 offen ohne Resonanzkreis, Rotor R gleichstromerregt (System 1), mit Querfelddämpfung. Wir haben den 3 kurzgeschlossenen Wicklungen entsprechend drei Gleichungssysteme anzuschreiben

$$R_0\alpha - 2S_1 - \alpha\cdot(Q_2 + R_2) = 0 \ldots . 1. \text{ Harmonische an } S,$$
$$R_2 - Q_2 = 0 \ldots . 3. \quad \text{,,} \quad \text{,,} \ S,$$
$$S_1\alpha + 2R_2 = 0 \ldots . 2. \quad \text{,,} \quad \text{,,} \ R,$$
$$S_1\alpha + 2Q_2 = 0 \ldots . 2. \quad \text{,,} \quad \text{,,} \ Q.$$

Diese Felder sind in Bild 5 dargestellt. Alle höher periodigen Felder in den 3 Wicklungen S, R, Q werden Null. Wir finden



$$R_2 + Q_2 = -S_1 \alpha \text{ und } S_1 = R_0 \frac{\alpha}{2 - \alpha^2}$$

$$\text{,,} \quad R_2 = Q_2 = -\frac{R_0}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2}.$$

Spannung an der offenen Phase zur Zeit $\varphi = 90^0$ $\alpha (R_0 + Q_2 + R_2) = \alpha R_0 \cdot 2 \frac{1 - \alpha^2}{2 - \alpha^2}$.

Sie ist nur von Grundfrequenz.

Verkettung mit der Statorwicklung S und Querfelddämpferwicklung Q dauernd Null. Mit der Rotorwicklung R... $R_0 + 2 R_2 = 2 R_0 \frac{1 - \alpha^2}{2 - \alpha^2}$.

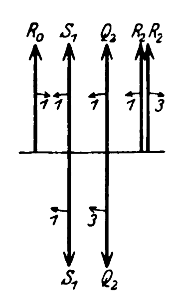


Bild 5. Schema der entstehenden Drehstromsysteme oder Felder im Dauerkurzschluß von S, Phase O gänzlich offen, mit Querfelddämpfung, Erregung des Rotors mit Gleichstrom R_0 (System 1, zu Fall 4).

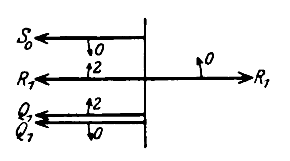


Bild 6. Schema der entstehenden Drehstromsysteme oder Felder im Dauerkurzschluß von S, Phase O gänzlich offen, Rotor in R und Q kurzgeschlossen, also mit Querfelddämpfung. Erregung des Stators mit Gleichstrom S_0 (System 2, zu Fall 5).

Fall 5.

Dauerkurzschluß an der Statorphase S, Statorphase o offen ohne Resonanzkreis, Rotor in den Achsen R und Q kurzgeschlossen, also mit Querfelddämpfung; Stator S gleichstromerregt mit S_0 (System 2).

Den 3 kurzgeschlossenen Wicklungen entsprechen die 3 Gleichungen

$S_0 \alpha - 2 R_1 = 0$ die 1. Harmonische an R $\quad S_0 \alpha + 2 Q_1 = 0$ die 1. an Q

$R_1 \alpha + Q_1 \alpha = 0$ die 2. an S.

Diese Felder sind in Bild 6 dargestellt. Alle höher periodigen Felder in den 3 Wicklungen S, R, Q werden Null. Wir finden $R_1 = S_0 \frac{\alpha}{2}$ und $Q_1 = -S_0 \frac{\alpha}{2}$.

Spannung an der offenen Phase dauernd Null.

Verkettung mit der Statorwicklung $S_0 + 2 Q_1 \alpha = S_0 (1 - \alpha^2)$,

,, ,, ,, Rotorwicklung R und Querfelddämpfung Q dauernd Null.

Fall 6.

Plötzlicher Kurzschluß an der Statorphase S, Statorphase o offen ohne Resonanzkreis, Rotor in der Achse R gleichstromerregt mit Strom G, mit Querfelddämpfung.

System 1

(entsprechend Fall 4) Verkettung mit der Rotorwicklung

$$2 R_0 \frac{1 - \alpha^2}{2 - \alpha^2} = G \quad \text{somit} \quad R_0 = \frac{G}{2} \cdot \frac{2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Spannung an der offenen Phase zur Zeit $\varphi = 90^0$: $\alpha R_0 \cdot 2 \frac{1 - \alpha^2}{2 - \alpha^2} = \alpha G =$ Leerlaufspannung von Grundfrequenz.



System 2

(entsprechend Fall 5) Verkettung mit der Statorwicklung

$$S_0(1-\alpha^2) = \alpha G, \text{ somit } S_0 = \frac{\alpha G}{1-\alpha^2}.$$

Spannung an der offenen Phase 0.

Es wird demnach insgesamt an der offenen Phase nur die Leerlaufspannung mit Grundfrequenz induziert.

Für das Luftspaltfeld ergibt sich bei System 1 im Zeitpunkt $\varphi = 0$:

$$(R_0 + 2 R_2)\alpha = 2 R_0 \alpha \frac{1-\alpha^2}{2-\alpha^2} = G\alpha,$$

vertikal nach oben, bei System 2 im Zeitpunkt $\varphi = 0$:

$$(S_0 + 2 Q_1)\alpha = S_0 \alpha (1-\alpha) = G\alpha \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

horizontal nach links.

Das resultierende Luftspaltfeld im Zeitpunkt $\varphi = 0$ beträgt demnach

$$G\alpha\left\{1 \overset{\wedge}{+} \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}.$$

Es beträgt für

$\alpha = 0{,}7$	0,8	0,9	1	
1,08	1,09	1,115	1,16	des Leerlaufluftspaltfeldes $G\alpha$.

Der Höchstwert des Statorstromes im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$ beträgt $2 S_1 + S_0 = \frac{2 G\alpha}{1-\alpha^2}$ und stimmt mit dem Höchstwert von Fall 3 überein.

Fall 7.

Resonanz mit der 1. Streuinduktivität.

Der an die offene Phase 0 angeschlossene Kreis besitzt eine Eigenschwingungszahl, welche der Betriebsfrequenz gleichkommt.

a) Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung.

$$R_0\alpha - 2 S_1 = 0,$$
$$o_1 + S_1 = 0,$$
$$R_0\alpha + 2 o_1 = 0,$$

somit $S_1 = \frac{1}{2} R_0\alpha$ und $o_1 = -\frac{1}{2} R_0\alpha$. Es fließt derselbe Strom in den 2 Achsen des Stators, der sich ebenso verhält, als ob er in beiden Phasen kurzgeschlossen wäre. Da in der Statorwicklung höhere Harmonische nicht erzeugt werden, ist das Fehlen des Kurzschlusses für diese an der offenen Phase 0 ohne Bedeutung. Die Felder sind in Bild 7 dargestellt.

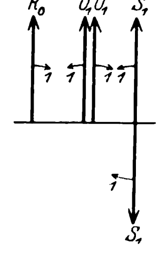


Bild 7. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, Resonanz mit der 1. Streuinduktivität.

Die Verkettung mit der Statorwicklung ist dauernd Null, die Verkettung mit der Rotorwicklung $R_0 + 2 o_1 \alpha = R_0(1-\alpha^2)$. Die Klemmenspannung an der Phase 0 ist dauernd Null. Im Resonanzkreis selbst entstehen an der Selbstinduktion und an der Kapazität Spannungen, die dem in ihm fließenden Strom $-R_0\alpha$ entsprechen.

Das Luftspaltfeld $\alpha(R_0 + 2 o_1) = \alpha R_0(1-\alpha)$ ist konstant und rotiert synchron mit dem Rotor.

b) Dauerkurzschluß mit Querfelddämpfung.

Dieser Fall entspricht genau dem Fall a, in der Dämpferwicklung Q fließt kein Strom.

c) Plötzlicher Kurzschluß ohne Querfelddämpfung, Erregung im Rotor R mit dem Strom G.

System 1: Verkettung mit der Rotorwicklung $R_0(1-\alpha^2) = G$ und somit $R_0 = \frac{G}{1-\alpha^2}$; Spannung an der offenen Phase 0 dauernd Null.

Stromhöchstwert zur Zeit $\varphi = 90^0$ in $S: 2 S_1 = R_0 \alpha = \frac{G\alpha}{1-\alpha^2}$; Stromhöchstwert zur Zeit $\varphi = 0$ in 0: $2 0_1 = -\frac{G\alpha}{1-\alpha^2}$. Dieser Strom entspricht genau dem Höchstwert des Stromes von System 1 in Fall 3. Er beträgt für

$\alpha = 0,7$ 0,8 0,9 1
1,96 2,78 5,26 ∞ mal dem Dauerkurzschlußstrom $G\alpha$.

Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0 : \alpha R_0 (1-\alpha) = \frac{G\alpha}{1+\alpha}$ vertikal nach oben.

System 2 erregt vom Stator S mit S_0 bleibt ungeändert, da es nur geradzahlige Harmonische an der offenen Phase 0 erzeugt. Spannung an der offenen Phase wie in Fall 3, System 2: $\alpha G \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$. Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0$: $\alpha^2 G$ horizontal nach links. Die gesamte Spannung an den Klemmen der offenen Phase rührt nur vom System 2 her und beträgt für

$\alpha = 0,7$ 0,8 0,9 1
0,955 1,78 4,26 ∞ mal der Leerlaufspannung αG.

Sie besteht nur aus geradzahligen Harmonischen. Das gesamte Luftspaltfeld ist $G\alpha \left\{ \frac{1}{1+\alpha} \hat{+} \alpha \right\}$, wobei das $\hat{+}$ Zeichen eine geometrische Addition unter rechtem Winkel bedeutet und beträgt 0,92 0,97 1,04 1,12 des Leerlaufluftspaltfeldes.

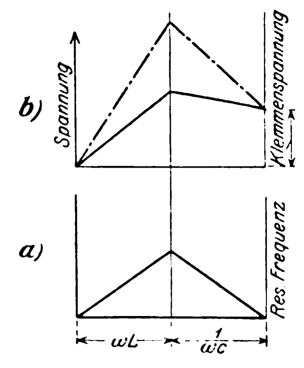


Bild 8. Spannungsverteilung im äußeren Kreis 0.
a) Resonanzfrequenz (Grundfrequenz im Fall 7),
b) zweite Harmonische und Summe (zu Fall 7).

Wir erhalten als Ergebnis: Es verschwinden an den Klemmen der Generatorphase 0 alle geradzahligen oder ungeradzahligen Harmonischen, deren Frequenz gleich oder höher ist als die geradzahlige oder ungeradzahlige Resonanzfrequenz. Es fließt ein Strom dieser Frequenz im Kreis 0 und erzeugt dort gleich große einander entgegengesetzt gerichtete Spannungen an der Selbstinduktion und Kapazität des Resonanzkreises. Wir nehmen an, daß alle Spannungen anderer Frequenz im Kreis 0 sehr großen Widerstand vorfinden, so daß wir die Rückwirkung der sehr kleinen Ströme auf den Generator vernachlässigen können. Durch die für die Resonanzfrequenz vorhandene Abstimmung ist die Aufteilung aller Spannungen anderer Frequenz, welche an den Klemmen von 0 erzeugt werden, zwischen Selbstinduktion und Kapazität fest gegeben. In unserem Falle, in welchem Resonanz für die Grundfrequenz besteht, wird die Spannung zweiter Frequenz sich mit $^4/_3$ der Klemmenspannung an der Selbstinduktion und mit $-{}^1/_3$ an der Kapazität ansetzen. Man überlegt leicht, daß sich diese Spannung und die vom Strom der Resonanzfrequenz erzeugte Spannung mit ihren Höchstwerten addieren. Bild 8 zeigt schematisch die Spannungsverteilung, Bild 8a die Spannung von Grundfrequenz, für welche Resonanz besteht, Bild 8b die Spannungsverteilung für die doppelte Frequenz und strichpunktiert die Summenspannung. Es können im Kreis 0 Spannungen entstehen, welche die Klemmenspannung an 0 um ein Mehrfaches übersteigen. Man darf eben nicht übersehen, daß ein verhältnismäßig großer Strom von Resonanzfrequenz ins Netz hinausfließt.

Da wir auch Fälle mit Resonanz höherer Frequenz betrachten wollen, so sei allgemein folgendes bemerkt: Wenn ein Kreis, bestehend aus Selbstinduktion und Kapazität, eine Eigenschwingungszahl von n-facher Frequenz hat, so wird eine aufgedrückte Spannung von m-facher Frequenz sich so verteilen, daß sich $100 \cdot \frac{m^2}{m^2 - n^2}\,\%$ an die Selbstinduktion und $100 \frac{n^2}{m^2 - n^2}\,\%$ an die Kapazität ansetzen. Für $m > n$ wird die Spannung an der Selbstinduktion, für $m < n$ die Spannung an der Kapazität größer als die Klemmenspannung. Die Spannungsvergrößerung wird um so ausgeprägter, je mehr sich das Verhältnis m/n dem Wert 1 nähert. In unserem Fall: Resonanz mit der 1. Frequenz ($n = 1$) tritt die Spannung 2-facher Frequenz ($m = 2$) an der Selbstinduktion um $^1/_3$, die 4-fache Frequenz ($m = 4$) um $^1/_{15}$, die 6-fache Frequenz um $^1/_{35}$ vergrößert auf. Diese Spannungsvergrößerung kommt für die der Resonanzfrequenz benachbarten Harmonischen selbstredend auch zustande, wenn der Kreis o so verstimmt ist, daß seine Eigenschwingungszahl mit keiner der an den Klemmen von o entstehenden Harmonischen übereinstimmt (Fall 3).

d) Plötzlicher Kurzschluß mit Querfelddämpfung:

System 1 wie in c), Dämpferwicklung Q ohne Strom;

„ 2 wie in Fall 5, Verkettung mit der Statorwicklung

$$S_0(1 - \alpha^2) = G \cdot \alpha \quad \text{und} \quad S_0 = \frac{G\alpha}{1 - \alpha^2}.$$

Spannung an den Klemmen der offenen Phase o dauernd Null. Im Resonanzkreis o entstehen Spannungen, die dem in ihm fließenden Strom $2\,O_1 = \frac{G\alpha}{1 - \alpha^2}$ von Grundfrequenz entsprechen.

Fall 8.

Resonanz mit der 3. Streuinduktivität. Der an die offene Phase O angeschlossene Kreis besitzt eine Eigenschwingungszahl, gleich dem 3 fachen der Betriebsfrequenz.

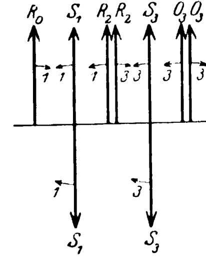


Bild 9. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 1. Resonanz mit der 3. Streuinduktivität (zu Fall 8).

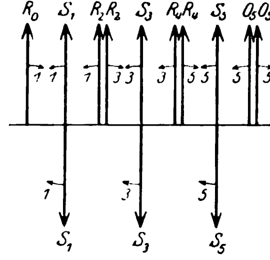


Bild 10. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 1. Resonanz mit der 5. Streuinduktivität (zu Fall 9).

a) Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung. Bild 9 zeigt das Diagramm der Felder. Es gelten die Gleichungen:

$R_0\alpha - 2\,S_1 - R_2\alpha = 0$ die 1. in S

$S_1\alpha + 2\,R_2 - S_3\alpha + O_3\alpha = 0$ „ 2. „ R

$R_2\alpha - 2\,S_3 = 0$ „ 3. „ S

$R_2\alpha + 2\,O_3 = 0$ „ 3. „ O

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$S_1 = -R_0\alpha\frac{2 - \alpha^2}{4 - 3\,\alpha^2}$$

$$R_2 = -R_0\frac{\alpha^2}{4 - 3\,\alpha^2}$$

$$S_3 = -R_0\frac{\alpha^3}{2\,(4 - 3\,\alpha^2)}$$

$S_3 + O_3 = 0$ die 4. in R $O_3 = \frac{R_0 \alpha^3}{2(4 - 3\alpha^2)}$

Verkettung mit der Rotorwicklung $R_0 + 2 R_2 + 2 O_3 \alpha = \frac{R_0}{4 - 3\alpha^2}(4 - 5\alpha^2 + \alpha^4)$

Höchstwert der Spannung an den Klemmen der offenen Phase O: $(R_0 + R_2)\alpha = \alpha R_0 \frac{4(1 - \alpha^2)}{4 - 3\alpha^2}$ von Grundfrequenz.

Das Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0 : (R_0 + 2 R_2 + 2 O_3)\alpha = \alpha R_0 \frac{4 - 5\alpha^2 + \alpha^3}{4 - 3\alpha^2}$.

b) Dauerkurzschluß mit Querfelddämpfung identisch mit Fall 4, da an O nur die Grundfrequenz erzeugt wird.

c) Plötzlicher Kurzschluß ohne Querfelddämpfung, Erregung im Rotor R mit Strom G.

System 1: Verkettung mit Wicklung $R : \frac{R_0}{4 - 3\alpha^2}(4 - 5\alpha^2 + \alpha^4) = G$ und $R_0 = G \frac{4 - 3\alpha^2}{4 - 5\alpha^2 + \alpha^4}$. Höchstwert der Spannung an den Klemmen von O: $\alpha R_0 \frac{4(1 - \alpha^2)}{4 - 3\alpha^2} = \alpha G \frac{4}{4 - \alpha^2}$ von Grundfrequenz.

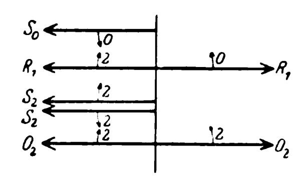


Bild 11. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 2. Resonanz mit der 2. Streuinduktivität (zu Fall 10).

Bild 12. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 2. Resonanz mit der 4. Streuinduktivität (zu Fall 11).

Stromhöchstwert in S: $2 S_1 - 2 S_3 = \frac{G\alpha}{1 - \alpha^2}$. Dieser Strom entspricht wieder dem Höchstwert von System 1 in Fall 3.

Stromhöchstwert in O: $2 O_3 = \frac{R_0 \alpha^3}{4 - 3\alpha^2} = \alpha G \frac{\alpha^2}{4 - 5\alpha^2 + \alpha^4}$

Er beträgt für

$\alpha = 0{,}7$	0,8	0,9	1,0
0,274	0,529	1,335	∞ mal dem Dauerkurzschlußstrom αG.

Luftspaltfeld für $\varphi = 0$: $\alpha R_0 \frac{4 - 5\alpha^2 + \alpha^3}{4 - 3\alpha^2} = \alpha G \frac{4 - 5\alpha^2 + \alpha^3}{4 - 5\alpha^2 + \alpha^4}$ vertikal nach oben.

System 2 bleibt ungeändert, da es nur geradzahlige Harmonische an G erzeugt.

Somit ist die Spannung an den Klemmen von O: $\alpha G \left\{ \frac{4}{4 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \right\}$ und zwar

2,1 2,97 5,51 ∞ mal der Leerlaufspannung αG.

Sie enthält die Grundfrequenz und geradzahlige Harmonische. Das gesamte Luftspaltfeld $\alpha G \left\{ \frac{4 + 5\alpha^2 + \alpha^3}{4 - 5\alpha^2 + \alpha^4} \hat{+} \alpha \right\}$ ist

1,27 1,35 1,425 1,54 mal dem Luftspaltfeld αG.

Im Kreis o entsteht eine Spannung 3facher Frequenz durch den Strom $2\,O_3$ von gleicher Größe an Selbstinduktion und Kapazität.

d) Plötzlicher Kurzschluß mit Querfelddämpfung.

System 1 wie Fall 6: Spannung an der offenen Phase $= \alpha G =$ Leerlaufspannung von Grundfrequenz.

System 2 wie Fall 6: Spannung an der offenen Phase $= 0$.

Die Spannung αG von Grundfrequenz erscheint an der Kapazität im Verhältnis 9/8 vergrößert. Es fließt kein Strom im Kreis O.

In gleicher Weise wurden untersucht:

Fall 9 Resonanz mit der 5. Streuinduktivität siehe Bild 10,
Fall 10 „ „ „ 2. „ „ „ 11.
Fall 11 „ „ „ 4. „ „ „ 12.

Bild 13 und 14 zeigen eine Zusammenstellung der für den plötzlichen Kurzschluß erhaltenen Resultate. Bild 13 stellt die Klemmenspannung an der Phase O abhängig von der Resonanzfrequenz für die Werte $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$ dar, Bild 14

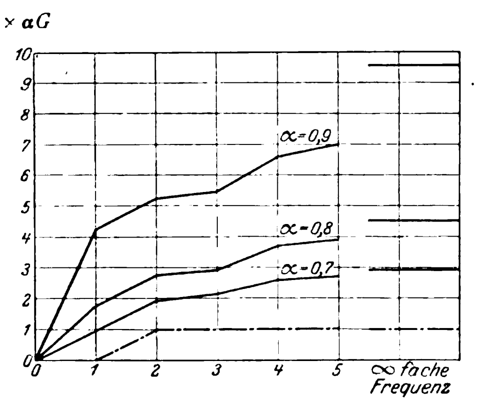


Bild 13. Klemmenspannung an der offenen Phase O bei plötzlichem Kurzschluß für $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$, abhängig von der Resonanzfrequenz des angeschlossenen Kreises (Resonanz mit der Streuinduktivität) ohne (—) und mit (— · —) Querfelddämpfung.

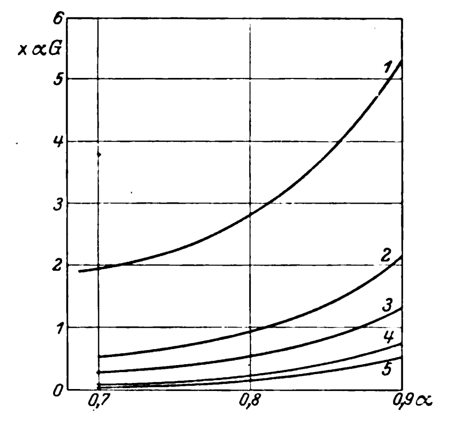


Bild 14. Strom von Resonanzfrequenz in O (Resonanz mit der Streuinduktivität) bei plötzlichem Kurzschluß, abhängig von α für 1- bis 5fache Resonanzfrequenz ohne Querfelddämpfung, und mit Querfelddämpfung für einfache Resonanzfrequenz.

den in O fließenden Strom von Resonanzfrequenz abhängig von α für die 1- bis 5fache Resonanzfrequenz. Wenn die Querfelddämpfung fehlt, können die Spannungen, die im Kreis O zustande kommen, die in Bild 13 dargestellte Klemmenspannung um ein Mehrfaches übersteigen, indem zur Spannungsvergrößerung der der Resonanzfrequenz benachbarten Harmonischen an Selbstinduktion oder Kapazität noch die vom Strom der Resonanzfrequenz erzeugte Spannung hinzukommt. Die Werte für die Maschinen mit Querfelddämpfung sind in Bild 13 und 14 ebenfalls eingetragen und besonders bezeichnet. Mit Querfelddämpfung erreicht die Spannung an den Klemmen der offenen Phase nur die Leerlaufspannung. Bei Resonanz mit der Grundfrequenz ist die Spannung Null, wogegen ein Kurzschlußstrom im Kreis O fließt.

Wir wenden uns damit einer zweiten Gruppe von einphasigen Kurzschlüssen zu, die dadurch charakterisiert sind, daß der angeschlossene Kreis O einen Resonanzkreis für eine der erzeugten Harmonischen bildet unter Einbeziehung der gesamten Generatorinduktivität. Ein Strom der Resonanzfrequenz kann fließen, ohne daß irgendeine Spannung vom Rotor aus erregt wird. Der Summenscheinwiderstand: Generator plus Netz ist Null. Es würde deshalb eine an O fremderzeugte

Spannung dieser Frequenz einen unendlich großen Strom treiben. Wir müssen demnach zur Bedingung stellen, daß keine solche Spannung an O entsteht. Oder anders gesprochen: Wenn wir die vom Resonanzstrom in der Generatorphase O induzierte Spannung, die vom Netz voraussetzungsgemäß ausbalanciert wird, ausnehmen, so müssen alle sonst in O von Resonanzfrequenz erzeugten Spannungen sich zu Null kompensieren. Wir beginnen mit dem wichtigsten

Fall 12.

Resonanz mit der ersten Gesamtinduktivität. Der Generator ist bei der Grundfrequenz gerade an der Grenze der Selbsterregung.

a) Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung. Bild 15 zeigt das Schema der entstehenden Felder. Es gelten die Gleichungen:

$$R_0 \alpha - 2 S_1 - R_2 \alpha = 0 \qquad \text{die 1. in S,}$$
$$R_0 + R_2 = 0 \qquad \text{,, 1. ,, O,}$$
$$O_1 \alpha + S_1 \alpha + 2 R_2 - S_3 \alpha = 0 \qquad \text{,, 2. ,, R,}$$
$$R_2 \alpha - 2 S_3 - R_4 \alpha = 0 \qquad \text{,, 3. ,, S,}$$
$$S_3 \alpha + 2 R_4 - S_5 \alpha = 0 \qquad \text{,, 4. ,, R.}$$

usw. wie Fall 1

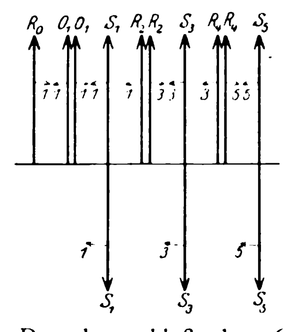


Bild 15. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 1. Resonanz mit der 1. Gesamtinduktivität (zu Fall 12).

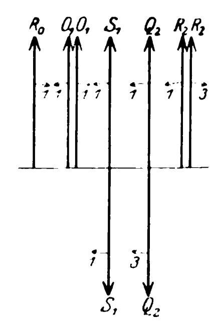


Bild 16. Dauerkurzschluß mit Querfelddämfung, System 1. Resonanz mit der 1. Gesamtinduktivität (zu Fall 12).

Wir erhalten:

$$S_1 = R_0 \alpha \qquad \text{und} \qquad R_2 = - R_0,$$
$$S_3 = - R_0 \sqrt{-K} \qquad R_4 = K \cdot R_2,$$
$$S_5 = S_3 \cdot K \qquad R_6 = K^2 \cdot R_2,$$
$$S_7 = S_3 \cdot K^2 \qquad \text{usw.}$$

usw.

$$O_1 = \frac{R_0}{\alpha} \left\{ 2 - \alpha^2 - \alpha \sqrt{-K} \right\}.$$

Verkettung mit der Rotorwicklung im Zeitpunkt $\varphi = 0$:

$$R_0 + 2 R_2 + 2 R_4 + 2 R_6 + \ldots + 2 O_1 \alpha = R_0 \left\{ 4 - 2 \alpha^2 - 2 \alpha \sqrt{-K} - \frac{1 + K}{1 - K} \right\}.$$

Spannung an der offenen Phase:

$$2 O_1 - 3 \alpha (R_2 + R_4) + 5 \alpha (R_4 + R_6) - 7 \alpha (R_6 + R_8) + \ldots = R_0 \alpha \left\{ \frac{4}{\alpha^2} - K \frac{1 - K}{1 + K} \right\}.$$

Sie beträgt für

$\alpha = 0{,}7$	$0{,}8$	$0{,}9$	1	
8,39	6,67	5,85	∞	mal der Leerlaufspannung $R_0 \alpha$.

Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0$:

$$(2 O_1 + R_0 + 2 R_2 + 2 R_4 + \ldots) \alpha = R_0 \alpha \left\{ \frac{4}{\alpha} - 2 \alpha - 2 \sqrt{-K} \frac{1 + K}{1 - K} \right\},$$

· 2,775   1,8   0,954 mal dem Leerlaufluftspaltfeld $R_0 \alpha$.

Strom im Kreis O: $2\,O_1 = R_0 \alpha \frac{2}{\alpha^2}(2 - \alpha^2 - \alpha \sqrt{-K}) =$

5   3   1,544 mal dem Dauerkurzschlußstrom $R_0 \alpha$.

b) Dauerkurzschluß mit Querfelddämpfung. Bild 16. Es gelten die Gleichungen:

$R_0 \alpha - 2\,S_1 - \alpha(R_2 + Q_2) = 0$ die 1. in S

$O_1 \alpha + S_1 \alpha + 2\,R_2 = 0$ „ 2. „ R

$O_1 \alpha + S_1 \alpha + 2\,Q_2 = 0$ „ 2. „ Q

$R_0 + R_2 + Q_2 = 0$ „ 1. „ O

Alle höher periodigen Felder werden Null. Wir erhalten als Auflösung:

$S_1 = R_0 \alpha$,

$R_2 = Q_2 = -\frac{R_0}{2}$,

$O_1 = R_0 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha}$.

Verkettung in der Rotorwicklung im Zeitpunkt $\varphi = 0$.

$$R_0 + 2\,O_1 \alpha + 2\,R_2 = 2\,R_0(1 - \alpha^2).$$

Spannung an der offenen Phase von Grundfrequenz:

$$2\,O_1 = R_0 \alpha \cdot 2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Sie ist für

$\alpha = 0{,}7$ 0,8   0,9

2,08   1,125   0,47 mal der Leerlaufspannung $R_0 \alpha$.

Luftspaltfeld zur Zeit $\varphi = 0$: $(R_0 + 2\,O_1 + 2\,R_2)\alpha = R_0 \alpha \cdot 2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha}$.

c) Plötzlicher Kurzschluß ohne Querfelddämpfung. Erregung im Rotor R mit dem Gleichstrom G.

System 1.

Verkettung mit dem Rotor $R_0 \left\{ 4 - 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha \sqrt{-K} - \frac{1 + K}{1 - K} \right\} = G$.

Spannung an der offenen Phase:

$$G \alpha \frac{\frac{4}{\alpha^2} - K \frac{1 - K}{1 + K}}{4 - 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha \sqrt{-K} - \frac{1 + K}{1 - K}}.$$

Luftspaltfeld im Zeitpunkt $\varphi = 0$:

$$G \alpha \frac{\frac{4}{\alpha} - 2\,\alpha - 2\sqrt{-K} - \frac{1 + K}{1 - K}}{4 - 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha \sqrt{-K} - \frac{1 + K}{1 - K}}.$$

Statorstrom:

Höchstwert im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$ $2\,S_1 - 2\,S_3 + 2\,S_5 - \ldots = \frac{G \alpha}{1 - \alpha^2}$.

Strom von Resonanzfrequenz in der offenen Phase:

$$2\,O_1 = \frac{2\,G \alpha}{4 - 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha \sqrt{-K} - \frac{1 + K}{1 - K}} \cdot \frac{2 - \alpha^2 - \alpha \sqrt{-K}}{\alpha^2}.$$

Er beträgt:

2,88   2,27   1,895 mal dem Dauerkurzschlußstrom $G \alpha$.

System 2 bleibt unverändert. Spannung an der offenen Phase $\alpha G \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$



Luftspaltfeld im Zeitpunkt $\varphi = 0$: $\alpha^2 G$.

Der resultierende Höchstwert der Spannung an den Klemmen von O wird somit:

$\alpha = 0{,}7 \quad 0{,}8 \quad 0{,}9 \quad 1$

$5{,}8 \quad 6{,}83 \quad 11{,}41 \quad \infty$ mal der Leerlaufspannung αG.

Das resultierende Luftspaltfeld entsteht durch geometrische Addition der beiden unter rechtem Winkel stehenden Felder von System 1 und 2. Es beträgt:

$1{,}75 \quad 1{,}61 \quad 1{,}47 \quad 1{,}414$ mal dem Leerlaufluftspaltfeld αG.

d) Plötzlicher Kurzschluß mit Querfelddämpfung.

System 1: Verkettung mit der Rotorwicklung $2 R_0 (1 - \alpha^2) = G$, $R_0 = \frac{G}{2(1 - \alpha^2)}$

Spannung an der offenen Phase $\frac{G\alpha}{\alpha^2}$:

$= 2{,}04 \quad 1{,}56 \quad 1{,}235$ mal Leerlaufspannung αG.

Strom von Resonanzfrequenz:

$2 O_1 = \frac{G\alpha}{\alpha^2} = 2{,}04 \quad 1{,}56 \quad 1{,}235$ mal Dauerkurzschlußstrom αG.

Luftspaltfeld $= \frac{G\alpha}{\alpha}$.

System 2.

Wie in Fall 6 Spannung an der offenen Phase 0.

Strom von Resonanzfrequenz 0.

Luftspaltfeld: $G\alpha \frac{\alpha}{1 + \alpha}$.

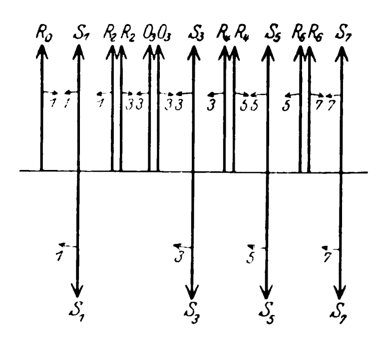


Bild 17. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 1. Resonanz mit der 3. Gesamtinduktivität (zu Fall 13).

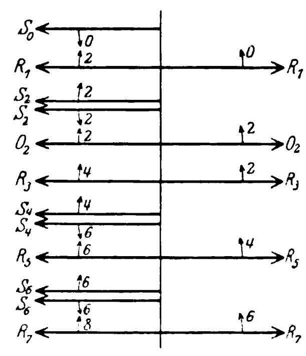


Bild 18. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 2. Resonanz mit der 2. Gesamtinduktivität (zu Fall 14).

Resultierendes Luftspaltfeld für $\varphi = 0$: $G\alpha \left(\frac{1}{\alpha} \hat{+} \frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)$

$= 1{,}49 \quad 1{,}32 \quad 1{,}21$ mal dem Leerlaufluftspaltfeld αG.

In gleicher Weise wurden untersucht:

Fall 13: Resonanz mit der 3. Gesamtinduktivität siehe Bild 17,
Fall 14: „ „ „ 2. „ „ „ 18.

Eine Zusammenstellung der erhaltenen Resultate zeigen die Bilder 19 und 20 für den Dauerkurzschluß und Bild 21 und 22 für den plötzlichen Kurzschluß. Die Kurven sind mit Zahlen bezeichnet, welche wieder angeben, bei dem Wievielfachen der Grundfrequenz Resonanz mit der Gesamtinduktivität besteht. Auffallend sind die im Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung sehr hohen Werte von Spannung

und Strom in O. Bei Resonanz mit der Gesamtinduktivität bei Grundfrequenz (Selbsterregung) ohne Querfelddämpfung erreicht der Höchstwert der Spannung an o im plötzlichen Kurzschluß für $\alpha = 0{,}7—0{,}8—0{,}9$ bzw. das 5,8—6,83—11,41 fache der Leerlaufspannung. Die gleichen Werte für vollkommen offene oder verstimmte Phase O betragen nach Fall 3 das 2,93—4,55—9,55 fache und werden demnach um 98—50—20% übertroffen. Die Querfelddämpfung wirkt in allen Fällen ausgezeichnet. Nur bei sehr großer Streuung (kleine Werte von α) treten höhere Spannungen als die Leerlaufspannung an der offenen Phase auf.

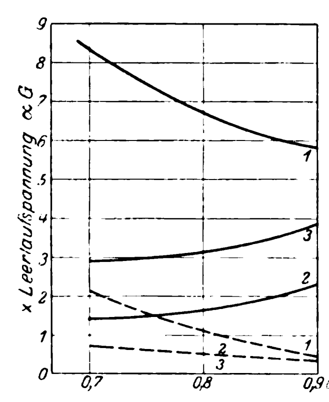


Bild 19. Klemmenspannung an der offenen Phase abhängig von α bei Resonanz mit der 1. bis 3. Gesamtinduktivität im Dauerkurzschluß ohne (—) und mit (— · — ·) Querfelddämpfung.

Wir wenden uns damit einer 3. Gruppe von einachsigen Kurzschlüssen zu, bei welchen die Phase O mit Einbeziehung der Generatorinduktivität in Resonanz ist

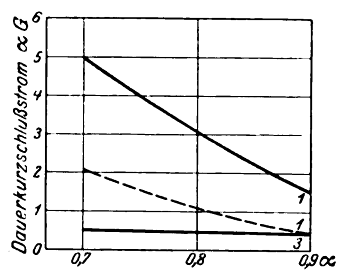


Bild 20. Strom von Resonanzfrequenz in O abhängig von α bei Resonanz mit der 1. bis 3. Gesamtinduktivität im Dauerkurzschluß ohne (—) und mit (— · — · —) Querfelddämpfung.

mit einer Frequenz A und für sich eine Eigenschwingungszahl B hat. Durch diese Festlegung sind Selbstinduktion ωL und Kapazität $\frac{1}{\omega C}$ des Kreises O im Verhältnis zur synchronen Reaktanz ωZ des Generators fest bestimmt. Wir beginnen mit

Fall 15.

Resonanz mit der ersten Gesamtinduktivität und mit

a) der dritten Streuinduktivität. Voraussetzungsgemäß gelten die Gleichungen

$$\omega L + \omega Z = \frac{1}{\omega c} \qquad 3\,\omega L = \frac{1}{3\,\omega c},$$

woraus folgt

$$\omega L = \frac{1}{8}\,\omega Z \quad \text{und} \quad \frac{1}{\omega c} = \frac{9}{8}\,\omega Z.$$

System 1.

Bild 23 zeigt das Schema der entstehenden Felder oder Stromsysteme. Es gelten die Gleichungen:

		Die Auflösung ergibt
$R_0\alpha - 2S_1 - R_2\alpha = 0$	1. in S	$S_1 = R_0\alpha$
$R_0 + R_2 = 0$	1. „ O	$O_1 = \frac{2R_0}{\alpha}(1-\alpha^2)$
$S_1\alpha + O_1\alpha + 2R_2 - S_3\alpha + O_3\alpha = 0$	2. „ R	$R_2 = -R_0$
$R_2\alpha - 2S_3 = 0$	3. „ S	$S_3 = -\frac{R_0\alpha}{2}$
$S_3\alpha + O_3\alpha = 0$	4. „ R	$O_3 = +\frac{R_0\alpha}{2}$.

Verkettung mit dem Rotor $R_0 + 2\,O_1\,\alpha + 2\,R_2 + 2\,O_3\,\alpha = G$ und daraus im plötzlichen Kurzschluß

$$R_0 = \frac{G}{3\,(1 - \alpha^2)}.$$

Spannung an der offenen Phase nur von Grundfrequenz

$$R_0\,\alpha + 2\,O_1 + R_2\,\alpha = G\,\alpha\,\frac{4}{3\,\alpha^2}.$$

Luftspaltfeld:

$$(R_0 + 2\,O_1 + 2\,R_2 + 2\,O_3)\,\alpha = G\,\alpha\,\frac{1}{3\,\alpha}\cdot\frac{3\,\alpha + 4}{1 + \alpha}.$$

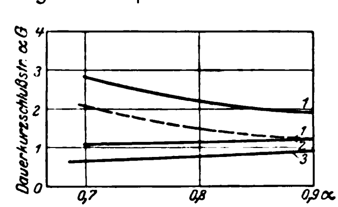


Bild 22. Strom von Resonanzfrequenz im plötzlichen Kurzschluß, abhängig von α bei Resonanz mit der 1. bis 3. Gesamtinduktivität ohne (—) und mit (— • — • —) Querfelddämpfung.

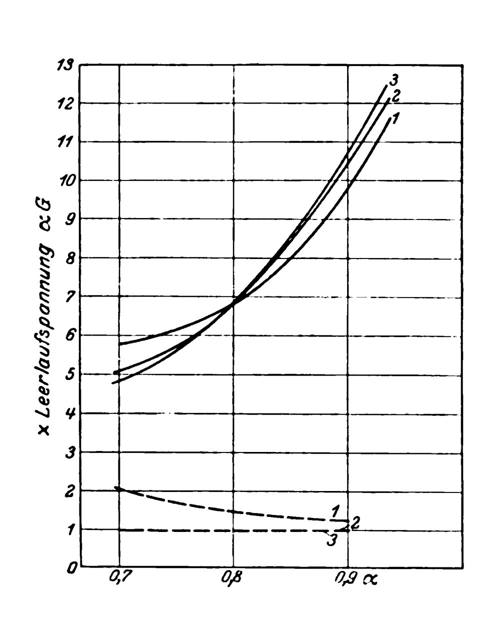


Bild 21. Klemmenspannung im plötzlichen Kurzschluß an der offenen Phase O abhängig von α bei Resonanz mit der 1. bis 3. Gesamtinduktivität ohne (—) und mit (— • — • —) Querfelddämpfung.

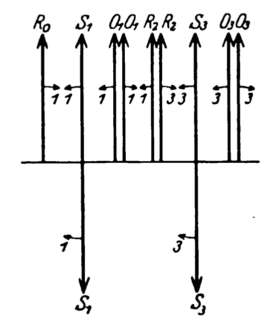


Bild 23. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 1. Resonanz mit der 1. Gesamt- und mit der 3. Streuinduktivität (zu Fall 15 a).

Strom von Resonanzfrequenz:

$$2\,O_1 = G\,\alpha\cdot\frac{4}{3\,\alpha^2} = 2{,}72 - 2{,}08 - 1{,}65 \text{ mal dem Dauerkurzschlußstrom } \alpha\,G$$

$$2\,O_3 = G\,\alpha\cdot\frac{1}{3\,(1 - \alpha^2)} = 0{,}654 - 0{,}926 - 1{,}75 \text{ mal dem Dauerkurzschlußstrom } \alpha\,G.$$

System 2

bleibt unverändert (wie in Fall 3).

Die resultierende Spannung an der offenen Phase beträgt demnach

$$G\,\alpha\left(\frac{4}{3\,\alpha^2} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha^2}\right) = 3{,}68 - 3{,}86 - 5{,}9 \text{ mal der Leerlaufspannung } \alpha\,G.$$

Das resultierende Luftspaltfeld im Zeitpunkt $\varphi = 0$ wird

$$G\,\alpha\left\{\frac{1}{3\,\alpha}\cdot\frac{3\,\alpha + 4}{1 + \alpha} + \alpha\right\} = 1{,}85 - 1{,}68 - 1{,}58 \text{ mal dem Leerlaufluftspaltfeld } \alpha\,G.$$

Mit Querfelddämpfung ist dieser Fall identisch mit Fall 12 d, da an o nur Spannung von Grundfrequenz erzeugt wird.

b) der zweiten Streuinduktivität.

System 1 wie Fall 12 c, System 2 wie Fall 10 c.

Höchstwert der Spannung an o:

System 1 4,84 5,05 7,15 mal der Leerlaufspannung α G,

„ 2 dauernd Null.

c) der vierten Streuinduktivität.

System 1 wie Fall 12 c:

Spannung an o 4,84 5,05 7,15 mal der Leerlaufspannung α G

System 2 wie Fall 11 c:

Spannung an o: $G\alpha\frac{2\alpha^2}{2-\alpha^2}$ = 0,65 0,94 1,36 dto.

Summe . . . . . . 5,49 5,99 8,15 dto.

d) der fünften Streuinduktivität. Siehe Bild 24.

Für den Höchstwert der Spannung an o im plötzlichen Kurzschluß ohne Querfelddämpfung ergibt sich für System 1 $\alpha G\frac{4}{\alpha^2}\frac{(\alpha^2-1)(4+\alpha^2)}{19\alpha^2-12-7\alpha^4}$, sie enthält nur die 1. und 3. Harmonische.

System 2 bleibt unverändert (wie in Fall 3). Für den resultierenden Höchstwert ergibt sich demnach das

5,22 — 5,68 — 7,74 fache der Leerlaufspannung α G.

In gleicher Weise wurden untersucht:

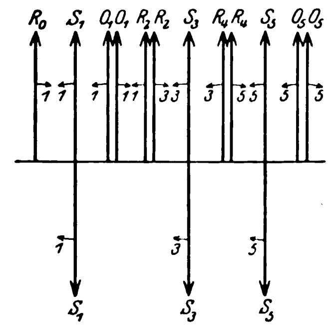


Bild 24. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 1. Resonanz mit der 1. Gesamt- und mit der 5. Streuinduktivität (zu Fall 15 d).

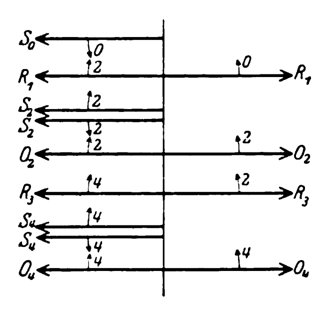


Bild 25. Dauerkurzschluß ohne Querfelddämpfung, System 2. Resonanz mit der 2. Gesamt- und mit der 4. Streuinduktivität (zu Fall 16 a).

Fall 16.

Resonanz mit der 2. Gesamtinduktivität und mit

a) der 4. Streuinduktivität (siehe Bild 25)

b) „ 3. „

c) „ 5. „

Eine graphische Darstellung der Ergebnisse von Fall 15 und 16 zeigen die Bilder 26 und 27. Als Abszisse ist das Vielfache der Frequenz der Eigenschwingungszahl des angeschlossenen Kreises o (Resonanz mit der Streuinduktivität) aufgetragen. Die Klemmenspannung an o nähert sich, wenn diese Frequenz ansteigt, den Werten von Fall 12 c und 14 c. Es fließen bei kleiner Streuung große Ströme beider Resonanzfrequenzen im Kreis o.

Wir wollen, bevor wir den theoretischen Teil unserer Arbeit beenden, noch andeuten, wie die angegebene Methode erweitert werden kann. Wir werden uns dabei auf einige wichtige Fälle beschränken, die aber klar zeigen, daß alle bisher

betrachteten Anordnungen auch mit den neuen allgemeineren Voraussetzungen ohne weiteres gelöst werden können. Wir beginnen damit, eine Maschine zu betrachten, deren Rotor längs und quer zu den Polen die magnetische Leitfähigkeit 1 bzw. $\frac{1}{\lambda}$ hat, wie dies bei Maschinen mit ausgesprochenen Polen der Fall ist[1]. λ ist gewöhnlich größer als 1. Wir denken uns die verschiedenen magnetischen Leitfähigkeiten entstanden durch einen geschichteten Rotor. Die Ebene der Blechlamellen sei parallel zu einer durch die Polachse und die Wellenachse gelegten Ebene, so daß Kraftlinien in der Längsrichtung der Pole nur im Eisen verlaufen, wogegen Kraftlinien senkrecht dazu die Luftspalte zwischen den Schichten zu durchsetzen haben. Wir nehmen an, daß am Umfang sinusförmig verteilte Durchflutungen auch sinusförmig verteilte Felder erzeugen.

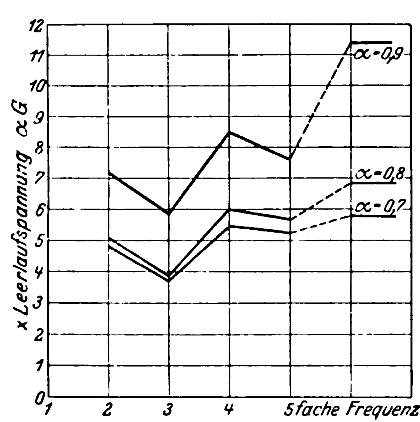
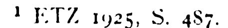


Bild 26. Klemmenspannung an der offenen Phase O bei plötzlichem Kurzschluß ohne Querfelddämpfung für $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$, Resonanz mit der 1. Gesamtinduktivität, abhängig von der Eigenschwingungszahl des Resonanzkreises.

Bild 27. Klemmenspannung an der offenen Phase O bei plötzlichem Kurzschluß ohne Querfelddämpfung für $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$, Resonanz mit der 2. Gesamtinduktivität, abhängig von der Eigenschwingungszahl des Resonanzkreises.

Fall 17.

Dauer- und plötzlicher Kurzschluß ohne Querfelddämpfung, Phase o vollkommen offen ohne Resonanz. Die Erweiterung unserer Rechenmethode auf den Fall ungleicher magnetischer Leitfähigkeiten zeigt Bild 28 für die Durchflutung 5 facher Frequenz der Statorwicklung $2\,S_5$, die im betrachteten Zeitpunkt $\varphi = 0$ den Wert Null habe, so daß die beiden Drehstromdurchflutungen, durch welche wir die Wechselstromdurchflutung $2\,S_5$ ersetzen, die in Bild 28 (ganz links) gezeichnete Lage haben. Wir müssen jetzt die erregenden Stromsysteme und die erzeugten Felder auseinanderhalten. Wir sondern zunächst die beiden Streufelder $S_5(1-\alpha)$ ab, von welchen wir annehmen, daß sie zum überwiegenden Teil in Luft verlaufen. Das gegenläufige (in Bild 28 nach oben gerichtete) Drehstromsystem $S_5\,\alpha$ ersetzen wir durch 2 am Rotor haftende Wechselstromsysteme 6 facher Frequenz $S_5\,\alpha$, die örtlich und zeitlich 90^0 gegeneinander phasendifferent sind. Jedes dieser beiden am Rotor haftenden Wechselstromsysteme $S_5\,\alpha$ zerlegen wir in 2 Drehstromsysteme $\frac{S_5\,\alpha}{2}$, wie dies Bild 28 andeutet. Das in der Rotorlängsachse magnetisierende Wechselstromsystem und die aus seiner Zerlegung hervorgegangenen Drehstromsysteme (mit o bezeichnet) finden einen magnetischen Kreis mit der Leitfähigkeit 1 vor. Die Felder sind demnach ebenfalls durch den Ausdruck $\frac{S_5\,\alpha}{2}$ gegeben. Das



[1] ETZ 1925, S. 487.

in der Rotorquerachse magnetisierende Wechselstromsystem und die aus seiner Zerlegung hervorgegangenen Drehstromsysteme (mit x bezeichnet) finden den magnetischen Widerstand λ vor und erzeugen Felder $\frac{S_5 \alpha}{2} \frac{1}{\lambda}$. Als Endresultat ergibt sich ein gegenläufiges Feld $S_5 A$ das mit 5 facher und ein mitläufiges Feld $S_5 B$, das mit 7 facher Geschwindigkeit im Raume umläuft, wobei

$$A = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$
$$B = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

In gleicher Weise ersetzen wir das gegenläufige Drehstromsystem $-S_5 \alpha$ durch 2 am Rotor haftende Wechselstromsysteme $S_5 \alpha$ 4 facher Frequenz. Als Endresultat ergibt sich ein mitläufiges Feld $-S_5 A$, das mit 5 facher und ein gegenläufiges Feld $-S_5 B$, das mit 3 facher Geschwindigkeit im Raume umläuft. Wir haben damit die

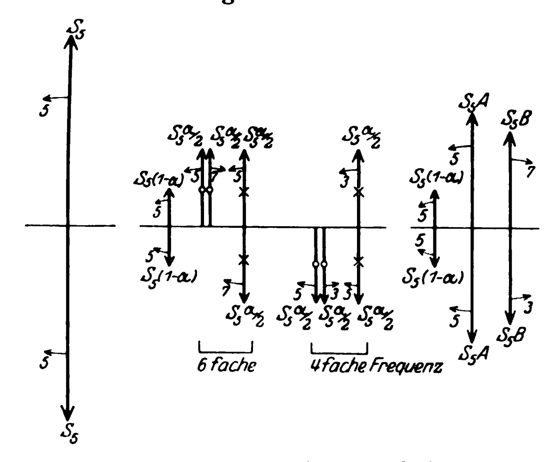


Bild 28. Zerlegung der Wechselstromdurchflutung 5 facher Frequenz im Stator zur Berücksichtigung ungleicher magnetischer Leitfähigkeiten in der Pollängs- und -Querachse.

magnetisierende Wirkung der Wechselstromdurchflutung $2 S_5$ ersetzt durch 6 Drehfelder: je ein Feld $\pm S_5 (1 - \alpha)$ und $\pm S_5 A$ mit und gegenläufig von 5 facher Rotationsgeschwindigkeit und ein mitläufiges Feld $S_5 B$ von 7 facher und ein gegenläufiges Feld $-S_5 B$ von 3 facher Umlaufgeschwindigkeit. Es entsteht also trotz der vereinfachenden Annahme, daß sinusförmig verteilte Durchflutungen auch weiterhin sinusförmig verteilte Felder erzeugen sollen, ein ziemlich kompliziertes Feldgebilde, das durch Drehfelder von 3 verschiedenen Frequenzen dargestellt werden kann.

Damit wird nun Bild 29, welches die im einphasigen Dauerkurzschluß entstehenden Felder darstellt, ohne weiteres verständlich. Beachten wir, daß $A + B = \alpha$, so erhalten wir für Stator S und Rotor R je eines der beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} R_0 \alpha - S_1 &= S_1 (1 - \alpha) + S_1 A + R_2 \alpha - S_3 B \\ S_1 B + R_2 \alpha - S_3 (1 - \alpha + A) &= S_3 (1 - \alpha + A) \\ &\quad + R_4 \alpha - S_5 B \\ S_3 B + R_4 \alpha - S_5 (1 - \alpha + A) &= S_5 (1 - \alpha + A) \\ &\quad + R_6 \alpha - S_7 B \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 \alpha + 2 R_3 - S_3 \alpha &= 0 \\ S_3 \alpha + 2 R_4 - S_5 \alpha &= 0 \\ S_5 \alpha + 2 R_6 - S_7 \alpha &= 0 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Wir erhalten als Auflösung

$$\begin{aligned} S_3 &= C S_1 \quad \text{und} \quad & R_4 &= C R_2 \\ S_5 &= C^2 S_1 & R_6 &= C^2 R_2 \\ S_7 &= C^3 S_1 & R_8 &= C^3 R_2, \end{aligned}$$

wobei

$$C = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{2} - B}\left\{-\left(1 - \alpha + A - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \sqrt{\left(1 - \alpha + A - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{2} - B\right)^2}\right\}.$$

(Für $\lambda = 1$ wird $A = \alpha$ und $B = 0$ und $C_{\lambda = 1} = K$)

$$S_1 = -\frac{R_0 \alpha}{2 - \alpha + A + \frac{\alpha^2}{2}(C - 1) - CB}$$

und

$$R_2 = \frac{R_0 \frac{\alpha^2}{2}(C - 1)}{2 - \alpha + A + \frac{\alpha^2}{2}(C - 1) - CB}.$$

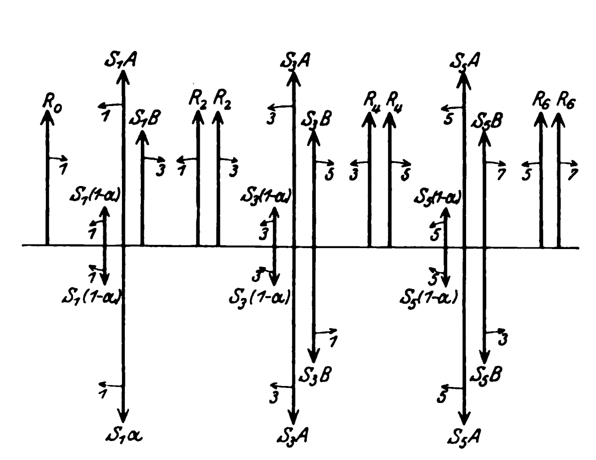


Bild 29. Einphasiger Dauerkurzschluß (System 1) ohne Querfelddämpfung, bei ungleichen magnetischen Leitfähigkeiten.

Bild 30. Einphasiger Dauerkurzschluß (System 2) ohne Querfelddämpfung, bei ungleichen magnetischen Leitfähigkeiten.

Verkettung mit der Rotorwicklung für

$$\varphi = 0 : R_0 + S_1(A - \alpha) + S_1 B + 2 R_2 + 2 R_4 + \ldots\ldots = $$
$$R_0 - \frac{2 R_2}{C - 1} = R_0 - \frac{R_0 \alpha^2}{2 - \alpha + A + \frac{\alpha^2}{2}(C - 1) - CB} = G.$$

Spannung an der offenen Phase im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$:

$$\alpha\{(R_0 + R_2) - 3(R_2 + R_4) + 5(R_4 + R_6) - \ldots\} + [S_1(A - \alpha) - S_3 B] - 3[S_1 B - S_5 B] +$$
$$+ 5[S_3 B - S_7 B] - 7[S_5 B - S_9 B] + \ldots = \alpha R_0 - \frac{2\alpha R_2}{1 + C} - \frac{4 B S_1}{1 + C}.$$

System 2 siehe Bild 30. Es gelten für Rotor und Stator die Gleichungssysteme:

$$S_0 \alpha - 2 R_1 - S_2 \alpha = 0 \qquad 2 S_2 A + 2 S_2 (1 - \alpha) - S_0 B - S_4 B + R_1 \alpha - R_3 \alpha = 0$$
$$S_2 \alpha - 2 R_3 - S_4 \alpha = 0 \qquad 2 S_4 A + 2 S_4 (1 - \alpha) - S_2 B - S_6 B + R_3 \alpha - R_5 \alpha = 0$$
$$S_4 \alpha - 2 R_5 - S_6 \alpha = 0 \qquad 2 S_6 A + 2 S_6 (1 - \alpha) - S_4 B - S_8 B + R_5 \alpha - R_7 \alpha = 0$$

usw. usw.

Wir erhalten:

$$S_2 = C S_0 \qquad R_1 = S_0 \frac{2 C (A + 1 - \alpha) - B - C^2 B}{\alpha (C - 1)}$$
$$S_4 = C^2 S_0 \quad \text{usw.} \qquad R_3 = C R_1 \qquad R_5 = C^2 R_1 \quad \text{usw.}$$

Für C ergibt sich wieder derselbe Ausdruck.

Verkettung mit dem Stator für $\varphi = 0$

$$S_0(1-\alpha) + 2\,S_2(1-\alpha) + 2\,S_4(1-\alpha) + \,..\, + S_0(A-B) + 2\,S_2(A-B) +$$
$$+ 2\,S_4(A-B) + \,..\, = S_0\frac{1+C}{1-C}(1-\alpha+A-B) = G\,\alpha\,.$$

Spannung an der offenen Phase im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$:

$$\alpha\,\{2\,(R_1+R_3) - 4\,(R_3+R_5) + 6\,(R_5+R_7) - 8\,(R_7+R_9) + \,..\,\} + 2\,B\,(S_4-S_0) -$$
$$- 4\,B\,(S_6-S_2) + 6\,B\,(S_8-S_4) - \,..\, = S_0\,\frac{1-C}{1+C}(\alpha^2-2\,B) = G\,\alpha\left(\frac{1-C}{1+C}\right)^2\frac{\alpha^2-2\,B}{1-2\,B}\,.$$

Die Werte von C abhängig von $1/\lambda$ sind für $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$ in Bild 31 aufgetragen. C nimmt mit zunehmenden λ rasch ab. Bei dem Wert $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ wird es Null, d. h. es fließen in diesem Fall im Stator nur Ströme von nullter und

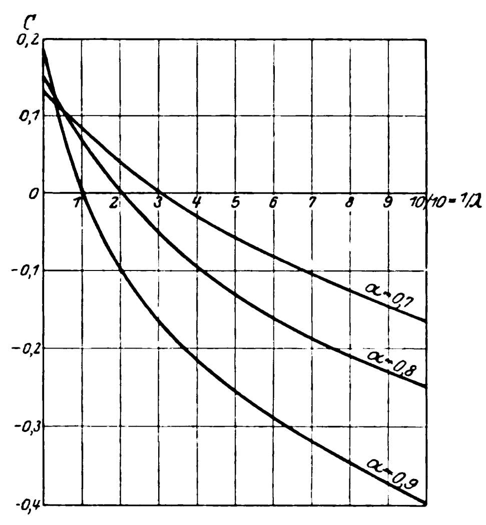


Bild 31. Werte von C abhängig von $1/\lambda$ für $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$.

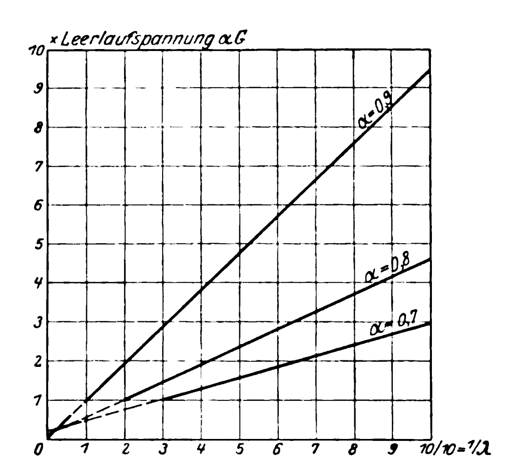


Bild 32. Höchstwert der Spannung an O im plötzlichen Kurzschluß abhängig von $1/\lambda$ für $\alpha = 0{,}7 - 0{,}8 - 0{,}9$.

erster, im Rotor nur Ströme von nullter, erster und zweiter Frequenz. Höhere Harmonische kommen trotz des einphasigen Kurzschlusses ohne Querfelddämpfung nicht zur Ausbildung. Bild 32 zeigt den Höchstwert der an der offenen Phase im Zeitpunkt $\varphi = 90^0$ entstehenden Spannung. Sie fällt von dem für $\lambda = 1$ geltenden Wert geradlinig bis zu $\lambda = \infty \left(\frac{1}{\lambda} = 0\right)$ fast bis auf Null. Im Zeitpunkt $\varphi = -90^0$ ist der Statorstrom in der Wicklung S Null, ebenso ist $\frac{dS}{d\varphi} = 0$, da die Verkettungszahl der Statorwicklung in der Stellung $\varphi = -90^0$ sich nicht ändert. Die in der offenen Phase 0 induzierte Spannung muß daher im Punkt $\varphi = -90^0$ gerade der Leerlaufspannung entsprechen (der Differenz der Spannungen von System 1 und 2). Damit ist eine einfache Kontrolle der durchgeführten Rechnung gegeben. Der Höchstwert des Statorstromes ist selbstredend unabhängig von λ.

Die Untersuchung des plötzlichen Kurzschlusses mit Querfelddämpfung zeigt in dem in Betracht kommenden Bereich von $\lambda = 1$ bis $1{,}7$ praktisch keinen Unterschied gegenüber dem schon behandelten Fall $\lambda = 1$. Die entstehenden Felder oder Stromsysteme sind in Bild 33 für System 1 dargestellt. Es bleiben kleine Reste aller höheren Harmonischen übrig.

Fall 18.

Die magnetische Leitfähigkeit sei nach allen Richtungen $\lambda = 1$. Hingegen sei die Streuung im Stator und Rotor verschieden. Die früher mit α bezeichnete Größe habe für den Stator den Wert σ, für den Rotor den Wert ϱ. Es sei keine Querfelddämpfung vorhanden.

System 1:

$$R_0 \varrho - 2 S_1 - R_2 \varrho = 0 \qquad S_1 \sigma + 2 R_2 - S_3 \sigma = 0$$
$$R_2 \varrho - 2 S_3 - R_4 \varrho = 0 \qquad S_3 \sigma + 2 R_4 - S_5 \sigma = 0$$

usw. usw.

Die Auflösung ergibt

$$S_1 = \frac{R_0 \varrho}{2}(1 - C) \qquad R_2 = C R_0$$
$$S_3 = C S_1 \qquad R_4 = C^2 R_0$$
$$S_5 + C^2 S_1 \qquad R_6 = C^3 R_0$$

usw. usw.

Bild 33. Dauerkurzschluß mit Querfelddämpfung (System 1) bei ungleichen magnetischen Leitfähigkeiten.

mit $C = \frac{\varrho \sigma - 2 + 2\sqrt{1 - \varrho \sigma}}{\varrho \sigma}$; dies ist unser früheres K, wenn α durch das geometrische Mittel $\sqrt{\varrho \sigma}$ ersetzt wird.

Verkettung mit dem Rotor $R_0 \cdot \frac{1 + C}{2 - C} = G$ oder $R_0 = G \frac{1 - C}{1 + C}$.

Spannung an der offenen Phase: $G \varrho \left(\frac{1 - C}{1 + C}\right)^2 = \frac{G \varrho}{1 - \varrho \sigma}$.

System 2:

$$S_0 \sigma - 2 R_1 - S_2 \sigma = 0 \qquad R_1 \varrho + 2 S_2 - R_3 \varrho = 0$$
$$S_2 \sigma - 2 R_3 - S_4 \sigma = 0 \qquad R_3 \varrho + 2 S_4 - R_5 \varrho = 0$$

usw. usw.

Die Auflösung ergibt

$$R_1 = S_0 \frac{\sigma}{2}(1 - C) \qquad S_2 = C S_0$$
$$R_3 = C R_1 \qquad S_1 = C^2 S_0$$

usw. usw.; C wie für System 1.

Verkettung mit dem Stator $S_0 \frac{1 + C}{1 - C} = G \varrho$ oder $S_0 = G \varrho \frac{1 - C}{1 + C}$.

Spannung an der offenen Phase: $S_0 \sigma \varrho \frac{1 - C}{1 + C} = G \sigma \varrho^2 \left(\frac{1 - C}{1 + C}\right)^2 = G \sigma^2 \varrho \frac{1}{1 - \varrho \alpha}$.

Der resultierende Höchstwert der Spannung an der offenen Phase beträgt demnach $G \varrho \frac{1 + \varrho \sigma}{1 - \varrho \sigma} = \frac{1 + \varrho \sigma}{1 - \varrho \sigma}$ mal der Leerlaufspannung $G \varrho$. Es ergibt sich demnach

als Vielfaches der Leerlaufspannung der gleiche Wert wie in Fall 3 (gleiche Streuung im Stator und Rotor), wenn man das geometrische Mittel $\sqrt{\varrho \cdot \sigma}$ als Streuung einführt.

Fall 19.

Sei durch Bild 34 dargestellt. Die Erregung des Rotors R erfolge mit einer sehr hohen Gleichstromspannung über einen sehr großen Widerstand, so daß in dieser Wicklung Kurzschlußströme überhaupt nicht fließen können. Sie ist in bezug auf die in der Maschine entstehenden Felder als offen zu betrachten. Es fehlt also jegliche Längsfelddämpfung; hingegen sei eine vollkommene Querfelddämpfung vorhanden. Das Schema der Felder oder Drehstromsysteme zeigt Bild 35. Diesen beiden kurzgeschlossenen Wicklungssystemen S und Q entsprechen die Gleichungen (s. Bild 35 für System 1):

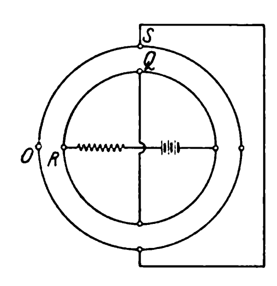


Bild 34. Rotor ohne Gegenfeld jedoch mit Querfelddämpfung.

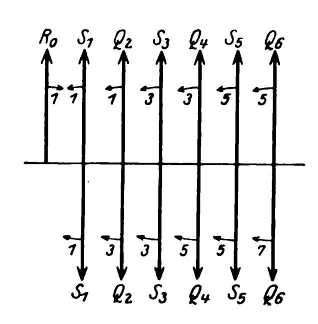


Bild 35. Dauerkurzschluß (System 1) ohne Gegenfeld jedoch mit Querfelddämpfung (zu Fall 19).

Bild 36. Dauerkurzschluß (System 2) ohne Gegenfeld jedoch mit Querfelddämpfung (zu Fall 19).

$$-R_0\alpha + 2S_1 + Q_2\alpha = 0 \qquad S_1\alpha + 2Q_2 + S_3\alpha = 0$$
$$Q_2\alpha + 2S_3 + Q_4\alpha = 0 \qquad S_3\alpha + 2Q_4 + S_5\alpha = 0$$
$$Q_4\alpha + 2S_5 + Q_6\alpha = 0 \qquad S_5\alpha + 2Q_6 + S_7\alpha = 0$$

mit der Auflösung $S_1 = R_0 \frac{\alpha}{2}(1+k)$ $\qquad Q_2 = -R_0 k$

$$S_3 = S_1 k \qquad Q_4 = Q_2 k$$
$$S_5 = S_1 k^2 \qquad Q_6 = Q_2 k^2$$

usw. usw.

mit $k = \frac{2 - \alpha^2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2}$ (ist gleich $= -K!$; K s. Fall 1, 2, 3 usw.).

Spannung an der offenen Phase

$$\alpha\{(R_0+Q_2) - 3(-Q_2+Q_4) + 5(-Q_4+Q_6) - 7(-Q_6+Q_8) + \ldots\} = R_0\alpha\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 =$$
$$= G\alpha\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = G\alpha(1-\alpha^2).$$

System 2 (siehe Bild 36)

$$2S_2 + Q_1\alpha + Q_3\alpha = 0 \qquad 2Q_1 + S_0\alpha + S_2\alpha = 0$$
$$2S_4 + Q_3\alpha + Q_5\alpha = 0 \qquad 2Q_3 + S_2\alpha + S_4\alpha = 0$$
$$2S_6 + Q_5\alpha + Q_7\alpha = 0 \qquad 2Q_5 + S_4\alpha + S_6\alpha = 0$$

usw. usw.

mit der Auflösung $S_2 = k S_0$ $\qquad Q_1 = -\frac{2kS_0}{(1+k)\alpha}$

$$S_4 = k^2 S_0 \qquad Q_3 = Q_1 k$$

usw. usw. k wie für System 1.

Verkettung mit dem Stator $S_0 \frac{1-k}{1+k} = G\alpha$ oder $S_0 = G\alpha \frac{1+k}{1-k}$.

Spannung an der offenen Phase für $\varphi = 90^0$:

$$\alpha\{2(Q_1 - Q_3) - 4(Q_3 - Q_5) + 6(Q_5 - Q_7) - \ldots\} = -\frac{4kG\alpha}{(1+k)} 2 = -\alpha^2 G\alpha.$$

Spannung an der offenen Phase für $\varphi = 0$

$$\alpha\{2(Q_1 - Q_3) + 4(Q_3 - Q_5) + 6(Q_5 - Q_7) + \ldots\} = -\frac{4kG\alpha}{(1-k)} 2.$$

Die resultierende Spannung von System 1 und 2 beträgt im Zeitpunkt

$$\varphi = -90^0 : G\alpha(1-\alpha^2) + \frac{4kG\alpha}{(1+k)} 2 = 1 x G\alpha$$

und im Zeitpunkt

$$\varphi = 0: \frac{4kG\alpha}{(1-k)} 2 = 0{,}95 \quad 1{,}78 \quad 4{,}28 \text{ mal der Leerlaufspannung } G\alpha.$$

Der Höchstwert der Spannung an O tritt im Zeitpunkt $\varphi = 0$ auf und bleibt beträchtlich unter den Werten von Fall 3 (Längsfelddämpfung ohne Querfelddämpfung), übersteigt aber bei kleiner Streuung (großes α) bedeutend die Leerlaufspannung, die im Fall 6 (Längs- und Querfelddämpfung) erzeugt wird.

Fall 20.

Die Erregung erfolge wie in Fall 19, die offene Phase O sei in Resonanz mit der ersten Gesamtinduktivität (Selbsterregung).

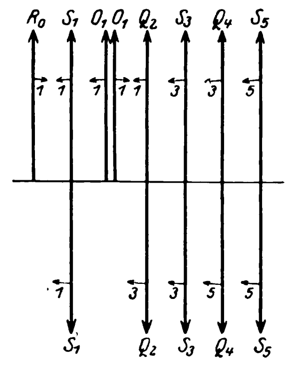


Bild 37. Dauerkurzschluß (System 1) ohne Gegenfeld jedoch mit Querfelddämpfung. Resonanz mit der 1. Gesamtinduktivität (zu Fall 20).

System 1: Bild 37 zeigt das Schema der entstehenden Felder oder Stromsysteme. Es gelten die Gleichungen

$$-R_0\alpha + 2S_1 + Q_2\alpha = 0$$
$$Q_2\alpha + 2S_3 + Q_4\alpha = 0$$
$$Q_4\alpha + 2S_5 + Q_6\alpha = 0$$
$$S_1\alpha + 2Q_2 + S_3\alpha + O_1\alpha = 0$$
$$S_3\alpha + 2Q_4 + S_5\alpha = 0$$
$$S_5\alpha + 2Q_6 + S_6\alpha = 0$$
$$R_0 + Q_2 = 0$$

Die Auflösung ergibt:

$$S_1 = R_0\alpha$$
$$Q_2 = -R_0$$
$$Q_1 = \frac{R_0}{\alpha}\left\{2 - \alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{4-\alpha^2(1+k)}\right\}$$

$$S_3 = \frac{R_0\alpha}{2 - \frac{\alpha^2}{2}(1+k)} \qquad Q_4 = -\frac{R_0\frac{\alpha^2}{2}(1+k)}{2 - \frac{\alpha^2}{2}(1+k)} = -\frac{R_0\alpha^2(1+k)}{4-\alpha^2(1+k)}$$

$S_5 = k \cdot S_3$ usw. $\qquad Q_6 = k \cdot Q_4$ usw. $\qquad$ mit $k = \frac{2-\alpha^2-2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2}$

wie im Fall 19.

Spannung an der offenen Phase zur Zeit $\varphi = 90^0$:

$$2O_1 + [-3(-Q_2+Q_4) + 5(-Q_4+Q_6) - 7(-Q_6+Q_8) + \ldots]\alpha =$$
$$= \frac{2R_0}{\alpha}\left\{2-\alpha^2 - \frac{2\alpha^2}{4-\alpha^2(1+k)}\right\} - 3R_0\alpha + \frac{4R_0\alpha^3}{4-\alpha^2(1+k)} \cdot \frac{2+k}{(1+k)}.$$

System 2 bleibt unverändert (s. Fall 19). Es ergibt sich als resultierende Spannung für

$\alpha = -90^0$	3,51	2,08	$1{,}30 \cdot G\alpha$,
$\varphi = 0$	0,95	1,78	$4{,}28 \cdot G\alpha$.

Bild 38 zeigt für den plötzlichen Kurzschluß ohne Resonanzkreis den Höchstwert der Spannung an O, und zwar in der Kurve a, wenn nur Längsfelddämpfung, in der Kurve b, wenn Längs- und Querfelddämpfung, und in der Kurve c, wenn nur Querfelddämpfung vorhanden ist. Dieselben Kurven bei Resonanz der offenen

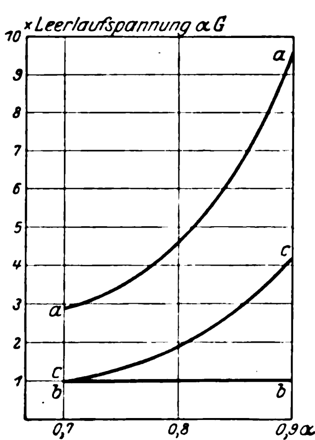


Bild 38. Höchstwert der Spannung an O bei plötzlichem Kurzschluß ohne Resonanzkreis, abhängig von α.
Kurve a) nur Längsfelddämpfung vorhanden,
Kurve b) Längs- und Querfelddämpfung vorhanden,
Kurve c) nur Querfelddämpfung.

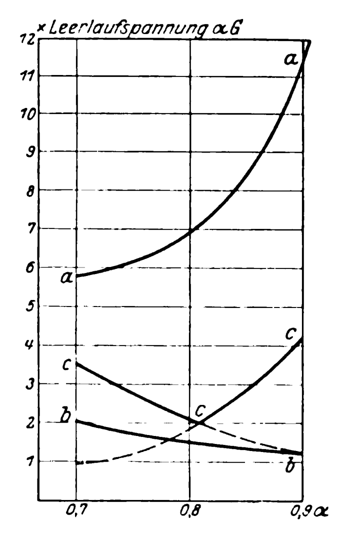


Bild 39. Dieselben Kurven wie bei Bild 38 jedoch Resonanz mit der 1. Gesamtinduktivität.

Phase O mit der ersten Gesamtinduktivität stellt Bild 39 dar. In beiden Fällen ist das Fehlen der Längsfelddämpfung lange nicht so gefährlich wie das Fehlen der Querfelddämpfung.

Wir wollen unsere Betrachtungen nicht abschließen, ohne uns über die gemachten Voraussetzungen und über die praktischen Schlußfolgerungen klar zu werden. Wir haben die magnetische Sättigung vollständig vernachlässigt. Für einen großen Teil der untersuchten Fälle haben wir das Luftspaltfeld berechnet. Nur bei Resonanz mit der ersten Gesamtinduktivität entstehen sowohl im Dauer- wie im plötzlichen Kurzschluß bei kleinen Werten von α (große Streuung) Luftspaltfelder, die das 1,5 fache des Leerlaufwertes übersteigen. Hingegen findet durch die Nutenstreuung eine sehr starke Übersättigung der Zähne statt, besonders jener, die am Phasenwechsel liegen. Darauf ist es zurückzuführen, daß der plötzliche Kurzschlußstrom mit der Spannung nicht proportional, sondern stärker ansteigt[1]. Ebensowenig trifft die Voraussetzung zu, daß Stator- und Rotorstreuung von der gegenseitigen Stellung und vom Momentanwert der Ströme unabhängig sind. Bei den verschiedenen Resonanzfällen haben wir die an O angeschlossene Leitung so betrachtet, als ob sie aus konzentrierter Selbstinduktion und Kapazität bestünde, ohne darauf einzugehen, daß die Leitung für die höheren Harmonischen sehr lang wird und daß sie mehrere Eigenschwingungszahlen besitzt. Resonanz mit der Gesamtinduktivität dürfte nur für die Grundfrequenz in Frage kommen, wenn der an O angeschlossene Kreis zur Selbsterregung neigt.

[1] Siehe Biermanns S. 208.

Als Ergebnis unserer Rechnungen stellen wir fest: Wenn die an o angeschlossene Leitung für sich einen Resonanzkreis für eine der induzierten Harmonischen bildet, so ist die an o entstehende Klemmenspannung bei plötzlichem Kurzschluß stets geringer als bei vollkommen offenem Kreis o. Hingegen fließt ein Strom von Resonanzfrequenz im Kreis o, der dort Veranlassung zu weiteren Überspannungen geben kann (s. Bild 13 und 14). Durch die Querfelddämpfung wird die Spannung an o stets bis auf ihren normalen Leerlaufwert herabgedrückt.

Besonders gefährlich ist die Resonanz mit Einbeziehung der Gesamtinduktivität, Bild 19—20, 21—22, 26—27. Es entstehen hier auch im Dauerkurzschluß große Überspannungen, bei Resonanz mit der ersten Gesamtinduktivität und $\alpha = 0{,}8$ zum Beispiel das 6,6fache der Leerlaufspannung und das 3fache des Dauerkurzschlußstromes. Im plötzlichen Kurzschluß entstehen Spannungen, die bei $\alpha = 0{,}8$ um 50% höher sind als die bei vollkommen offenem Kreis o! Der Einbau der Querfelddämpfung ist in diesem Fall ein wahrer Segen und hält die Spannung sowohl im Dauer- als auch im plötzlichen Kurzschluß unter dem Zweifachen der normalen Leerlaufspannung. Bei großer Streuung sind selbst in diesem Falle noch Überspannungen und Überströme zu erwarten. Man wird deshalb zweckmäßig vermeiden, daß die offene Phase einen Kreis vorfindet, der zur Selbsterregung neigt. Bei gleichzeitigem Vorhandensein einer entsprechenden Eigenschwingungszahl des angeschlossenen Kreises werden die Spannungen an O etwas kleiner.

Die Berücksichtigung der verschiedenen magnetischen Leitfähigkeit in der Statorlängs- und -Querachse zeigt, daß mit abnehmendem Verhältnis $1/\lambda$ (von 1 gegen Null) der Spannungshöchstwert an o linear gegen Null abfällt. Der Faktor C der geometrischen Reihe der aufeinander folgenden Felder nimmt ebenfalls stark ab. Beim ausgezeichneten Wert $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ wird er Null. Es entstehen nur Ströme bis zur 2fachen Frequenz im Stator und Rotor.

Verschiedene Streuungen σ, ϱ im Stator und Rotor sind durch Einführung des geometrischen Mittelwertes $\sqrt{\sigma\varrho}$ zu berücksichtigen.

Die zuletzt betrachteten 2 Fälle — Querfelddämpfung ohne Gegenfelddämpfung — zeigen, daß das Fehlen der Gegenfelddämpfung weit weniger gefährlich ist als das Fehlen der Querfelddämpfung.

Welche Schlüsse sind aus den letzterwähnten Umständen für die Ausführung der Dämpferwicklung zu ziehen? Es ist zunächst zweifellos verkehrt, die Dämpferwicklung nur über den Pol anzuordnen und nicht im Polzwischenraum. Gerade die Querfelddämpfung ist es ja, worauf es ankommt. Eine starke Gegenfelddämpfung ist auch bei vollkommen lamelliertem Eisenkreis durch die Erregerwicklung selbst gegeben. Wir haben bei unseren bisherigen Betrachtungen den Ohmschen Widerstand der Wicklungen und damit das Abklingen der Vorgänge vernachlässigt. Ein Verstärken der Gegenfelddämpfung hat zur Folge, daß das Wechselstromglied des plötzlichen Kurzschlußstromes sehr langsam abklingt. Man wird deshalb die Dämpferwicklung ausschließlich vom Standpunkt einer möglichst starken Querfelddämpfung zu bemessen haben. Man wird zu vernünftigen Verhältnissen kommen, wenn man verlangt, daß der Generator $^1/_4$ der vollen Leistung einphasig ohne schädliche Erwärmung dauernd abgeben kann.

Wir müssen uns schließlich noch die Frage vorlegen, ob der Einbau der Dämpferwicklung bei großen Generatoren tatsächlich Schwierigkeiten verursacht. Wir denken dabei in erster Linie an raschlaufende Generatoren mit ausgesprochenen Polen, die von Wasserturbinen angetrieben werden. Diese Frage ist mit einem ausgesprochenen Ja zu beantworten. Wir haben bei den hier betrachteten Generatoren zwei grundsätzlich verschiedene Bauformen für den Rotor zu unterscheiden. Die eine in Amerika zum Teil bevorzugte, welche Pole, Polschuhe und Induktorkörper aus Blechlamellen



zusammensetzt, und die andere in Europa übliche, bei welcher zumindest das Induktorjoch massiv ist. In allen Fällen entsteht durch den Einbau der Dämpferwicklung die Notwendigkeit, den Polschuh etwas höher zu machen, um für die Dämpferlöcher Platz zu schaffen, und um mit durch die Fliehkraft besonders beanspruchten Querschnitten den Dämpferlöchern auszuweichen. Dadurch steigt die Fliehkraft der Pole nicht unbedeutend. Wenn die Polschuhe massiv sind, entsteht die weitere Schwierigkeit, die Dämpferlöcher in die massive Poloberfläche hineinzubekommen. Bei breiteren Maschinen können solche Löcher knapp unter der Polhaut schlecht gebohrt werden. Man muß Nuten fräsen, die nach Einbau der Stäbe wieder mit Eisen verschlossen werden, um den nachteiligen Einfluß auf die Spannungskurve zu mildern. Bei Maschinen, bei welchen nur die Polschuhe lamelliert sind, macht sich die Vergrößerung der Fliehkraft besonders unangenehm bemerkbar, weil es um so schwieriger wird, die Polschuhe ordentlich zu halten. Als weiterer Übelstand ergibt sich, daß der Einbau der Dämpferwicklung die Spannungskurve verschlechtert, und daß er das sehr einfache Mittel zur Bekämpfung der sogenannten Nutenharmonischen, die Staffelung der Polschuhkanten, sehr erschwert, wenn nicht unmöglich macht, da man auch die Dämpferstäbe in den einzelnen Staffeln gegeneinander versetzen muß. Die Vergrößerung der Polschuhhöhe hat in allen Fällen die unangenehme Begleiterscheinung, daß die Polschuhstreuung stark zunimmt. Das bedingt größere Polkernquerschnitte oder stärkere Erregung, also oft eine Vergrößerung der ganzen Maschine.

Trotz all dieser Schwierigkeiten muß man die Anordnung einer richtigen, den Polzwischenraum überquerenden Querfelddämpfung als unerläßlich bezeichnen.

Verbesserung des Parallellaufes von Maschinen, die durch Gasmaschinen oder Dieselmotoren angetrieben werden.

Von

Franklin Punga.

Obgleich der Parallellauf von Drehstrom- oder Wechselstrommaschinen, die durch Gasmaschinen angetrieben werden, in allen Einzelheiten als bekannt angenommen werden kann, so können wir ihn trotzdem noch nicht als einwandfrei bezeichnen. Man hält das Problem schon für gelöst, wenn die Maschinen der gleichen Zentrale im Tritt bleiben, selbst wenn dabei die Wattmeter der einzelnen Generatoren um einen beträchtlichen Teil der Vollast beständig hin und her schwanken. Gelegentlich kommt es vor, daß eine Gaszentrale mit einer entfernt gelegenen Dampfturbinenzentrale parallellaufen soll. Hier ist nun unsere Kenntnis so weit fortgeschritten, daß wir wissen, daß ein bestimmter Ohmscher Widerstand der Verbindungsleitung nicht überschritten werden darf. Aber sehr oft kommt es vor, daß es praktisch unwirtschaftlich ist, diesen geringen Ohmschen Widerstand auch tatsächlich bereitzustellen, was vielleicht nur durch Parallelschalten einer größeren Anzahl von Kabeln möglich ist.

Wir wollen zunächst versuchen, für die Güte des Parallellaufes einen Maßstab zu suchen. Der von Dr. Rosenberg und Professor Görges eingeführte Resonanzmodul befriedigt noch nicht ganz, denn er gibt nur an, in welchem Verhältnis die Leistungsschwankungen der Maschine durch den Parallellauf vergrößert werden. Auch berücksichtigt er nicht den Einfluß der Dämpfung auf die Leistungsschwankung. In Bild 1 ist der Parallellauf durch eine einfache mechanische Anordnung



ersetzt. Auf die Masse m, die mit dem festen Körper K durch die Feder c verbunden ist, wirke eine Kraft P, die im allgemeinsten Fall aus einer konstanten Kraft und einer darüber gelagerten unregelmäßigen, aber periodisch wiederkehrenden Kraft besteht, die nach dem Fourierschen Gesetz in eine Reihe von Harmonischen zerlegt werden kann. Die Bewegung dieser Masse kann wiederum dargestellt werden durch den Strom in einem Kreise, in welchem die Masse m durch die Selbstinduktion L, die Feder mit der spezifischen Rückführkraft c durch den reziproken Wert der Kapazität C und die spezifische Reibung der Masse m auf seiner Unterlage durch den Ohmschen Widerstand R ersetzt wird. Wird noch P durch die Spannung E ersetzt, so erhalten wir in symbolischer Form die einfache Beziehung

$$J = \frac{E}{Z}, \text{ wo } Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß beim wirklichen Parallellauf die Spannung, welche an dem Widerstand R auftritt, der Leistung proportional ist, die durch die Dämpferwirkung auf das Netz übertragen wird, daß ferner die Spannung an den Klemmen der Kapazität C der Leistung proportional ist, welche von der synchronisierenden Kraft des Generators an das Netz übertragen wird. In Bild 1 erkennt man das am besten. Auf den festen Körper K wird sowohl von der Feder c als auch durch die Reibung der Masse m auf der Unterlage eine Kraft ausgeübt und das Verhältnis dieser Kraft zu P soll als Übertragungsfaktor g bezeichnet werden. Es ist also in symbolischer Form



Bild 1. Bild 2.

$$g = \frac{R - \frac{j}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)}. \tag{1}$$

Im allgemeinen kommt es nur auf den absoluten Wert von g an. Doch ist es bequemer, die symbolische Form beizubehalten. Aus diesem Ausdruck erkennt man sofort die schon von anderen Autoren nachgewiesene Tatsache, daß eine zu große Dämpfung unter Umständen wieder schädlich werden kann. Machen wir nämlich in Formel 1 $R = \infty$, so folgt offenbar $g = 1$, d. h. die Kraft P in Bild 1 überträgt sich in vollem Umfang auf den Körper K. Ein solcher Parallellauf würde aber unmöglich sein. g hängt offenbar von dem Werte ω ab, also von der Periodenzahl der Harmonischen, die in P resp. in dem Tangentialdruckdiagramm enthalten ist. Für eine Zentrale, in welcher 94tourige 4-Takt-Gasmaschinen, Drehstrommaschinen von 6000 KVA vorhanden sind, und in welcher der Parallellauf als relativ günstig bezeichnet werden mußte, ergaben sich folgende Werte von g:

für die Harmonische von der Periodenzahl 188 pro Minute $g_{\lambda=2} = 0{,}27$,
für die Harmonische von der Periodenzahl 94 pro Minute $g_{\lambda=1} = 0{,}9$,
für die Harmonische von der Periodenzahl 47 pro Minute $g_{\lambda=\frac{1}{2}} = 1{,}7$.

Durch diese 3 Zahlen ist die Güte des gesamten Parallellaufes, soweit der elektrische Teil in Betracht kommt, festgelegt. Für die Harmonische, die die Periodenzahl 188 pro Minute besitzt, und die wir, weil wir sie auf die Tourenzahl der Maschine beziehen, mit $\lambda = 2$ bezeichnen, liegt die Größe der Amplitude ziemlich

fest. Sie besitzt annähernd die Größe der auf die Drehstrommaschine ausgeübten mittleren Kraft. Von diesen Harmonischen gehen also nur 27% auf das Netz über. Für $\lambda = 1$ ist im allgemeinen die Amplitude der Harmonischen im Tangentialdruckdiagramm 5—6mal kleiner als die für $\lambda = 2$. Trotz des größeren Wertes von g wird also diese Amplitude keine gefährlichen Schwankungen in der Leistung des Drehstrom-Generators hervorrufen. Für $\lambda = 1/2$ ist bekanntlich aus dem normalen Tangentialdruckdiagramm überhaupt keine Harmonische zu erkennen. Erst Herr Dr. Rosenberg hat auf die wichtige Tatsache aufmerksam gemacht, daß in allen Maschinen (von schlechter Einregulierung herrührend) eine solche Harmonische auftritt, und daß sie sogar die gefährlichste ist, mit der der Parallellauf zu rechnen hat, weil nämlich dann zu dieser Harmonischen der Wert g im allgemeinen größer wird (im vorliegenden Fall $g = 1,7$) und bei nicht genügender Berücksichtigung zu groß werden kann.

Im folgenden soll nun eine neue Konstruktion beschrieben werden, die nach Überzeugung des Verfassers einen wesentlich besseren Parallellauf ergibt als die normale Methode. Das Überraschende ist, daß dabei ein Mittel benutzt wird, das bisher schon öfters beschrieben worden ist[1], von dem aber nur die schlechte Seite erkannt wurde, während die günstigen Möglichkeiten des Verfahrens scheinbar noch

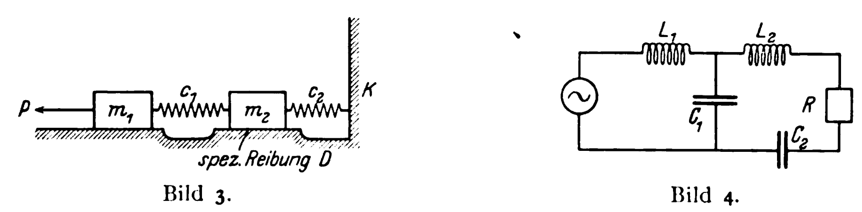


Bild 3. Bild 4.

nirgends erwähnt worden sind. Das Verfahren besteht darin, daß die 4-Takt-Gasmaschine oder der Dieselmotor zunächst ein Schwungrad antreibt, welches seinerseits unter Zwischenschaltung einer flexiblen Kupplung den Drehstrom-Generator antreibt. Bild 3 zeigt uns das neue Bild der Kraftübertragung. Auf die Masse m_1 wirkt wiederum die Kraft P. Die Masse m_2 ist nun mit m_1 durch die Feder c_1 und mit dem festen Körper K durch die Feder c_2 verbunden. Die Reibung von m_1 auf der Unterlage soll vernachlässigbar sein, während für das Gleiten der Masse m_2 auf seiner Unterlage der Reibungskoeffizient μ nicht vernachlässigbar sei.

Wir verwandeln zunächst das mechanische Schema Bild 3 in das elektrische des Bildes 4. m_1 und m_2 wird durch L_1 und L_2 ersetzt. Den Federn c_1 und c_2 entsprechen die reziproken Werte der Kapazitäten C_1 und C_2, während die Reibung von m_2 auf der Unterlage durch den Ohmschen Widerstand R ersetzt wird. Es ist hier wiederum der Strom in L_1

$$J_1 = \frac{E}{Z_0}, \text{ wo } Z_0 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1 + \frac{1}{Z_2}} \tag{2}$$

und

$$Z_2 = R + j\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

J_1 teilt sich in die beiden Ströme J_0 und J_2 proportional der Leitfähigkeit der beiden Stromkreise, also

$$J_0 : J_2 = j\omega C_1 : \frac{1}{Z_2}$$

und da $J_1 = J_0 + J_2$, so folgt sofort $\frac{J_1}{J_2} = 1 + j\omega C_1 Z_2$.

[1] „Über den Einfluß von Torsionsschwingungen von Wellen bei Parallelbetrieb von Wechselstromgeneratoren“ von Dr. L. Fleischmann. ETZ 1912, S. 610.

Auf den festen Körper K in Bild 3 wird nun offenbar eine Kraft durch die Feder c_2 und die Reibung der Masse m_2 auf seiner Unterlage übertragen und diese Kraft geteilt durch die ursprüngliche Kraft P ist der Übertragungsfaktor der neuen Anordnung, also

$$g = \frac{J_2\left(R - \frac{j}{\omega \cdot C_2}\right)}{\mathfrak{E}} = \frac{J_2\left(R - \frac{j}{\omega C_2}\right)}{J_1 \cdot Z_0} = \frac{R - \frac{j}{\omega C_2}}{Z_0 \cdot (1 + j \cdot \omega C_1 \cdot Z_2)}. \tag{3}$$

In der neuen Anordnung ergeben sich 2 kritische Tourenzahlen, die wir am bequemsten bestimmen, wenn wir den Nenner von g gleich Null setzen und gleichzeitig auch R unberücksichtigt lassen. Die beiden kritischen Drehzahlen multipliziert mit dem Werte 2π ergeben die kritischen Drehfrequenzen ω_1 und ω_2. In unserer Formel kommen nur die Quadrate von ω_1 und ω_2 vor, die wir mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen. Gleichzeitig führen wir die 3 Drehfrequenzen $\omega_{1,1}$ $\omega_{2,2}$ $\omega_{1,2}$ ein, deren Quadrate sind:

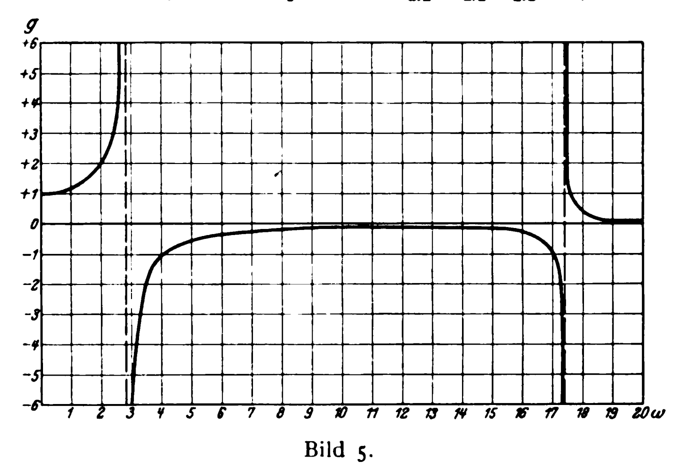


Bild 5.

$$k_1 = \omega_{1,1}^2 = \frac{1}{C_1 L_1}, \quad k_2 = \omega_{2,2}^2 = \frac{1}{C_2 L_2}, \quad k_3 = \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{C_1 L_2}.$$

Durch Nullsetzen des Nenners von g erhält man (wenn R vernachlässigt wird) die Gleichungen:

$$x_1 + x_2 = k_1 + k_2 + k_3$$
$$x_1 x_2 = k_1 k_2.$$

Wir werden später sehen, daß es von der größten Bedeutung ist, C_1 wesentlich größer als C_2 zu machen; ferner aus wirtschaftlichen Gründen L_2 so klein wie möglich zu machen. k_2 ist also groß gegenüber k_1, und k_3 liegt zwischen k_1 und k_2. Unter Berücksichtigung dieses Größenverhältnisses kann man mit genügender Genauigkeit[1] schreiben:

$$x_1 \sim \frac{k_1 \cdot k_2}{k_2 + k_3}, \quad x_2 \sim k_2 + k_3.$$

In Bild 5 ist g in Abhängigkeit von ω aufgetragen, wobei aber $R = 0$ gesetzt wurde. Als Beispiel wurde die Zentrale angenommen, die die schon erwähnten 94tourigen von Viertakt-Gasmaschinen angetriebenen Generatoren von 6000 kVA besitzt.

Der Läufer des Generators hatte ein GD^2 von 5000000 kgm^2, also $J_p = \frac{5\,000\,000}{39{,}2} = 126\,000$, die kritische Tourenzahl lag bei 63 U. p. M., also ergibt sich

[1] Der genaue Wert ist

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(k_1 + k_2 + k_3)^2 - 4\, k_1 \cdot k_2}.$$

die synchronisierende Kraft zu $P_p = 5\,500\,000$. Der Innendurchmesser des Stators betrug $D_i = 8$ m.

Bei der neuen Ausführung soll das GD^2 der Generatoren so klein wie konstruktiv noch möglich gehalten werden, was vor allem durch Verkleinerung des Durchmessers erreicht wird. Ein Durchmesser D_i von 6 m ist noch ausführbar und führte zu einem Trägheitsmoment $J_{p2} = 20\,000$. Das neu hinzukommende Schwungrad kann wesentlich kleiner genommen werden als das frühere. Hier soll zunächst einmal eine Reduktion auf die Hälfte, also $J_{p1} = 63\,000$, angenommen werden. Man wird aber leicht erkennen, daß man hiermit keine unteren Grenzen erreicht hat. Die Kapazität C_1 soll zunächst zehnmal größer angenommen werden als C_2, also $C_1 = \frac{1}{550\,000}$.

Im vorliegenden Falle ist also

$$k_1 = \frac{550\,000}{63\,000} = 8{,}73, \qquad k_2 = \frac{550\,000}{20\,000} = 275, \qquad k_3 = \frac{550\,000}{20\,000} = 27{,}5.$$

Man erkennt aus Bild 5 die beiden kritischen Drehfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_2 + k_3}} = \sqrt{7{,}9} = 2{,}81,$$

$$\omega_2 = \sqrt{k_2 + k_3} = \sqrt{302{,}5} = 17{,}4.$$

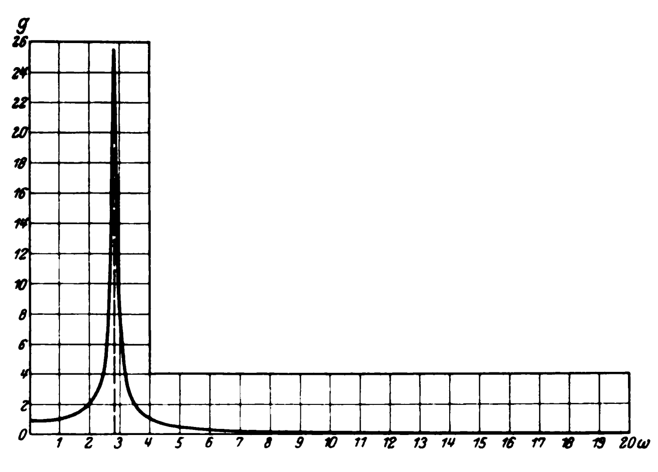


Bild 6a.

In Bild 6 ist nun auch die Dämpfung (also R) berücksichtigt. In der wirklichen Ausführung ($D_i = 8$ m) war die spezifische Dämpfung $D = 560\,000$ kgm, Durch Vergrößerung des Durchmessers der Dämpferstäbe und des Querschnittes der Endringe läßt sich D leicht auf 1 000 000 bringen. Unter Einführung dieses Wertes ergibt sich die Kurve in Bild 6 für g[1].

Die 1. kritische Drehfrequenz ist geblieben, die 2. ist verschwunden. Die Dämpfung hat nur einen geringen Einfluß auf den Wert von g in der Nähe der 1. kritischen Tourenzahl ausgeübt, aber einen außerordentlich großen auf die Amplitude in der 2. kritischen Tourenzahl. Wir können aus dieser Kurve zwei wichtige Schlüsse ziehen:

1. C_1 muß so groß gewählt werden, daß die 1. kritische Tourenzahl bedeutend niedriger ist als die Harmonische niedrigster Ordnung, die im Tangentialdruckdiagramm enthalten ist.

[1] Bild 6b stellt die gleiche Kurve wie in Bild 6a dar, nur mit stark vergrößerter Ordinate.

2. Eine kräftige Dämpfung verhindert vollständig das Auftreten der zweiten kritischen Tourenzahl[1].

Vergrößert man C_1 noch weiter, so verbessert sich g noch mehr. Die folgende Tabelle gibt die charakteristischen Daten des Parallellaufes für das alte System und das neue System für verschiedene Werte von C_1. In der 4. Zeile sind die räumlichen Grade eingetragen, welche die Verdrehung der durch C_1 ersetzten elastischen Kupplung unter dem Einfluß des mittleren (Wirk-) Drehmomentes erfährt.

In manchen Fällen kann es erwünscht sein, die Vorteile des ruhigen Laufes dadurch zu erweitern, daß zwischen elastischer Kupplung und Generator noch eine Zahnradübersetzung eingebaut wird. Auf meine Veranlassung[2] wurde das obige Beispiel auch für die Einschaltung eines Getriebes durchgerechnet, wodurch die Tourenzahl des Generators sich auf 1000 U. p. M. erhöhte. Diese größere Tourenzahl

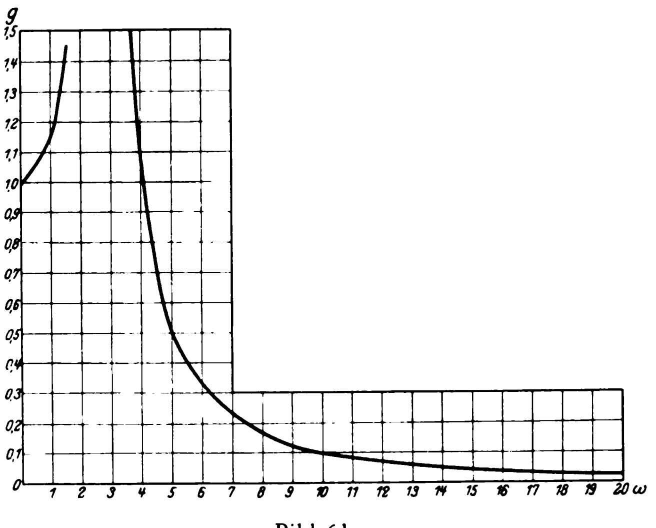


Bild 6b.

führt zu einem Generator von kleinerem Gewicht, größerem Wirkungsgrad und gestattet die Anwendung einer wesentlich größeren Dämpfung. Letztere hängt ja in erster Linie von den Verlusten ab, die in den Dämpferstäben entstehen würden, wenn die normale Leistung des Generators als asynchroner Generator übertragen würde, und offenbar sind diese Verluste in einem schnellaufenden Generator wesentlich kleiner als in einem langsam laufenden. Im vorliegenden Falle ergab sich die Möglichkeit D (also nach unserer Schreibweise R) bis auf $3 \cdot 10^6$ zu steigern. Wir werden aber unserer Berechnung nur den Wert $2 \cdot 10^6$ zugrunde legen.

Die synchronisierende Kraft, bezogen auf 94 U. p. M., wird sich nur dann ändern, wenn das Verhältnis der Anker-AW zu den Feld-AW geändert wird. In der Praxis wird man dieses Verhältnis bei schnellaufenden Maschinen etwas vergrößern, so daß wir $C_2 = \frac{1}{4 \cdot 10^6}$ annehmen können. Das auf 94 Umdr. pro Min.

[1] Bei unendlich großer Dämpfung ergibt sich

$$g = \frac{1}{1 - \omega^2 \cdot L_1 C_1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k_1}},$$

woraus sich ebenfalls ergibt, daß für die 1. kritische Tourenzahl kein Einfluß der Dämpfung stattgefunden hat, wohl aber ein sehr großer für alle übrigen Tourenzahlen.

Es ist interessant, daß bei unendlich großer Dämpfung und bei $\omega = \omega_{1,1}$ g unendlich groß werden kann, während für endliche Werte der Dämpfung g im Endlichen bleibt.

[2] Diplomarbeit Kilb.

bezogene GD^2 steigt, wenn die Tourenzahl höher gewählt wird. Die Rechnung ergab etwa $J_{p2} = 28000$. Die sich jetzt ergebenden Werte von g sind ebenfalls in der folgenden Tabelle 1 eingetragen.

Tabelle.

	Altes System	Neus System, direkter Antrieb			Neues System mit Zahnradübersetzung 94 auf 1000		
		$C_1 = 10\,C_2$	$C_1 = 20\,C_2$	$C_1 = 40\,C_2$	$C_1 = 10\,C_2$	$C_1 = 20\,C_2$	$C_1 = 40\,C_2$
g ($\lambda = 1/2$)	1,7	0,543	0,23	0,104	0,34	0,15	0,07
g ($\lambda = 1$)	0,9	0,104	0,05	0,025	0,07	0,035	0,017
g ($\lambda = 2$)	0,27	0,024	0,012	0,006	0,017	0,008	0,0034
Verdrehung der Feder in räuml. Grad bei Normaldrehmoment (4500 kW)		4,9°	9,7°	19,4°	6,7°	13,3°	26,6°

Wir müssen noch einen Betriebsfall untersuchen, der unter Umständen eine Störung verursachen könnte, nämlich den Fall des vom Netz abgeschalteten Generators. In dem Tangentialdruckdiagramm des leerlaufenden Generators befinden sich noch Harmonische, die jetzt wesentlich andere Verhältnisse vorfinden als während des Arbeitens auf das Netz. Das Bild 7 stellt jetzt das Problem der Mechanik und Bild 8 das elektrische Diagramm dar. Die Feder c_2, welche die



Bild 7. Bild 8.

Verbindung mit dem festen Körper K darstellt, ist verschwunden, desgleichen die Reibung auf der festen Unterlage. Es kommt jetzt nicht darauf an, die Schwankung der an das Netz abgegebenen Leistung zu berechnen, sondern die Bewegungen der Massen m_1 und m_2 zu studieren, die innerhalb gewisser Grenzen bleiben müssen, weil sonst die elastische Kupplung gefährdet sein könnte. Es ist jetzt

$$J_1' = \frac{E}{Z_0'},$$

wo

$$Z_0' = j\,\omega\,L_1 + \frac{1}{j\,\omega\,C_1 + \frac{1}{j\,\omega\,L_2}} = \frac{j\,\omega\,L_1(1 - \omega^2\,C_1\,L_2) + j\,\omega\,L_2}{1 - \omega^2\,C_1\,L_2}.$$

Z_0' wird gleich Null, wenn $j\,\omega\,(L_1 + L_2) = j\,\omega^3\,L_1\,L_2\,C_1$, $L_1 + L_2 = \omega^2\,L_1\,L_2\,C_1$,

also

$$\omega^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1\,L_2\,C_1}.$$

Wir können also den Fall auf einen normalen Resonanzfall zurückführen, in welchem außer C_1 noch die Masse $L_3 = \frac{L_1\,L_2}{L_1 + L_2}$ vorhanden ist. Im elektrischen Probleme würde das heißen, die beiden Induktivitäten L_1 und L_2 sind parallel geschaltet. Haben wir nun z. B.

$$L_1 = 63\,000,$$
$$L_2 = 20\,000,$$

so ist

$$L_3 = \frac{63\,000 \cdot 20\,000}{63\,000 + 20\,000} = 15\,000.$$

$C_1 = \frac{1}{550\,000}$ und $L_3 = 15\,000$ haben ihre kritische Tourenzahl bei 57,8 U. p. M., und bei doppeltem und vierfachem Werte von C_1 sinkt die kritische Tourenzahl auf 41 U. p. M. resp. 29 U. p. M. Mit diesen Tourenzahlen könnte die leerlaufende Gruppe nicht laufen; es müssen also besondere Vorsichtsmaßregeln beim Anlaufen und Abstellen getroffen werden. Vor allen Dingen muß gefordert werden, daß die neue kritische Tourenzahl nicht mit der Betriebstourenzahl übereinstimmt. Man wird sie nun entweder oberhalb oder unterhalb der Betriebstourenzahl verlegen. Das erstere hätte den großen Vorteil, daß weder beim Anlaufen noch beim Abstellen diese kritische Tourenzahl durchlaufen wird.

Man ersieht aber an dem gewählten Beispiel, daß man dann C_1 nicht so groß nehmen darf, wie es aus anderen Gründen wünschenswert ist. Es fragt sich also, welche Mittel stehen uns zur Verfügung, um bei einer unterhalb der Betriebstourenzahl gelegenen kritischen Leerlauftourenzahl das Anlaufen und Abstellen mit Sicherheit bewirken zu können.

Offenbar haben wir hier den gleichen Fall, wie bei einem 3000tourigen Turbogenerator, dessen kritische Tourenzahl, sagen wir, bei 2000 U. p. M. liegt. Wir wissen, daß, wenn ein solcher Generator die kritische Tourenzahl schnell durcheilt, Vibrationen überhaupt nicht beobachtet werden. Ein schnelles Durcheilen der kritischen Tourenzahl dürfte also auch hier in vielen Fällen genügen. Wir haben aber zwei einfache Mittel, die immer wirksam sind. Die elastische Kupplung muß so gebaut werden, daß sie während des Anlaufes und Abstellens entweder als starre Kupplung oder als elastische Kupplung mit starker Dämpfung wirkt.

Die Ausführung einer elastischen Kupplung, die durch elektromagnetische Fernsteuerung in eine starre Kupplung umgesteuert werden kann, bietet keine Schwierigkeit, so daß die erste Lösung im allgemeinen vorgezogen werden wird.

Man erkennt aus dem Vorhergehenden, daß eine Reihe von Gefahrquellen zu umgehen waren, ehe die Vorteile des neuen Systems herausgeschält werden konnten. Aus diesem Grunde ist also auch ohne weiteres erklärlich, daß man bisher die Benutzung eines separaten Schwungrades in elektrischer Beziehung als fehlerhaft bezeichnet hat. Erst nachdem die Gefahrquellen richtig erkannt und durch richtige Dimensionierung der Schwungmomente und der elastischen Kupplung unschädlich gemacht wurden, hat sich das für die Praxis wichtige Resultat ergeben, daß sich mit Viertakt-Gasmaschinen oder Dieselmotoren ein Parellellauf herstellen läßt, der sich nicht mehr von demjenigen zwischen Dampfturbinen-Generatoren unterscheidet. Dabei haben sich die Gewichte der gesamten Anordnung eher verkleinert, so daß also auf keinen Fall eine Vergrößerung des Preises mit der Verbesserung verbunden ist.



Ein Glühkathodenoszillograph für Vakuumaufnahmen.

Von

W. Rogowski und **K. Baumgart.**

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Rogowski und Größer[1] haben vor zwei Jahren einen Glühkathodenoszillographen beschrieben, dem sowohl hohe Intensität wie Fleckschärfe zukam. Es gelang den beiden Genannten mit ihrem Oszillographen, durch Außenaufnahme gedämpfte Kondensatorentladungen von 100000 Perioden in der Sekunde auf der photographischen Platte festzuhalten.

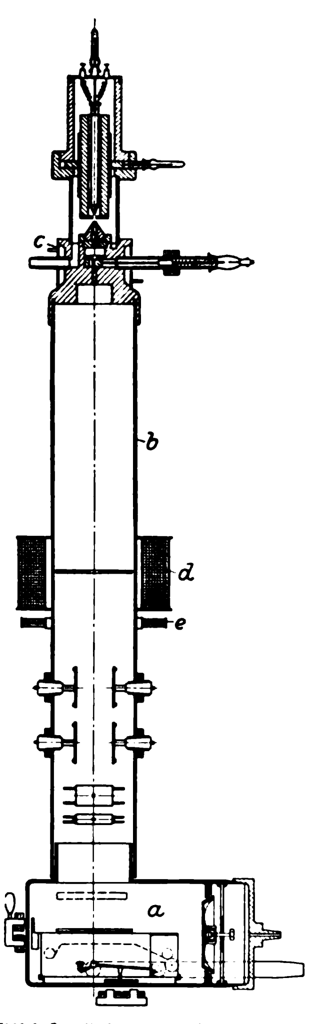


Bild 1. Schnittzeichnung des Glühkathodenoszillographen für Innenaufnahmen.

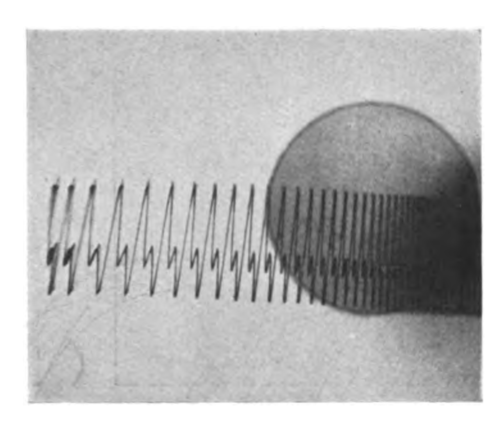


Bild 2. Klemmenspannung einer Wechselstromsirene. 3000 Per/sec, Erregerspannung der Röhre 60 kV, Heizstrom 3,2 Ampere.

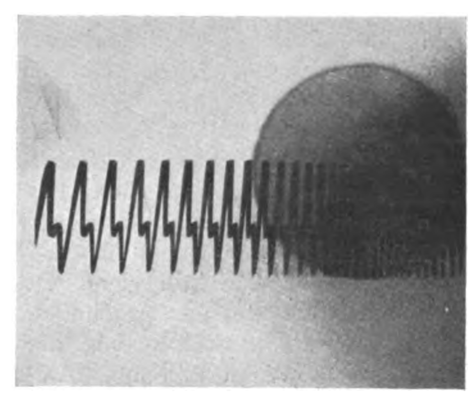
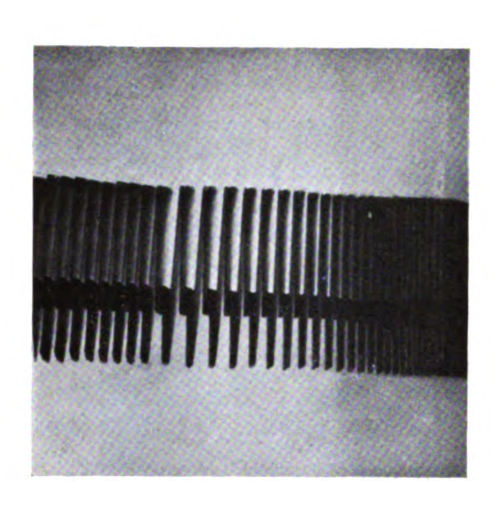


Bild 3. Klemmenspannung einer Wechselstromsirene. 3000 Per/sec, Erregerspannung der Röhre 60 kV, Heizstromstärke 4,0 Ampere.

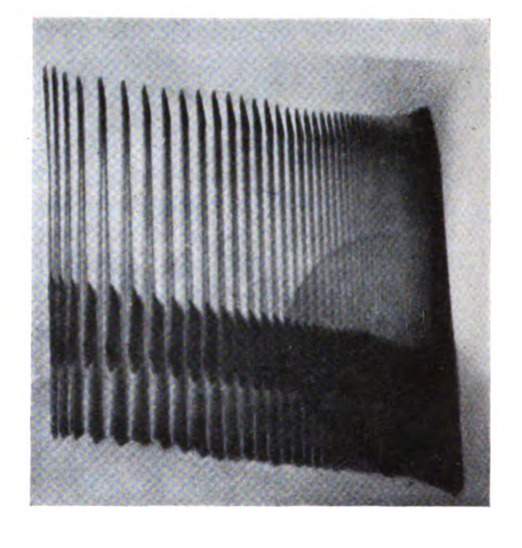
[1] Rogowski und Grösser, Über einen lichtstarken Glühkathodenoszillographen für Aufnahmen rasch verlaufender Vorgänge. Arch. f. Elektrot. Bd. 15, Heft 4, 1915.

Andererseits haben Rogowski und Flegler[1] und später Rogowski, Flegler und Tamm[2] einen Kathodenoszillographen mit kalter Kathode beschrieben, mit dem sie durch Innenaufnahmen elektrische Vorgänge von einhundertmillionstel, ja von einmilliardstel Sekunde Dauer noch vollkommen formgetreu und in guter Schrift auf den Film schrieben. Da die Glühkathode vor der kalten Kathode einige Vorzüge hat (leichte Veränderung der Empfindlichkeit[3], verminderte Streuung der Elektronen im Ablenkrohr), so lag es im Gang der Entwicklung, beide Wege miteinander zu vereinigen und einen Glühkathodenoszillographen für Innenaufnahmen zu schaffen. Dieser wird im folgenden beschrieben.



0 1×10^{-3} sek

Bild 4. Klemmenspannung einer Wechselstromsirene. 3000 Per/sec, Erregerspannung der Röhre 45 kV, Heizstromstärke 4,0 Ampere.



0 1×10^{-3} sek

Bild 5. Klemmenspannung einer Wechselstromsirene. 3000 Per/sec, Erregerspannung der Röhre 25 kV, Heizstromstärke 4,0 Ampere.

Ein Glühkathodenoszillograph steht und fällt mit der Frage, ob man das nötige Hochvakuum bequem und sicher erzeugen kann. Dies ist der Fall, wenn man Leyboldsche Diffusionspumpen benutzt, wenn man mit flüssiger Luft kühlt und bei der Konstruktion die nötige Vorsorge (siehe weiter unten) trifft.

Fast alle Teile unseres neuen Oszillographen bestehen aus Metall (Bild 1). Die Aufnahmekammer *a* und das sich daran anschließende Ablenkrohr *b* sind von genau der gleichen Bauart, die Rogowski, Flegler und Tamm im Archiv für Elektrot. 1927, Band 18, angegeben haben. Desgleichen die Platten- (Film-) Kassette und ihre elektromagnetische Steuerung. Den Abschluß des Ablenkrohres nach der Anodenseite hin bildet das aus geschmiedetem Messing hergestellte Stück *c*. Es trägt die Anodenspitze aus Molybdän, die Schieberblende, den Pumpstutzen und einen Kühlmantel für Wasserkühlung. An das Messingstück *c* schließt sich mittels

[1] Rogowski und Flegler, Ein Kathodenoszillograph für Aufnahmen im Vakuum, Arch. f. Elektrot. Bd. 15, 1925.

[2] Rogowski, Flegler, Tamm, Eine neue Bauart des Kathodenoszillographen. Arch. f. Elektrot. Bd. 18, Heft 6, 1927.

[3] Bei der älteren Bauart von Rogowski und Flegler wurde die Veränderung der Empfindlichkeit durch Abstandsänderungen der Ablenkplatten, die von außen gesteuert wurden, erreicht. Bei der neueren Bauart sind mehrere (2) Plattenpaare für die Ablenkung vorgesehen, die einzeln oder in Parallelschaltung benutzt oder noch durch Metallstreifen bequem verlängert werden können.

einer Piceindichtung ein 5 mm starker Hartglaszylinder von 160 mm Durchmesser und 200 mm Länge an. Er trägt oben eine metallene Kappe, die den Glühdraht und die Hilfselektrode aufnimmt. Alle Dichtungsstellen sind mit Picein hergestellt. Die Wasserkühlung soll die Erwärmung desselben in zulässigen Grenzen halten.

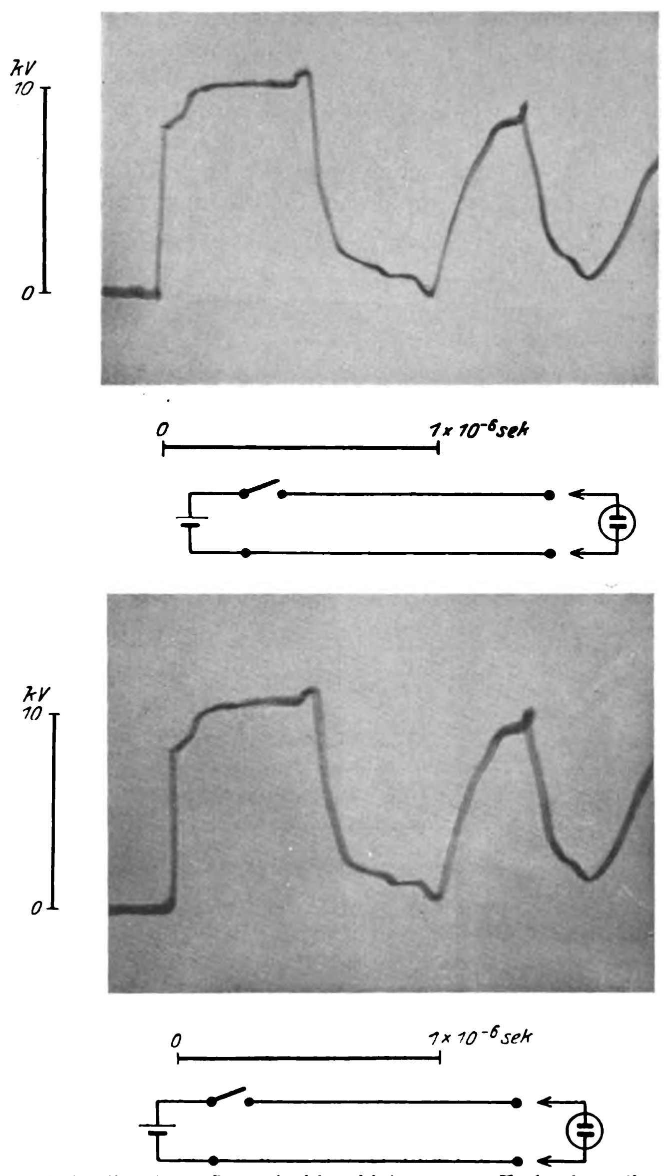


Bild 6 u. 6a. Kabelwelle einer Gummischlauchleitung, am Ende der offenen Leitung gemessen. Länge der Leitung 37 m, angestoßene Frequenz 10^6 Per/sec, Schaltspannung 5 kV.

Die Spule *d* dient zur Konzentrierung des Elektronenbüschels. Die Kreuzspule *e* gibt dem Fleck die gewünschte Anfangslage.

Wir haben folgende Aufnahmen mit dem Glühkathodenoszillographen erhalten. Bild 2 zeigt die Klemmenspannung einer Wechselstromsirene. Frequenz 3000 Perioden pro Sekunde. Das Oszillogramm beweist, welch hervorragende Niederschrift mit einer Glühkathode erzielt werden kann. Die Zeitablenkung geschah hier durch ein magnetisches Feld. Der runde Klecks im Oszillogramm rührt von der Lichtwirkung

der geheizten Wolframkathode her. Man beachte noch, daß die aufgedrückte Spannung Kathode—Anode 60 kV beträgt. Entfernung beider Elektroden etwa 1 cm. Ein Beweis für die Güte des erzielten Hochvakuums. Heizstromstärke des Glühfadens 3,2 Ampere.

Wir behalten die Spannung von 60 kV bei, vergrößern aber den Heizstrom von 3,2 auf 4,0 Amp., bekommen nun mehr Elektronen und erhalten Bild 3. An der kräftigeren Schrift kommt die größere Elektronenmenge zum Ausdruck.

Wir lassen nun die Heizung konstant und verringern die Spannung Anode—Kathode (Erregerspannung) von 60 kV auf 45 kV. Unser Oszillograph wird empfindlicher, wir erwarten größere Amplituden. Bild 4 zeigt sie. Gleichzeitig bemerken wir, soweit wir es mit dem unbewaffneten Auge erkennen können, daß trotz niedrigerer Erregerspannung die photographische Schwärzung praktisch dieselbe geblieben ist wie in Bild 3.

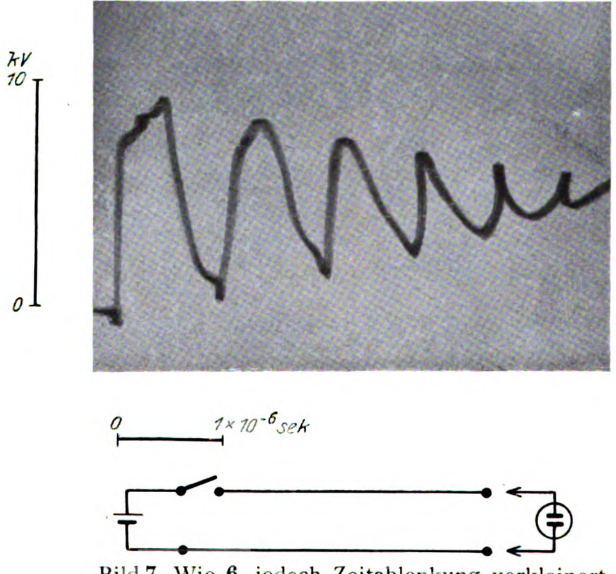


Bild 7. Wie 6, jedoch Zeitablenkung verkleinert.

Wir verringern die Erregerspannung noch weiter auf 25 kV. Der Heizstrom bleibt wieder derselbe von 4,0 Ampere. Bild 5 ist das Ergebnis. Die niedrige Erregerspannung kommt in einer noch weiteren Vergrößerung des Schreibweges zum Ausdruck. Zu unserem Erstaunen sehen wir auch jetzt keine wesentliche Änderung der Schwärzung. Wir müssen also annehmen, daß in dem Gebiet von, sagen wir, 20000 Volt ab die photographische Platte bei unseren Strömen bereits gesättigt wird. Es hat somit, wenn man lediglich die Schwärzung im Auge hat, keinen Zweck, wesentlich höher als 25000 Volt mit der Erregerspannung zu gehen. Dagegen hängt die Schwärzung in diesem Gebiet stark von der Elektronenmenge ab (vgl. Bild 2 und 3).

Man wird einwenden, daß Vorgänge von eindreitausendstel Sekunde keine Leistung für einen Kathodenoszillographen darstellen. Das ist richtig. Wir haben daher auch Wanderwellen und Spannungszusammenbrüche am Funken mit unserem neuen Oszillographen aufgenommen. Die Zeitablenkung wurde in diesen Fällen, wie früher, durch ein elektrisches Feld hervorgerufen. Da die Wanderwellenleitung des Elektrotechnischen Instituts für andere Zwecke benutzt wurde, haben wir eine Gummischlauchleitung (Kabel) verwendet. Aus der Arbeit von Rogowski, Flegler und Tamm[1]

[1] Rogowski, Flegler, Tamm, Über Wanderwelle und Durchschlag. Arch. f. Elektrot. Bd. 18, Heft 5. 1927.

geht hervor, daß die Wanderwelle bei einer solchen Leitung zuerst steil hindurch geht, daß aber dann sehr bald eine Abflachung eintritt. Das entsprechende Oszillogramm einer solchen Welle, aufgenommen mit unseren Glühkathodenoszillographen, geben wir in Bild 6 und 6a wieder. Wir haben zweimal dieselbe Aufnahme gemacht. Die eine stellt nicht etwa die Kopie der andern, sondern eine neue Aufnahme dar. Aus beiden ist zu sehen, daß der Oszillograph regelmäßig die Vorgänge erfaßt. Unsere Gummischlauchleitung hatte eine Länge von 37 m. Die angestoßene Frequenz beträgt rund 10^6 Perioden in der Sekunde. Wie Rogowski, Flegler und Tamm gezeigt haben, geht der erste steile Anstieg der Wanderwelle bei der Freileitung in weniger als in einhundertmillionstel Sekunde vor sich. Bei unserer Gummischlauchleitung ist die Dauer des Anstieges kaum als länger einzuschätzen. Wir sehen, daß der Anstieg deutlich in unserem Oszillogramm zum Vorschein kommt. Die Intensität reicht also aus, um alle Wanderwellenphänomene

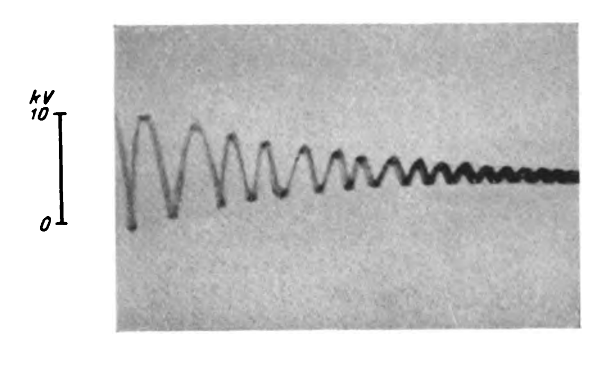


Bild 8. Kabelwelle einer Gummischlauchleitung, am Ende der offenen Leitung gemessen. Länge der Leitung 3,7 m, angestoßene Frequenz 10^7 Per/sec, Schaltspannung 5 kV.

kV 10 0

0 5x10⁻⁷sek

Bild 9. Spannungszusammenbruch am Funken, gemessen an einer Plattenfunkenstrecke, die an das Ende der Gummischlauchleitung von 37 m geschaltet war. Schaltspannung 5 kV.

und Durchbruchserscheinungen zu verfolgen. Ja, wir glauben sogar, daß in bezug auf Intensität die neue Bauart sich nicht nur ebenbürtig neben die alte stellt, sondern sie wahrscheinlich bald überholen wird.

In Bild 7 haben wir die Zeitablenkung verkleinert, so daß wir mehrere Schwingungen auf die Platte bekommen. Man sieht Verzerrungen im Oszillogramm. Sie rühren von Schwingungen in der Zeitablenkung her. Aus früheren Erfahrungen wissen wir, daß diese Verzerrungen dann eintreten, wenn Zeitkreis und Schwingungskreis aufeinander wirken. Tatsächlich war unser Schwingungskreis auch nicht in Metall eingepackt, wie dies bei den Versuchen von Rogowski, Flegler und Tamm geschah. Wir werden dies später nachholen und in einer späteren Arbeit weitere Oszillogramme bringen. Die hier vorgebrachten galten zunächst dem Beweis, daß wir tatsächlich die Intensität für die höchsten Schwingungen haben.

Daß wir nicht nur die Vorgänge, wie bewiesen, auf der Platte festhalten, sondern daß wir sie auch deutlich mit allen Feinheiten auf dem Fluoreszenzschirm sehen können, ist eine für die Wahl geeigneter Versuchsbedingungen angenehme Eigenschaft dieses Oszillographen. Er ist in dieser Hinsicht mindestens ebenso gut,

wenn nicht sogar besser, als der von Rogowski, Flegler und Tamm beschriebene Kathodenoszillograph mit kalter Kathode. Dabei ist der Kontrast des Bildes auf dem Fluoreszenzschirm hervorragend gut. Man sieht alle Einzelheiten wunderbar deutlich. Tatsächlich sind sämtliche Aufnahmen ohne jede Vorablenkung gemacht worden.

In Bild 8 haben wir eine gedämpfte Schwingung von 10 Millionen vor uns, die durch Einschalten einer Gummischlauchleitung von 3,7 m erzielt wurde.

In Bild 9 bringen wir noch einen Spannungszusammenbruch am Funken. An das Ende der Gummischlauchleitung war eine Plattenfunkenstrecke eingeschaltet.

Es ist keine Frage, daß der neue Glühkathodenoszillograph mit dem Oszillographen mit kalter Kathode in ernstem Wettbewerb treten wird. Die eingangs genannten Eigenschaften machen ihn wertvoll. Der kalten Kathode wird indessen immer der Vorzug der einfacheren Handhabung bleiben.

Auch diese Arbeit wurde mit Unterstützung der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft durchgeführt.

Abgeschlossen am 9. März 1928.



Archiv für Elektrotechnik

XIX. Band. 5./6. Heft. 1928.

Die Wirkungsweise von Überspannung-Schutzvorrichtungen nach Untersuchungen mit dem Kathodenoszillographen.

Von

Eugen Flegler, Aachen.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen [1].

I. Ziel der Arbeit.

Die langjährigen Erfahrungen in unseren Starkstromanlagen haben gezeigt, daß es trotz der Fülle von verschiedenartigen Schutzeinrichtungen noch keinen zuverlässigen Überspannungschutz gibt. Die Klärung der Schutzwertfrage der verschiedenen Schutzvorrichtungen wurde durch die Forschung frühzeitig in Angriff genommen und konnte dort bereits zu einem gewissen Abschluß gebracht werden, wo es sich bei den Überspannungserscheinungen um langsame — etwa in der Größenordnung der Betriebsfrequenz und ihrer Oberwellen — verlaufende Vorgänge handelt. Der größte Teil der Überspannungen wird jedoch durch Störungen hervorgerufen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in den Starkstromanlagen fortpflanzen (Wanderwellen). Zur Erforschung dieser Vorgänge sind erst in den letzten Jahren zwei Hilfsmittel entwickelt worden: die Bindersche Schleifenmethode und der Kathodenoszillograph.

Auf beiden Wegen ist bereits auch die Untersuchung von Überspannungschutzvorrichtungen in Angriff genommen worden. Sommer [2] bedient sich der Schleifenmethode zur Prüfung von drei Schutzapparaten aus der Ableitergruppe, McEachron [3] und Gabor [4] verwenden zu ihren Untersuchungen den Kathodenoszillographen.

Die Schleifenmethode benutzt zur Bestimmung des zu untersuchenden Spannungsverlaufes die Funkenstrecke. Es können deshalb stets nur gewisse ausgezeichnete Teile (Querspannung, Schleifenspannung) aus der Kurve herausgegriffen werden. So gibt auch der von Sommer ermittelte Schutzwert einer Anordnung nur an, wie die mit der Meßfunkenstrecke festgestellte Spannungshöhe bzw. Steilheit einer Welle sich mit dem Einbau der Schutzanordnung in die Versuchsdoppelleitung ändert. Wenn gewährleistet ist, daß die zu schützende Anlage auf den Störungsvorgang in der gleichen Weise anspricht wie die Meßfunkenstrecke, gibt die Schutzwertbestimmung nach der Schleifenmethode gültige Werte. Dort aber, wo dies nicht der Fall ist oder wo die Möglichkeit besteht, daß die Welle noch einer weiteren Umbildung unterworfen wird, lassen sich aus den Ergebnissen der Schleifenmethode nicht ohne weiteres die richtigen Schlüsse auf den tatsächlichen Schutzwert der Anordnung ziehen [5].

---

[1] Dissertation, eingereicht am 30. Dezember 1927 an der Technischen Hochschule Aachen; auszugsweise mitgeteilt auf den Tagungen der Studiengesellschaft für Höchstspannungsanlagen e. V. am 5. 4. 1927 (Nürnberg) und 22. 11. 1927 (Ulm), bzw. als Fachbericht auf der Tagung des Verbandes Deutscher Elektrotechniker am 2. 7. 1927 (Kiel).

[2] E. M. K. Sommer, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 283.

[3] Mc Eachron, Gen. El. Rev. XXIX (1926), S. 678.

[4] D. Gabor, El. Wirtsch. 1926, S. 307; Forschungsheft 1 der Studiengesellschaft f. Höchstspannungsanlagen, 1927, S. 62.

[5] Siehe z. B. Abschnitt III, 2.

Gegenüber der Schleifenmethode ist der Kathodenoszillograph als Aufzeichner des vollständigen Spannungsverlaufes auch bei den zuletzt besprochenen Fällen noch in der Lage, eindeutig auswertbare Meßergebnisse zu liefern. Darüber hinaus läßt sich durch Analyse des Ansprechvorganges bei geeigneter Wahl der Versuchsbedingungen der theoretisch erwartete Verlauf herausschälen, jede unbeabsichtigte Zusatzerscheinung davon trennen und deren Quelle aufdecken. Das ist in den Fällen von besonderer Bedeutung, wo unbeabsichtigte Wirkungen so stark auftreten, daß sie praktisch ein Versagen des Schutzapparates bedingen. Der Oszillograph kann hier gegebenenfalls nicht nur die Fehlerquellen aufdecken, sondern auch gleichzeitig die Wege zu ihrer Vermeidung aufweisen.

Mc Eachron vergleicht die Wirkungsweise eines Oxydhautableiters mit derjenigen eines Widerstandableiters. Die gezeigten Oszillogramme geben, hauptsächlich in den Stromspannungskennlinien, deutlich den bezeichnenden Unterschied zwischen Ventil- und Widerstandableiter wieder. Darüber hinaus ist jedoch eine Auswertung der Oszillogramme nicht möglich, besonders da jede Angabe über Prüfanordnung und Form der verwendeten Stoßwelle fehlt.

Gabor hat sich im allgemeinen darauf beschränkt, eine Schutzwertbestimmung im Sinne der Schleifenmethode durchzuführen (Bestimmung der Spannungsabsenkung, bzw. der Stirnabflachung durch die Schutzapparate). Bei der von ihm benutzten Versuchsanordnung scheinen auch eine Reihe von Feinheiten verloren zu gehen, die für eine vollständige Zergliederung des Ansprechvorganges nicht vernachlässigt werden können.

Bei der vorliegenden Arbeit ist versucht worden, durch weitgehende Analyse des Ansprechvorganges die genaue Wirkungsweise der verschiedenen Schutzvorrichtungen kennen zu lernen, ihre Verwendbarkeit als Überspannungschutz unter den verschiedenartigen Betriebsbedingungen zu prüfen und gegebenenfalls die Verbesserungs- und Entwicklungsmöglichkeiten der einzelnen Schutzarten festzustellen. Bei Besprechung der Versuchsergebnisse wird dann noch Gelegenheit genommen werden, auf verschiedene Einzelheiten der vorgenannten Arbeiten einzugehen.

II. Versuchsanordnung.

Die Untersuchungen wurden mit dem im Aachener Elektrotechnischen Institut entwickelten Kathodenoszillographen[1] durchgeführt. Als Prüfanlage wurde die Wanderwellenanlage des Instituts benutzt, deren Aufbau und Schaltanordnung bereits

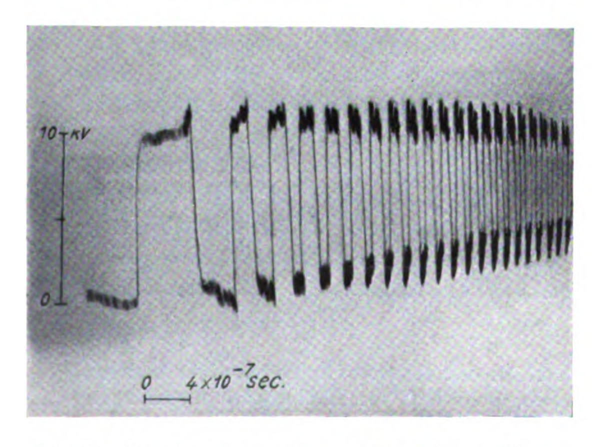


Bild 1. Rechteckschwingung (Freileitung 60 m, Ende offen, Schaltspannung 5 kV, Spannungsverlauf am Leitungsende gemessen).

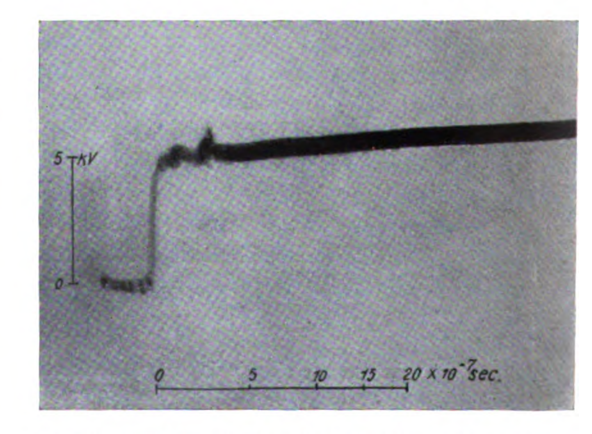


Bild 2. Sprungwelle (Freileitung 60 m mit Anfangswiderstand nach Bild 3a, Schaltspannung 5 kV, Spannungsverlauf am Leitungsende gemessen).

[1] Rogowski-Flegler-Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 519.

früher eingehend beschrieben und erläutert worden ist[1]. Es soll hier deshalb nur auf die für die vorliegende Untersuchung wesentlichen Punkte eingegangen werden.

Als Überspannungswellen fanden hauptsächlich zwei Schaltwellenformen Verwendung: die Rechteckschwingung nach Bild 1 und die praktisch unendlich lange Rechteckwelle gleichbleibender Höhe, im folgenden stets Sprungwelle genannt[2], nach Bild 2. Diese beiden Wellen können als die Grundformen der im praktischen Betrieb vorkommenden Überspannungswellen gelten. Sie stellen gleichzeitig eine sehr scharfe Beanspruchung dar. Es ist deshalb wohl berechtigt, die hieraus gewonnenen Ergebnisse auf andere, weniger scharfe Beanspruchungen zu verallgemeinern.

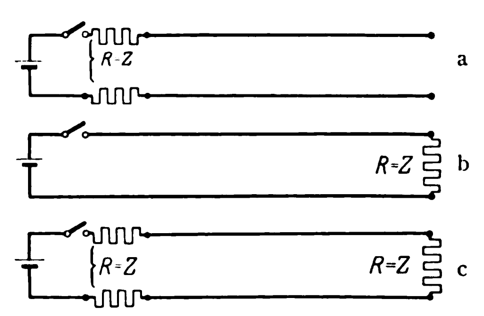


Bild 3. Schaltanordnungen zur Erzeugung von Sprungwellen auf Doppelleitungen.

Zur Erzeugung der Sprungwelle nach Bild 2 können drei verschiedene Schaltanordnungen benützt werden. Man kann einen dem Wellenwiderstand gleichen Ohmschen Widerstand am Leitungsanfang in den Leitungszug legen (Bild 3a), man kann das Leitungsende mit einem Widerstand gleicher Höhe überbrücken (Bild 3b) und man kann schließlich die beiden Widerstandanordnungen gleichzeitig benützen (Bild 3c). Die Einwirkung eines an die Leitung außerdem noch angeschlossenen Schaltteiles (Widerstand, Kondensator u. a.) äußert sich bei den drei Sprungwellenanordnungen verschieden. Man kann deren Verhalten etwa so kennzeichnen:

a) Anfangswiderstand: Die Leitung kommt aus dem Unendlichen und endet mit der Versuchsleitung (keine Rückwirkung der Spannungsquelle).

b) Endwiderstand: Die an die Spannungsquelle angeschlossene Doppelleitung führt ins Unendliche (keine Rückwirkung des Leitungsendes).

c) Anfangs- und Endwiderstand: Die Leitung führt beiderseits ins Unendliche.

Die Höhe der Endspannung ist bei a und b gleich der vollen, bei c gleich der halben Schaltspannung.

Je nach den Erfordernissen des Versuchs wird die eine oder andere Sprungwellenanordnung benützt werden, vorzugsweise, und wenn nichts anderes vermerkt, die Anordnung 3a, bei der die Höhe der Sprungwelle vor dem Leitungsende gleich der halben Endspannung ist.

---

[1] Rogowski und Flegler, Arch. f. Elektrot., XIV (1925), S. 529; XV (1925), S. 297. — Rogowski-Flegler-Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 479.

[2] Eine eindeutige Definition der Sprungwelle fehlt bis jetzt. So ist nach den „Leitsätzen für den Schutz elektrischer Anlagen gegen Überspannungen" das Kennzeichen für die Sprungwelle die steile Stirn (V.D.E. Vorschriftenbuch 1926, S. 97). Eine steile Stirn besitzen aber neben der in Bild 2 gezeigten Welle noch andere Wellenformen, die sich jedoch im übrigen wesentlich von dieser unterscheiden. So weist z. B. die Rechteckwelle endlicher Länge einen zweimaligen Spannungssprung (Anfang und Ende) auf und bei der Stoßwelle (kurzzeitiger Spannungsstoß) folgt auf die Stirn ebenfalls eine zweite mehr oder weniger steile Spannungsänderung. Auch die in Bild 1 gezeigte Rechteckschwingung besitzt eine steile Stirn. Es scheint jedoch im Sinne der genannten Leitsätze zu liegen, nur die in Bild 2 wiedergegebene Welle mit einmaligem Spannungssprung als Sprungwelle zu bezeichnen; denn die nach den Leitsätzen der Sprungwelle zugeschriebenen Wirkungen beziehen sich stets nur auf die Stirn, also den einmaligen Spannungssprung. Die Unterscheidung scheint besonders für die Beanspruchung von Spulen von Bedeutung (siehe Abschnitt IV)!

Die verwendeten Ohmschen Widerstände bestanden aus sehr dünnen Manganindrähten, die, wie die Oszillogramme zeigen, praktisch als konzentrierte Widerstände gelten können. Auf eine besondere Widerstandstaffelung zur Vermeidung von Reflexionen konnte deshalb verzichtet werden.

Die genaue Auswertung der aufgenommenen Oszillogramme setzt voraus, daß Zeit- und Spannungsmaßstab bekannt sind. Für den unmittelbaren Vergleich verschiedener Oszillogramme einer Versuchsreihe ist es wünschenswert, wenn beide Maßstäbe sich innerhalb der Versuchsreihe nicht ändern. Beide Forderungen waren bei dem benützten Oszillographen in genügender Weise erfüllt. Die Ablenkempfindlichkeit konnte unter gleichen Verhältnissen unverändert gehalten werden (siehe z. B. Bild 26), eine an die Versuchsreihe angeschlossene Maßstabeichung gestattet

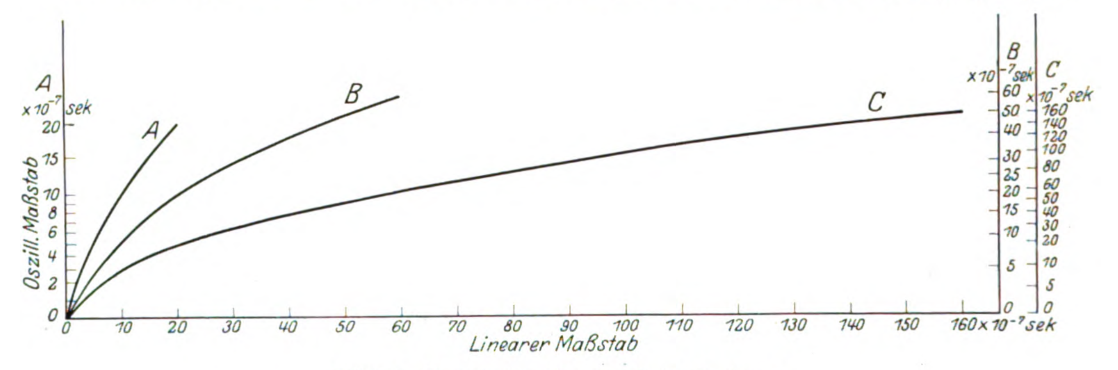


Bild 4. Kennlinien für die Zeitablenkung.

die richtige Auswertung. Diese Maßstabeichung läßt sich sehr einfach durch Aufnahme einer Rechteckschwingung erzielen. Der Auf- und Abstieg der Spannung gibt bei der geringen Abflachung der Welle sehr genaue Zeitmarken. Für den linearen Spannungsmaßstab genügt die Aufnahme eines Punktes (Amplitude der ersten Schwingung). In Bild 4 sind die Eichkurven für die drei am häufigsten benutzten Zeitablenkgeschwindigkeiten aufgetragen. Dieses Bild und noch deutlicher Bild 1 zeigen, daß die Vorablenkung beim Einsetzen des Schwingungsvorganges noch nicht voll-

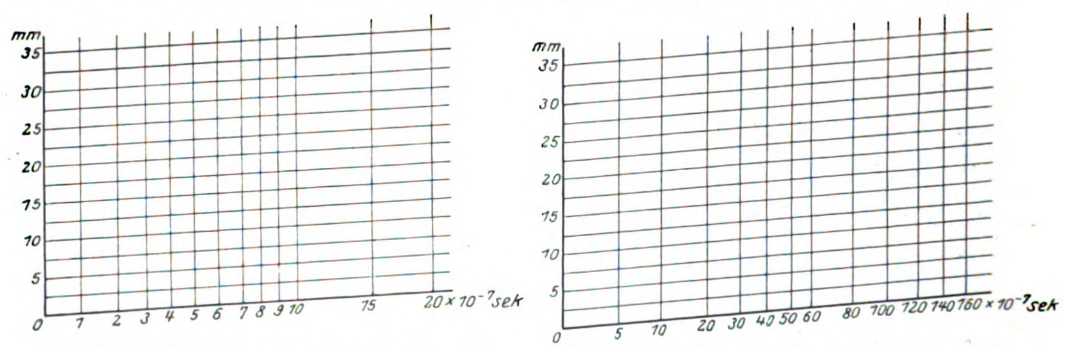


Bild 5. Meßblatt für die Zeitablenkung A. Bild 6. Meßblatt für die Zeitablenkung C.

ständig abgelaufen war, die erste Rechteckwelle ist bedeutend breiter, als es der Hauptablenkung entsprechen würde. Ein derartiges Auseinanderziehen des Schwingungsanfanges gestattet, auch bei der langsamsten Zeitablenkung noch die Vorgänge in den ersten 10^{-7} sec gut zu erkennen.

Bei den gezeigten Oszillogrammen scheint die Spannung im Laufe der Zeitablenkung zu steigen, bzw. sich auf einen steigenden Spannungswert einzuspielen. Die scheinbare Spannungserhöhung wird durch eine Verdrehung der Zeitachse hervorgerufen. Diese bildet mit der Spannungsachse keinen rechten Winkel, sondern

ist ihr um so mehr zugedreht, je langsamer die Zeitablenkgeschwindigkeit ist. Für gleiche Ablenkgeschwindigkeit ist die Verdrehung stets gleich groß [1]. Bild 5 und 6 zeigen zwei aus entsprechenden Oszillogrammen ermittelte Meßblätter für eine rasche und eine langsame Zeitablenkung (Ablenkung *A* und *C* des Bildes 4). Sämtliche Oszillogramme der vorliegenden Arbeit sind mit diesen bzw. derartigen Meßblättern ausgewertet worden.

Bei den gezeigten Meßblättern ist eine Abweichung noch unberücksichtigt geblieben, die aus Bild 7 hervorgeht. Anscheinend durch elektromagnetische Beeinflussung zeigt die Nullinie in der ersten Welle eine kleine Verlagerung nach unten, die bei einer Spannungsauswertung in dieser Zeit berücksichtigt werden muß [2].

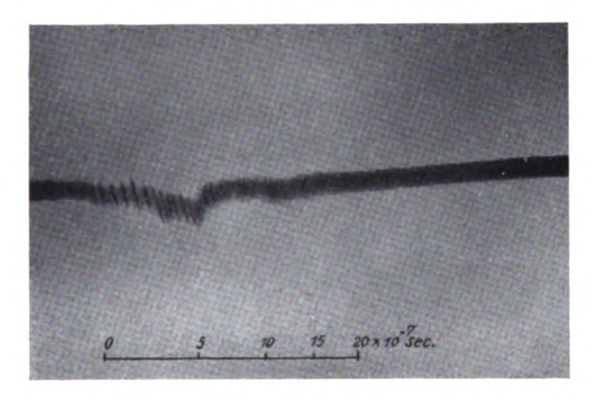


Bild 7. Null-Linie.

Als Schaltspannung — für Prüfspannung und Zeitablenkung gemeinsam — wurden etwa 5 kV benutzt. Die für verschiedene Untersuchungen notwendige Änderung der Prüfspannung zwischen 1 und 10 kV wurde durch entsprechende Schaltung der Freileitung erzielt (offen, Widerstandüberbrückung oder Widerstandteilung am Ende, bzw. Anfang der Doppelleitung).

III. Ableiterschutzvorrichtungen.

1. Widerstandableiter. Der Widerstandableiter, aus dem gewöhnlichen Blitzableiter entwickelt, ist wohl die älteste und auch heute noch die verbreitetste Überspannungschutzvorrichtung. Trotz seiner langjährigen Verwendung und Entwicklung in und durch den praktischen Betrieb stellt er eine keineswegs vollkommene Schutzeinrichtung dar. Es liegt dies an den verschiedenartigen und zum Teil einander widersprechenden Betriebsbedingungen, denen der Widerstandableiter zu genügen hat. Während der Ansprechzeit soll er möglichst viel Energie abführen, dabei Ausgleichschwingungen vermeiden und kurz nach Verschwinden der Überspannung die Ableiterbahn störungsfrei unterbrechen. Die Schwierigkeiten der Betriebstromunterbrechung, die weder durch die Ausbildung der Funkenstreckenelektroden zu Hörnern, noch durch die Benutzung magnetischer Gebläse beseitigt werden konnten, führten zum Einbau von Dämpfungswiderständen, deren Höhe (bis zu mehreren hunderttausend Ohm) zunächst praktisch jegliche Spannungsabsenkung durch den Ableiter verhinderte. Später hat man sich dann wieder auf die eigentliche Aufgabe des Ableiters besonnen und seinen Dämpfungswiderstand immer mehr verkleinert, neuerdings teilweise bis fast auf die Höhe des durchschnittlichen Wellenwiderstandes von Freileitungen herabgedrückt.

[1] Bei neueren Oszillographenausführungen des Instituts wurde diese Verdrehung beseitigt. Hierüber wird später auch von anderer Seite berichtet werden. Die Auswertbarkeit der Oszillogramme wird jedoch durch diese Verdrehung nicht beeinflußt.

[2] Bei einer Reihe von Oszillogrammen, bei denen die Versuchsleitung in etwa 2 m Abstand vom Oszillographen endete, hat sich die Verlagerung nicht gezeigt.

Verwendet man einen dem Wellenwiderstand gleichen Dämpfungswiderstand, so wird dieser nach dem Ansprechen des Ableiters den Energieausgleich ohne jede Schwingungserscheinung herbeiführen [1]. Wenn man die Wirkungsweise des Dämpfungswiderstandes lediglich auf Grund der Energieverhältnisse, bzw. unter dem Gesichtspunkt des schwingungslosen Ansprechens beurteilt, so wäre mit dem angegebenen Widerstandverhältnis der günstigste Wirkungsgrad bzw. Schutzwert erzielt [2]. Wenn der Ableiter aber auch noch vor Überspannungen schützen soll, die die zulässige Spannung erheblich übertreffen, so müßte der Dämpfungswiderstand zweifellos noch stark unter den Wert des Wellenwiderstandes herabgedrückt werden.

Mit der Herabsetzung des Widerstandwertes steigen die Schwierigkeiten bei der Bewältigung des nachfolgenden Betriebstromes außerordentlich. Man hat deshalb verschiedentlich vorgeschlagen, als Dämpfungstrecke spannungsabhängige Widerstände zu benutzen, wie wir sie z. B. in den aus Graphitgemischen bestehenden

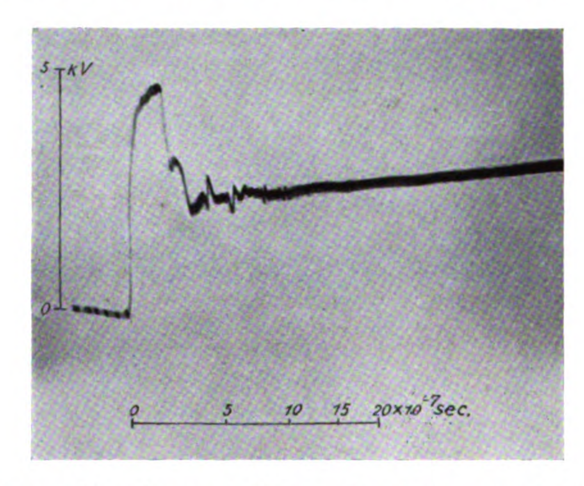


Bild 8. Funkenstrecke mit Dämpfungswiderstand gleich Wellenwiderstand am Leitungsende bei Sprungwellenbeanspruchung [3] 5 kV; geringe Überspannung.

Halbleiterwiderständen (Silit, Ozelit) besitzen [4]. Bei derartigen Widerständen würde die Restspannung mit steigender Überspannung nicht so stark wachsen wie bei unveränderlichen Widerständen. Die von Gabor vermutete Ventilwirkung [5] kann allerdings, wie noch gezeigt werden wird, von den spannungsabhängigen Widerständen nicht erwartet werden.

Ansprechvorgang der Funkenstrecke. Die Funkenstrecke hat bei einem Widerstandableiter im wesentlichen zwei Aufgaben zu erfüllen: Gewährleistung der Stromlosigkeit der Ableiterbahn vor dem Ansprechen des Ableiters und sofortiges Ansprechen beim Auftreten einer Überspannung. Die erste Aufgabe erfüllt die Funkenstrecke ohne Schwierigkeit, die zweite nur bedingt. Nach den im Aachener Elektrotechnischen Institut durchgeführten Untersuchungen mit dem Kathodenoszillographen muß besonders bei geringen Überspannungen mit einer gewissen Funken-

[1] Dies gilt übrigens nur für den an einem praktisch offenen Leitungsende eingebauten Ableiter (s. Abschnitt V).

[2] Siehe z. B. H. Piloty, ETZ 1927, S. 1755 und 1865 bzw. Fachberichte der XXXII. Jahresversammlung des V. D. E. 1927, S. 37 u. 38.

[3] Spannungsverlauf, wenn nichts anderes vermerkt, bei allen Oszillogrammen am Ende der Doppelleitung gemessen.

[4] Alberti und Güntherschulze, Zeitschr. f. Techn. Physik VI (1925), S. 11; ETZ 1927, S. 1272.

[5] D. Gabor, Forschungsheft 1 der Studiengesellschaft für Höchstspannungsanlagen, S. 72.

verzögerung gerechnet werden[1]. Bild 8 gibt den Ansprechvorgang an einem Widerstandableiter (Dämpfungswiderstand $R = Z$) wieder, wenn die ankommende Welle einen nur wenig höheren Wert hat als die statische Ansprechspannung der Funkenstrecke. Trotz Belichtung der Funkenstrecke ergibt sich hier eine Funkenverzögerung von etwa $2 \cdot 10^{-7}$ sec[2].

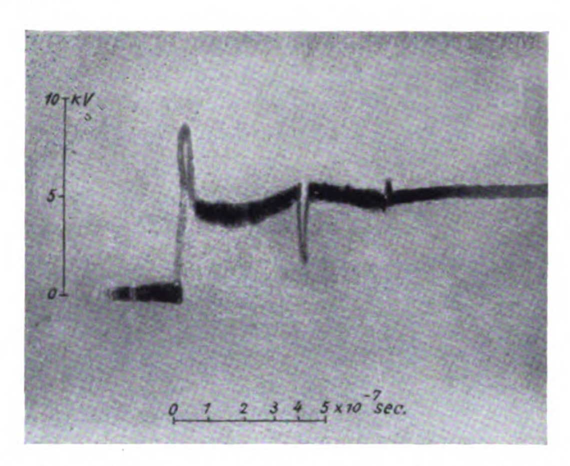


Bild 9 wie Bild 8, jedoch Beanspruchung durch Rechteckschwingung 10 kV und 60% Überspannung.

Bild 9 zeigt den Spannungsverlauf bei 60% Überspannung. Auch hier ist noch eine Spannungspitze vorhanden, die kurzzeitig fast den doppelten Spannungswert erreicht[3]. Bei beiden Oszillogrammen ist demnach ein merklicher Einfluß der Funkenverzögerung auf den Ansprechvorgang vorhanden. Je höher der Ableiterwiderstand

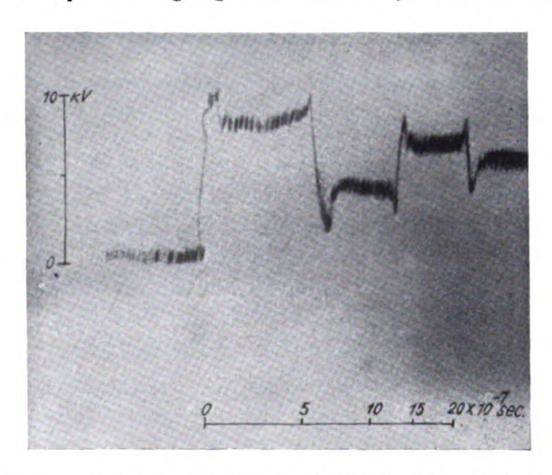


Bild 10 wie Bild 9, jedoch Dämpfungswiderstand gleich dem 4fachen Wellenwiderstand.

ist, desto geringer ist die Spannungsabsenkung nach Ansprechen des Ableiters. Entsprechend gering ist dann auch der Einfluß der Funkenverzögerung. Bild 10 läßt z. B. erkennen, daß bereits für $R = 4\,Z$ die Spannungspitze praktisch bedeutungslos geworden ist.

[1] Rogowski-Flegler-Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 479. — R. Tamm, Arch. f. Elektrotechnik, XIX (1928), S. 235. Über den Vergleich mit anderen Messungen siehe R. Tamm a. a. O.

[2] Bei unbelichteter Funkenstrecke kann die Verzögerung noch sehr viel größer werden.

[3] Bei dieser Aufnahme war die Funkenstrecke mit einer Rechteckschwingung beansprucht, daher rührt die nach $4 \cdot 10^{-7}$ sec erscheinende negative Spannungspitze.

Gegenüber den von Gabor an Widerstandableitern aufgenommenen Oszillogrammen[1] zeigen die hier wiedergegebenen gewisse Unterschiede. Gabor findet bei 10% Überspannung im allgemeinen keine Funkenverzögerung. Der für das Ansprechen von Funkenstrecken charakteristische Spannungsprung fehlt in seinen Oszillogrammen vollkommen. Dort, wo bei ihm trotz Ableiter zunächst praktisch die Maximalspannung erreicht wird, sinkt die Spannung erst „nach einer Dauer von 150 bis 200 m Lauflänge auf den mit der Theorie übereinstimmenden Wert". Ein derartig flaches Absinken der Spannung wurde bei den verschiedenen im Aachener Institut durchgeführten Untersuchungen niemals beobachtet.

Bild 11 gibt den Spannungsverlauf an einer Funkenstrecke ohne Dämpfungswiderstand bei Beanspruchung mit einer verhältnismäßig flachstirnigen Welle wieder. Hier zeigt sich wie in Bild 8 ein stufenweiser Zusammenbruch. Die in den beiden

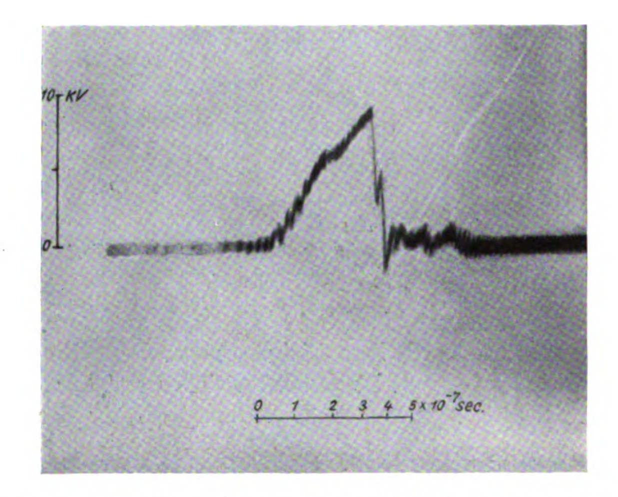


Bild 11. Funkenstrecke ohne Dämpfungswiderstand bei Beanspruchung mit flachstirniger Welle.

Stufen auftretende Steilheit überwiegt dabei ganz wesentlich die Steilheit der auslösenden Welle. Es muß also damit gerechnet werden, daß beim Ansprechen eines Widerstandableiters eine Entladewelle entsteht, deren Stirnsteilheit die der auslösenden Überspannungswelle stark übertrifft. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß die steilstirnige Entladewelle meistens unmittelbar an der zu schützenden Anlage hervorgerufen wird. Die Wirkung der Entladewelle ist in dieser Beziehung um so stärker, je geringer der Dämpfungswiderstand des Ableiters ist.

Dämpfungswiderstände aus Metall. Die in Widerstandableitern benützten Dämpfungswiderstände besitzen, soweit sie aus Metall bestehen, im allgemeinen eine recht beträchtliche Länge. Sie können in ihrer Wirkungsweise nicht ohne weiteres konzentrierten Widerständen gleichgesetzt werden. Jedoch zeigen Oszillogramme, die an derartigen Widerständen aufgenommen worden sind, daß sie im allgemeinen glücklicherweise nicht mit ihrer vollen Länge in Wirksamkeit treten. In Bild 12 ist der Spannungsverlauf an einem an das Leitungsende angeschlossenen Schniewindt-Widerstandband von 2500 Ohm aufgezeichnet (Kurve b). Die Drahtlänge betrug in diesem Falle etwa 600 m. Nach etwa $2 \cdot 10^{-7}$ sec (60 m Lauflänge) hat sich das Band bereits auf eine gleichbleibende Restspannung eingespielt. Aus dem Verhältnis dieser Restspannung zu der ebenfalls in Bild 12 aufgezeichneten Spannung am offenen Leitungsende (Kurve a) ergibt sich ein Widerstandwert von

[1] a. a. O.

etwa 2300 Ohm [1]. Das Schniewindtband hat demnach in der angegebenen kurzen Zeit tatsächlich bereits seinen Sollwiderstand erreicht.

Noch besser läßt sich die Wirkungsweise des Widerstandbandes erkennen, wenn es nicht mit einer Sprungwelle, sondern mit einer Rechteckschwingung beansprucht wird. In Bild 13 ist gleichzeitig der Spannungsverlauf am offenen Leitungsende (a) und an dem dort angeschlossenen Schniewindtband (b) eingetragen. Der Unterschied gegenüber der Wirkungsweise eines konzentrierten Widerstandes ist offensichtlich. Während dieser lediglich die Amplitude der Schwingung dämpft (siehe z. B. Bild 10 und 17) [2], findet bei dem Widerstandband noch eine Umbildung der Wellenform statt. Eine ähnliche Wirkung würde etwa eine Induktivität von 10^{-5} Henry mit entsprechendem Eigenwiderstand ausüben.

Aus den gezeigten Oszillogrammen ergibt sich deutlich, daß sich die Spannung am Widerstandband sehr viel rascher, als seiner Drahtlänge entspricht, auf den End-

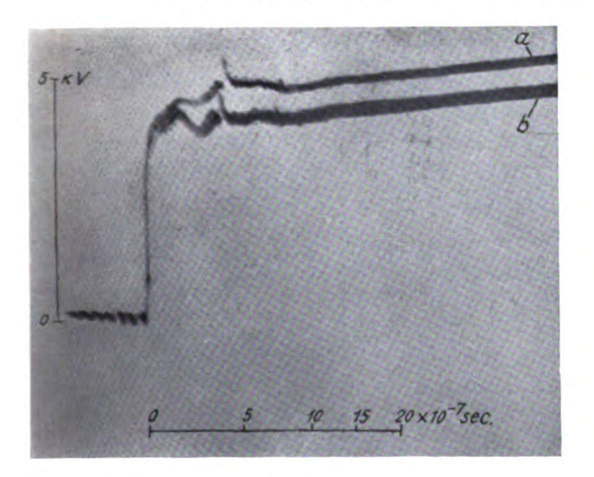


Bild 12. a Sprungwelle 5 kV nach Anordnung Bild 3a; b wie a, jedoch Leitungsende mit Schniewindtband 30 · 400 cm, 2500 Ohm, Drahtlänge 600 m überbrückt.

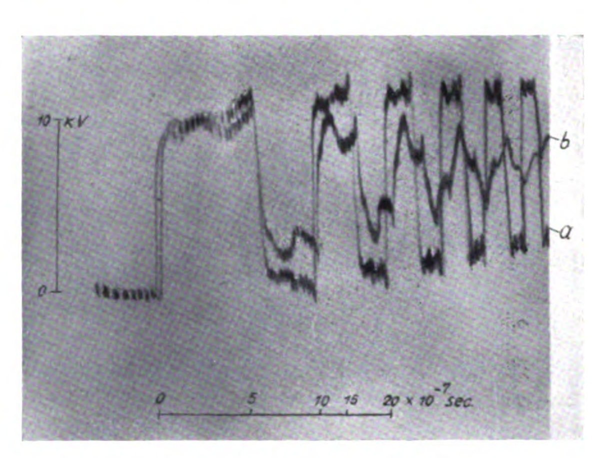


Bild 13. a Rechteckschwingung 10 kV; b wie a, jedoch Leitungsende mit Schniewindtband 30 · 400 cm, 2500 Ohm, Drahtlänge 600 m überbrückt.

wert einspielt. Diese Erscheinung läßt sich vielleicht so erklären, daß bei dem Eindringen der Spannungswelle in das Widerstandgitter durch Induzierung ein Vorgreifen des Stromes auf die folgenden Sprossen des Bandes stattfindet, ähnlich wie es Rogowski [3] für seine Spule mit mehreren Windungen angenommen hat.

Die bei dem Schniewindtband sich ergebende anfängliche Spannungsüberhöhung kann übrigens vermieden werden, wenn der Widerstanddraht als bifilare Spule geführt wird. Untersuchungen, über die in einer späteren Arbeit berichtet werden wird, haben gezeigt, daß man eine derartige Spule noch verhältnismäßig eng wickeln kann, ohne ihren Charakter als Doppelleitung zu gefährden. Soweit dieser Ausführung nicht Isolationschwierigkeiten entgegenstehen, wäre sie deshalb vielleicht der Drahtführung des Schniewindtbandes vorzuziehen.

Dämpfungswiderstände aus Halbleiterstoff. Durch die sehr eingehenden Untersuchungen von Alberti und Güntherschulze [4] ist bekannt geworden, daß das Silit und Ozelit die Eigenschaft besitzt, noch bei verhältnismäßig hohen

[1] Über die Bestimmung des Widerstandes aus dem Spannungsverhältnis s. weiter unten.
[2] Die von kurzen Widerständen herrührende Verschleifung der Wellenstirn ist sehr gering.
[3] W. Rogowski, Arch. f. Elektrot., VII (1919), S. 161.
[4] A. a. O. — Siehe auch Gewecke, ETZ 1914, S. 386.

Frequenzen (untersucht bis über 200 000 Hertz) seinen Widerstandwert stets unmittelbar im Takte der Schwingung zu ändern. Es lag deshalb nahe, sich von der Verwendung derartiger Widerstände eine erhebliche Verbesserung der Widerstandableiter zu versprechen. Es läßt sich aber zeigen, daß, wenigstens bei den zur Zeit verwendeten Halbleitern, keine wesentliche Vergrößerung der Spannungsabsenkung erwartet werden kann.

Ist die Spannungsabhängigkeit eines derartigen Widerstandes bekannt, so ist damit auch die Abhängigkeit der Restspannung von der Höhe der Überspannung bestimmt. Betrachten wir z. B. einen am Ende einer Doppelleitung eingebauten Widerstand, so ergibt sich die Restspannung aus der Beziehung

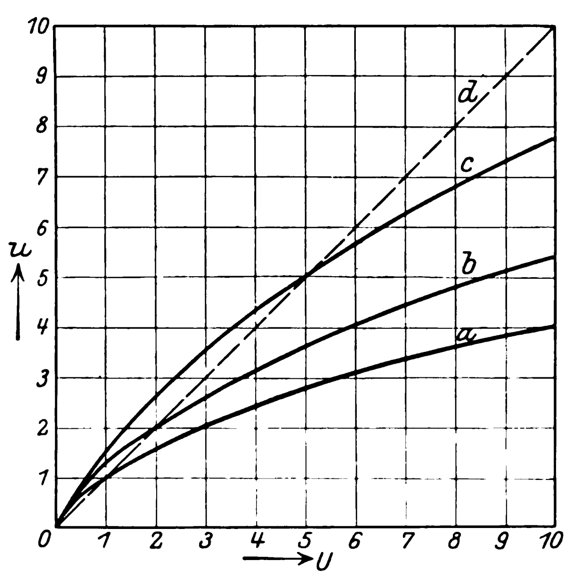


Bild 14. Verlauf der Restspannung u an Widerstandableitern in Abhängigkeit von der auftreffenden Spannung U bei Verwendung spannungsabhängiger Dämpfungswiderstände. Widerstandänderung: umgekehrt proportional der Restspannung. Widerstandsgröße: a für $u = 1$, $R = Z$; b für $u = 1$, $R = 2Z$; c für $u = 1$, $R = 5Z$; gestrichelte Kurve (d): Widerstand unabhängig von der Spannung $R = Z$.

$$u = 2\,U \frac{R}{Z + R},$$

wenn u die Restspannung, U die Spannung der ankommenden Welle, Z der Wellenwiderstand und R der angeschlossene Überbrückungswiderstand ist. Soll der Widerstand die von Alberti und Güntherschulze gefundene Abhängigkeit besitzen, so bedeutet das in dem angeführten Beispiel offenbar eine Abhängigkeit von der jeweils am Widerstand liegenden Spannung, also der Restspannung. Für die vorliegende Betrachtung sei zur Vereinfachung zunächst angenommen, zwischen Widerstand und Restspannung bestände die Beziehung

$$R = c \cdot u^m,$$

wobei m alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann. Für Restspannung und Überspannung ergibt sich dann folgende Beziehung

$$u^{1-m} + \frac{c}{Z} \cdot u = 2\,\frac{c}{Z} \cdot U.$$

Die Größe der Spannungsabsenkung erhält man aus dieser Gleichung durch Einsetzen der für die verschiedenen Spannungsabhängigkeiten gültigen Werte von m.



Ändert sich z. B. der Widerstand umgekehrt proportional der Spannung[1], so wird die Restspannung

$$u = \frac{c}{2Z}\left(\sqrt{8U \cdot \frac{Z}{c} + 1} - 1\right).$$

In Bild 14 ist die so ermittelte Restspannung für verschiedene Widerstandwerte eingetragen. Es ist dabei die jeweilige Betriebspannung als Spannungseinheit und der jeweilige Wellenwiderstand als Widerstandeinheit gewählt. Die Größe des Ableiterwiderstandes ist mit dem bei Betriebspannung geltenden Wert als Vielfaches des Wellenwiderstandes angegeben. Damit ist gleichzeitig ein Maß für die zu erwartende Abschaltleistung gewonnen.

Neben dem Restspannungsverlauf für die veränderlichen Widerstände ist in Bild 14 noch der Verlauf für einen unveränderlichen Ableiterwiderstand in Höhe des Wellenwiderstandes eingetragen. Der Vergleich der Kurven zeigt deutlich, daß eine wesentliche Verbesserung der Spannungsabsenkung nur erzielt werden kann, wenn der spannungsabhängige Widerstand bei Betriebspannung ($U = \lambda$) etwa den gleichen Wert hat wie der unveränderliche.

Durch Vergrößerung der Spannungsabhängigkeit würde auch eine entsprechend stärkere Spannungsabsenkung erzielt werden können. Eine Ventilwirkung kann jedoch niemals eintreten. Das Gleichbleiben der Restspannung bei steigender Überspannung setzt nämlich eine Vergrößerung des Ableiterstromes voraus. Da aber Silit und Ozelit nach allen bisherigen Untersuchungen zwar eine spannungsabhängige, jedoch steigende Widerstandcharakteristik besitzt, ist eine Vergrößerung des Ableiterstromes nur unter Vergrößerung der Restspannung möglich.

Für die Einschätzung der Schutzmöglichkeiten eines Widerstandableiters mit spannungsabhängigem Widerstand ist es wesentlich, die Größe der tatsächlichen Spannungsabhängigkeit zu kennen. Messungen hierüber sind zur Zeit nur sehr wenige bekannt. Die bereits erwähnten Untersuchungen von Alberti und Güntherschulze beziehen sich auf das Verhalten von Silit- und Ozelitstäben bei Gleichstrom und hochfrequentem Wechselstrom. Für Stoßbeanspruchung liegt eine Messung von Gabor[2] an einem Ozelitstab vor. Die starken Unterschiede, die Alberti und Güntherschulze für die Spannungsabhängigkeit verschiedener Stäbe gefunden hatten, gab Veranlassung, eine Reihe von Silit- und Ozelitstäben auf ihre Spannungsabhängigkeit bei Stoßbeanspruchung zu untersuchen.

Für Widerstände, deren Wert bei Stoßbeanspruchung in der Größenordnung des Wellenwiderstandes liegt, läßt sich dieser unmittelbar aus der Spannungsabsenkung bei Beanspruchung mit Sprungwellen ermitteln nach der Beziehung

$$R = Z \cdot \frac{u}{2U - u}.$$

Bei dem in Bild 11 gezeigten Spannungsverlauf an einem Schniewindtband ergibt sich z. B. aus dem Oszillogramm $2U$ zu 32 mm, u zu 27,5 mm und entsprechend bei einem Wellenwiderstand von 375 Ohm ein Endwiderstand von etwa 2300 Ohm.

Ist der zu untersuchende Widerstand sehr viel höher als der Wellenwiderstand, so wird er nur eine verhältnismäßig geringe Spannungsabsenkung hervorrufen. Die Auswertung aus der Sprungwellenbeanspruchung stößt hier auf Schwierigkeiten. Benützt man aber an Stelle der Sprungwelle eine Rechteckschwingung als Prüfspannung, so wiederholt sich die Einwirkung des Widerstandes bei jedem Aufstieg und Abstieg der Schwingung als Verminderung des Spannungsprunges. In Bild 15 ist die Verringerung des Spannungsprunges für die verschiedenen Aufstiege (1, 2, 3 . . .)

[1] Diese Abhängigkeit liegt für Silit und Ozelit in der in Ableitern verwendbaren Form und in dem untersuchten Bereich noch über dem Durchschnitt (s. weiter unten).

[2] Gabor, Forschungsheft 1 der Studiengesellschaft für Höchstspannungsanlagen S. 71. Auch der von Gabor untersuchte Ozelitstab besitzt eine geringere Spannungsabhängigkeit als in Bild 14 angenommen worden ist.

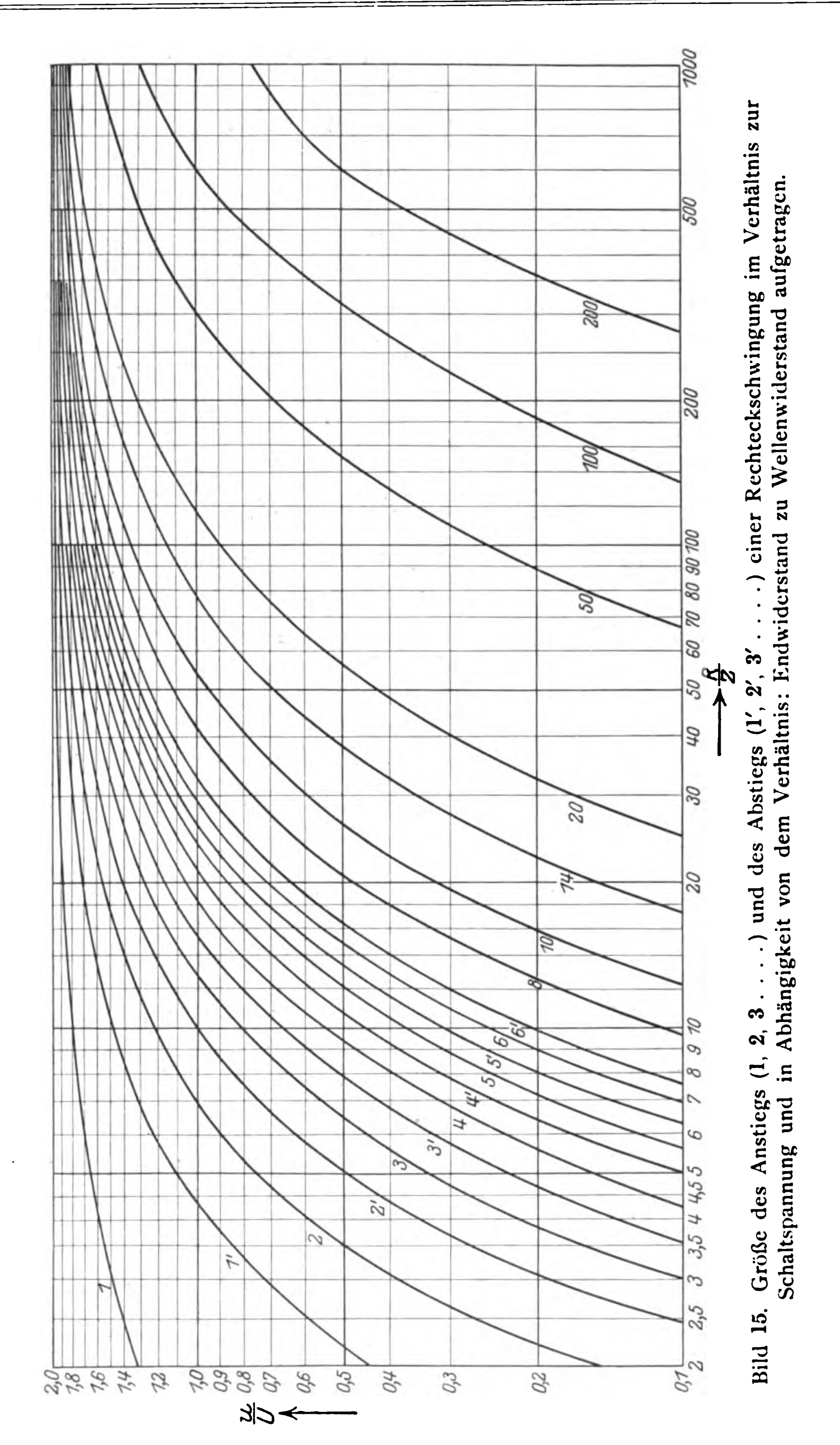


Bild 15. Größe des Anstiegs (1, 2, 3 . . . .) und des Abstiegs (1′, 2′, 3′ . . . .) einer Rechteckschwingung im Verhältnis zur Schaltspannung und in Abhängigkeit von dem Verhältnis: Endwiderstand zu Wellenwiderstand aufgetragen.

und Abstiege (1′, 2′, 3′ . . .) einer Rechteckschwingung in Abhängigkeit des Verhältnisses: Endwiderstand zu Wellenwiderstand aufgetragen[1]. Aus diesem Bild geht

[1] Die Höhe des jeweiligen Spannungsprunges ist stets auf die Schaltspannung bezogen. Für die Auswertung ist dies zweckmäßig, weil sich die Höhe der Schaltspannung am leichtesten festlegen läßt.

hervor, daß sich bei Berücksichtigung einer entsprechenden Zahl von Schwingungen mit genügender Genauigkeit noch Widerstände ermitteln lassen, die über 100 mal größer als der Wellenwiderstand sind.

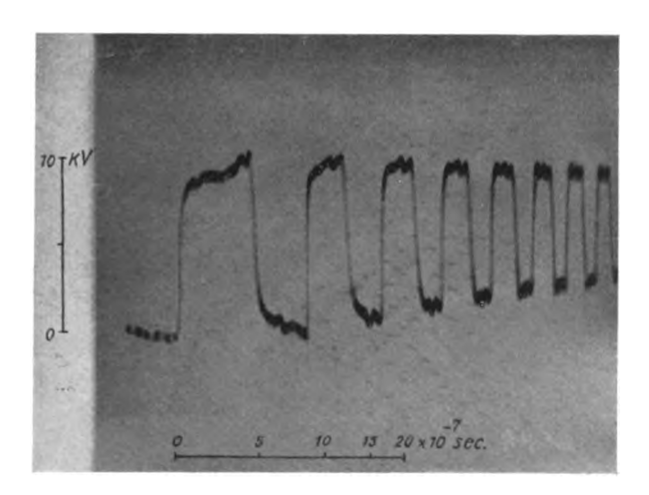


Bild 16. Silitwiderstand 10 Megohm (Sollwert bei 110 Volt), bei Beanspruchung durch Rechteckschwingung 10 kV.

Bild 16 stellt den Spannungsverlauf an einem Silitwiderstand (500 mm lang, 30 mm ∅) dar, dessen Sollwert 10 Megohm ist, und Bild 17 an einem Metallwiderstand von 7800 Ohm (Manganindraht von 0,03 mm ∅) dar. Die aus beiden Oszillogrammen ermittelten Widerstandwerte sind in Zahlentafel 1 eingetragen.

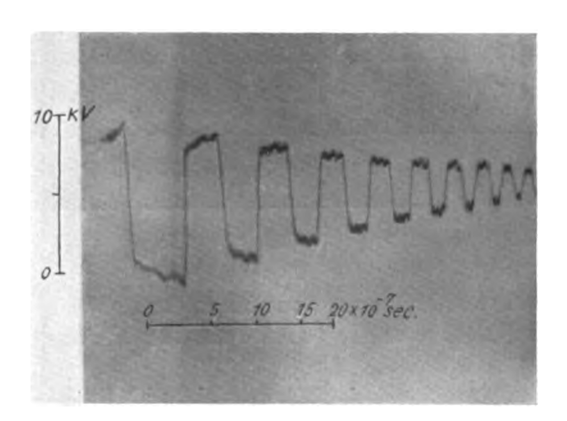


Bild 17. Manganindrahtwiderstand 7800 Ohm bei Beanspruchung durch Rechteckschwingung; Ausschnitt aus dem Spannungsverlauf.

Da die Prüfschwingung selbst eine gewisse Dämpfung besitzt (Bild 1), müssen die so ermittelten Werte noch berichtigt werden. Eine ideale Rechteckschwingung würde die in Bild 1 sich ergebende Dämpfung aufweisen, wenn sich am Leitungsende ein Überbrückungswiderstand von etwa 75 000 Ohm befände. Wir können also einen derartigen Widerstand stets in Parallelschaltung mit dem Prüfwiderstand befindlich denken und erhalten dann als berichtigte Werte:

Silitstab rund 30 000, Manganindrahtwiderstand rund 8000 Ohm. Die Übereinstimmung des für den Metallwiderstand gefundenen Wertes mit dem Sollwert zeigt

Zahlentafel 1.

Aufstieg Abstieg	1		2		3		4		5		6		8	Mittelwert[1]	
		1′		2′		3′		4′		5′		6′		R/Z	Ohm
Silitstab 10 Megohm	8,5	150	50	75	59	55	52	57	55	55	56	55	59	56	21 000
Manganin 7800 Ohm	22	22	37	23	25	19,9	20	20	20	18,5	18,5	19	19,5	19,5	7300

die für die vorliegenden Zwecke vollkommen genügende Genauigkeit des Meßverfahrens[2].

In der geschilderten Weise wurden nun etwa 20 Silit- und Ozelitstäbe untersucht, deren Sollwiderstand zwischen 500 und 20 000 Ohm lag. Bei den meisten Stäben änderte sich der Widerstand weniger als umgekehrt proportional der Spannung. Die stärkste von Alberti und Güntherschulze gefundene Abhängigkeit wurde in keinem Fall erreicht. Nach Mitteilung eines Herstellerwerkes könnte sie auch nicht erwartet werden, da die Spannungsabhängigkeit um so größer sein soll, je höher der Widerstand ist[3]. Bei den untersuchten Stäben lagen die bei 110 Volt festgestellten spezifischen Widerstände um etwa eine Größenordnung auseinander. Innerhalb dieses Bereichs konnte kein Zusammenhang zwischen der Spannungsabhängigkeit und der Größe des Widerstands festgestellt werden. Die stärkste Spannungsabhängigkeit ergab sich sogar bei einem Silitstab von 500 Ohm, dessen spezifischer Widerstand an der unteren Grenze des festgestellten Bereiches lag. Die Widerstandwerte für diesen Stab sind in Zahlentafel 2 aufgetragen.

Zahlentafel 2.
Silitstab; 60 mm lang, 18 mm ∅; Sollwert 500 Ohm.

Beanspruchung	Gleichstrom		Stoßbeanspruchung				
Prüfspannung	10	100	1670	2500	5000	10000	Volt
Restspannung (Mittelwert)	—	—	1050	1400	2000	2700	Volt
Widerstand[4]	680	550	640	480	250	140	Ohm

Soweit man aus diesen Messungen schließen darf, scheinen die Widerstandwerte bei Stoßbeanspruchung höher zu liegen als die für Gleichspannung gleicher Höhe geltenden Werte.

Im allgemeinen zeigte sich bei Stäben gleicher Abmessung und gleichen Sollwiderstandes eine starke Schwankung der Spannungsabhängigkeit. Das beeinträchtigt natürlich ihre Verwendungsfähigkeit für Widerstandableiter; denn wenn nicht für jeden Widerstand eine Eichkennlinie aufgenommen werden soll, darf aus Sicherheitsgründen nur mit einer verhältnismäßig geringen Spannungsabhängigkeit gerechnet werden.

[1] Infolge der kapazitiven Verzerrung der beiden ersten Wellen sind die daraus ermittelten Werte sehr ungenau. Sie sind zur Mittelwertbildung nicht herangezogen worden. Bei spannungsabhängigen Widerständen bezieht sich der Mittelwert auf die Schaltspannung.

[2] Bei der benutzten Schaltanordnung war die Dämpfung verhältnismäßig stark. Wo eine genauere Auswertung erwünscht ist, kann durch Änderung der Schaltanordnung deren Eigendämpfung erheblich vermindert werden.

[3] Siehe auch Gewecke a. a. O.

[4] Widerstandwerte für Gleichstrom aus Stromspannungsmessung gewonnen.

Nun war aber bereits in Bild 14 gezeigt worden, daß selbst für einen Widerstand, der eine stärkere Spannungsabhängigkeit besitzt als der hier ermittelte Durchschnitt, eine merkliche Verbesserung in der Spannungsabsenkung nur gegenüber denjenigen unveränderlichen Widerständen erzielt wird, die bei Betriebspannung gleiche Größe haben. Damit darf jedoch bei spannungsabhängigen Widerständen kaum gerechnet werden. Macht die Verringerung des Dämpfungswiderstandes schon bei Metallwiderständen Schwierigkeiten, so gilt das in noch verstärktem Maße für Silit- und Ozelitstäbe. Diese besitzen außer ihrer Spannungsabhängigkeit noch eine Temperaturabhängigkeit und führen deshalb bei starker Belastung leicht zu Explosionen.

Die hier angeführten Umstände bedingen, daß man von dem Einbau spannungsabhängiger Widerstände aus Halbleiterstoff in Widerstandableiter vorläufig keine wesentliche Verbesserung der Spannungsabsenkung erwarten darf, wenn nicht gleichzeitig die Betriebsicherheit in Mitleidenschaft gezogen werden soll.

2. Ventilableiter. Wenn sich in letzter Zeit in der Hochspannungspraxis das Bestreben geltend macht, Überspannungschutzvorrichtungen in den Verteilungsanlagen möglichst weitgehend zu vermeiden, so spricht das zweifellos nicht für die abnehmende Überspannungsgefahr, sondern lediglich für die wachsende Erkenntnis des geringen Schutzwertes der bis jetzt bekannten Schutzapparate. Der Widerstandableiter kann, wie bereits gezeigt wurde, die auftretenden Überspannungen jeweils nur um einen ganz bestimmten Bruchteil herabsetzen. Er wirkt also sozusagen als Spannungsteiler. Einen sicheren Überspannungschutz bietet aber nur der Spannungsbegrenzer. Man würde heutzutage wohl auch keine Stromsicherung mehr einbauen, die den Überstrom bestenfalls nur auf die Hälfte seines Wertes herabsetzt, selbst wenn dieser den zulässigen Höchststrom um ein Vielfaches überschreitet. Was wir bei der Stromsicherung verlangen und auch besitzen, dürfen wir auch von der Spannungsicherung fordern. Der Widerstandableiter scheint dafür kaum in Frage zu kommen. Viel größere Aussichten bieten die sog. Ventilableiter. Das wesentliche Kennzeichen dieser Ableiter ist die selbsttätige Unterbrechung der Ableiterbahn nach Verschwinden der Überspannung durch die Ventilstrecke selbst, also nicht durch besondere Relaisschaltungen. Die selbsttätige Löschung gestattet die Vermeidung von Dämpfungswiderständen in der Ableiterbahn. Die nach Ansprechen des Ableiters sich einstellende Rest- bzw. Sperrspannung kann deshalb stets unterhalb der Ansprechspannung liegen. Diese wird damit zur genau einstellbaren und gegebenenfalls für verschiedene Ableiter staffelbaren Grenzspannung.

Die bekanntesten Vertreter der Ventilableiter sind das Blitzventil der Westinghouse Electrical Company und der Oxydhautableiter der General Electric Company. Bei beiden ist allerdings in der betriebmäßigen Ausführung die Ansprechspannung so hoch gegenüber der Betriebspannung, daß Sommer und Gabor auf Grund ihrer Untersuchungen auch diesen Ableitern einen Schutzwert für Anlagen mit dem zur Zeit üblichen Sicherheitsgrad absprechen mußten[1]. Die Wirkungsweise der Ventilableiter ist dagegen von beiden nicht näher untersucht worden. Die Beantwortung der Frage, ob sie Spannungsteiler oder wirklich Spanunngsbegrenzer sind, steht daher noch aus. Ihre Klärung scheint aber nicht nur für die vollständige Beurteilung der untersuchten Ventilableiter wünschenswert, sie ist vielmehr für die Beurteilung der Entwicklungsmöglichkeit des gesamten Überspannungschutzes überhaupt von grundlegender Bedeutung.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnte die Wirkungsweise des Blitzventils sehr eingehend untersucht und dabei festgestellt werden, daß dieser Ableiter ganz ausgesprochen zu den Spannungsbegrenzern gehört.

[1] E. M. K. Sommer, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 326. — D. Gabor, Forschungshefte der Studiengesellschaft für Höchstspannungsanlagen, Heft 1, 1927, S. 74.



Die für die Untersuchung des Oxydhautableiters ebenfalls freundlichst zur Verfügung gestellten Zellen waren leider bis zum Abschluß dieser Arbeit noch nicht eingetroffen. Versuche, die an verschiedenen nachgebauten Zellen durchgeführt wurden, ergaben derart starke Unterschiede und Streuungen, daß sie zu einer Beurteilung dieses Ableiterschutzes nicht herangezogen werden sollen. Über die Untersuchung der Originalzellen wird seinerzeit noch berichtet werden.

Jedenfalls lassen bereits die folgenden Untersuchungen des Blitzventils erkennen, daß die Ventilableiter, wenn sie auch in ihrer jetzigen Form noch keinen überall brauchbaren Überspannungschutz abgeben, doch schon deutlich einen Weg zeigen, auf dem wir voraussichtlich zu einem wirklich sicheren Schutz gegen Spannungsüberhöhungen kommen werden.

Das Blitzventil (Autovalve Arrester). Der Aufbau des untersuchten Blitzventils ist in Bild 18 aufgezeichnet. Die Ventilstrecke besteht aus einer Reihe von Einzelfunkenstrecken (Löschfunkenstrecken). Elektrodenmasse, Elektrodenabstand und Anordnung sind so gewählt, daß Ansprechspannung und Löschspannung der Teilfunkenstrecken etwa gleich hoch sein und 350 Volt betragen sollen. Ansprechen und Löschen soll beim Auftreten bzw. Verschwinden der Überspannung ohne Verzögerung einsetzen. Da das Blitzventil jedoch noch eine Vorfunkenstrecke benützt, gilt für die Ansprechverzögerung dieses Ableiters zunächst dasselbe wie für die der Widerstandableiter.

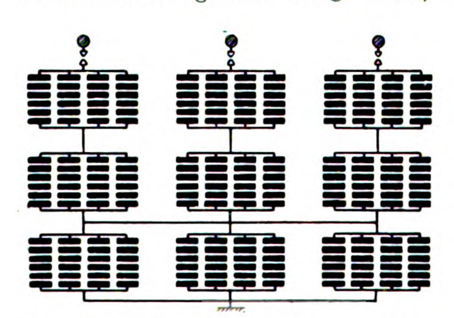


Bild 18. Schematischer Aufbau eines Blitzventils für 2,5 kV Betriebspannung.

Das untersuchte Blitzventil gilt für eine Betriebspannung von 2,5 kV. Sechs Elektroden sind zu einer Säule geschichtet und bilden so fünf Teilfunkenstrecken. Vier Säulen sind in einer Gruppe parallel geschaltet. Zwischen Phase und Erde liegen zwei solcher Gruppen hintereinander und mit diesen außerdem noch in Reihe eine Parallelschaltung von drei Gruppen. Zwischen Phase und Phase liegen vier Gruppen hintereinander. Der Widerstand einer Elektrode soll etwa 2 Ohm betragen, so daß selbst bei hohen Betriebspannungen der Gesamtwiderstand aller hintereinander geschalteten Teilfunkenstrecken nicht ins Gewicht fallen dürfte.

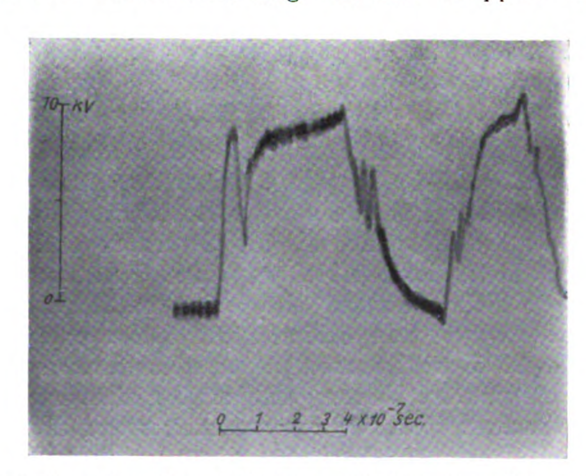


Bild 19. Blitzventil in betriebmäßiger Schaltung zwischen einer Phase und Erdpunkt durch Rechteckschwingung 10 kV beansprucht.

Die Soll-Ansprechspannung beträgt zwischen Phase und Erde 5,25 kV, zwischen Phase und Phase 7 kV. Durch die vorschriftsmäßig eingestellte Vorfunkenstrecke wird die Ansprechspannung nicht unbeträchtlich erhöht, da deren statische Durchschlagspannung allein schon bei etwa 7 kV liegt. Es kann wohl damit gerechnet werden, daß sich die ankommende Überspannungswelle fast in voller Höhe an die Vorfunkenstrecke mit ihrer kleinen Kapazität legt. Immerhin wird sich die Ansprechspannung auf etwa 7,5 kV zwischen Phase und Erde und 15 kV zwischen Phase und Phase

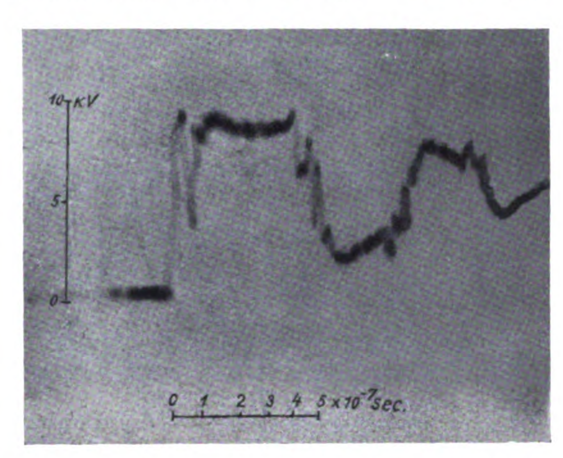


Bild 20 wie Bild 19, jedoch nur $^2/_3$ der betriebmäßigen Teilfunkenstrecken.

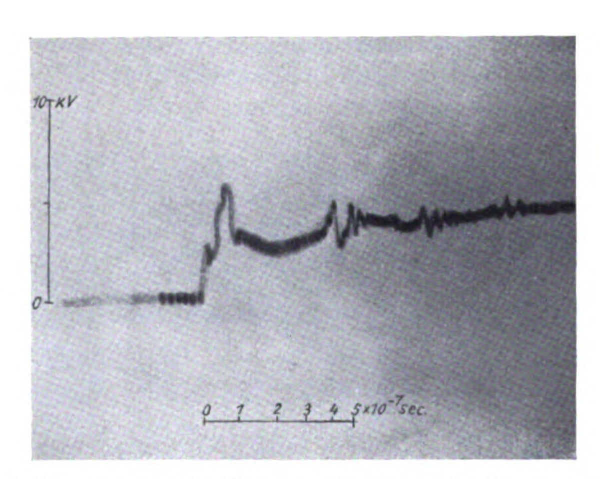


Bild 21 wie Bild 19, jedoch nur $^1/_3$ der betriebmäßigen Teilfunkenstrecken und ohne Vorfunkenstrecke.

erhöhen. Während die Sollansprechspannung ohne Vorfunkenstrecke das 2,5 bzw. 2fache der Betriebspannung beträgt, erhöht sie sich also mit dieser, selbst unter Annahme günstiger Verhältnisse, auf das $3,5 \div 4$fache.

Das Vorhandensein der Vorfunkenstrecke hat für das Blitzventil noch einen anderen Nachteil. Bis zum Durchschlag der Vorfunkenstrecke liegt praktisch keine Spannung an den Teilfunkenstrecken. Die Ansprechverzögerungszeiten beider Funkenstrecken müssen sich demnach addieren. Das in Bild 19 gebrachte Oszillogramm zeigt einen derartigen Spannungsverlauf. Das Blitzventil ist hier in betriebsmäßiger Schaltung zwischen Phase und Erde mit Rechteckwellen von 10 kV Höhe geprüft worden. Die Prüfspannung steigt auf ihre volle Höhe an, ehe die Vorfunkenstrecke anspricht. Sofort nach deren Durchschlag legt sie sich an die Teilfunkenstrecken

(das Absinken der Spannung entspricht der größeren Kapazität der Teilfunkenstrecken) und steigt dann entsprechend deren Kapazität wieder hoch. Es zeigt sich aber, daß die Teilfunkenstrecken auch nach Überschreiten ihrer Solldurchschlagspannung nicht ansprechen. Nach $4 \cdot 10^{-7}$ sec kommt bereits die Entladewelle wieder an das Leitungsende (Rechteckschwingung), ohne daß sich bis dahin die Spannung an den Teilfunkenstrecken merklich geändert hat. Der weitere Verlauf der Schwingung ergibt eine Umbildung der Rechteckform, wie sie etwa durch kleine Kapazitäten (50 cm)

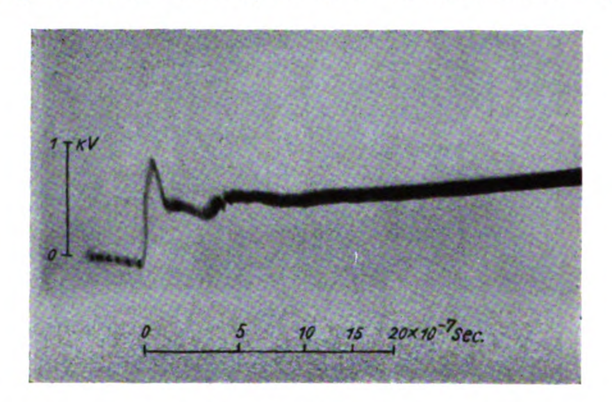


Bild 22. Blitzventil, eine einzelne Teilfunkenstrecke durch Sprungwelle 5 kV beansprucht.

am Ende einer Freileitung hervorgerufen werden. Hieraus kann geschlossen werden, daß die Teilfunkenstrecken des Blitzventils innerhalb der untersuchten Zeit von rund $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec nicht angesprochen haben.

Verringert man die Zahl der Teilfunkenstrecken auf $^2/_3$, so ändert sich bereits der Spannungsverlauf etwas (Bild 20). Die neben der Umbildung in Erscheinung

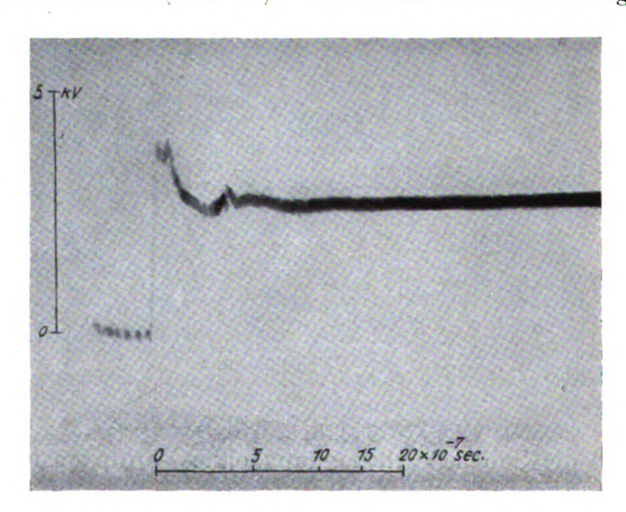


Bild 23 wie Bild 22, jedoch 4 Teilfunkenstrecken.

tretende Amplitudenverminderung läßt darauf schließen, daß die Teilfunkenstrecken jetzt angesprochen haben, aber noch einen verhältnismäßig hohen Widerstand darstellen. Erst wenn die Zellenzahl noch weiter vermindert wird, verschwindet die Rechteckform. Den Spannungsverlauf für $^1/_3$ der betriebmäßigen, also im ganzen nur noch fünf Teilfunkenstrecken zeigt Bild 21. Auch bei dieser Aufnahme ergibt sich noch eine Restspannung, die die erwartete Funkenspannung selbst unter Zurechnung des Ohmschen Spannungsabfalles in den Widerstandelektroden weit übertrifft.

Um die Ursachen für dieses Verhalten der Teilfunkenstrecken zu ermitteln, wurde zunächst nur eine einzelne bei Sprungwellenbeanspruchung untersucht. Bild 22 zeigt den Ansprechvorgang bei 5 kV Prüfspannung, der für die Wirkungsweise der Teilfunkenstrecken kennzeichnend ist. Im Augenblick des Auftreffens der Sprungwelle erscheint eine kurze Spannungsspitze. Hierauf sinkt die Spannung auf eine praktisch gleichbleibende Sperrspannung[1]. Die Spannungspitze scheint eine Wirkung der Funkenverzögerung zu sein, die übrigens in allen beobachteten Fällen kleiner war als die Verzögerung von gewöhnlichen Luftfunkenstrecken unter sonst gleichen Verhältnissen.

Bild 23 zeigt den Ansprechvorgang für 4 Zellen bei der gleichen Prüfspannung. Der allgemeine Spannungsverlauf hat sich gegenüber Bild 22 nicht wesentlich geändert. Auch hier sehen wir zunächst eine Spannungspitze vor dem Einspielen auf eine gleichbleibende Sperrspannung. Trotz der geringen Überspannung hat sich die

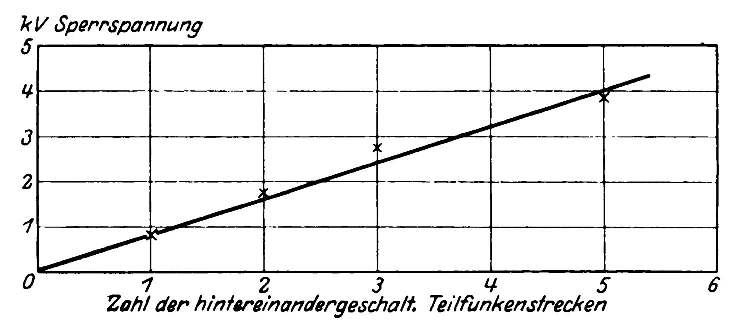


Bild 24. Sperrspannung am Blitzventil bei Beanspruchung durch Sprungwelle 5 kV in Abhängigkeit von der Zahl der hintereinander geschalteten Teilfunkenstrecken aufgetragen.

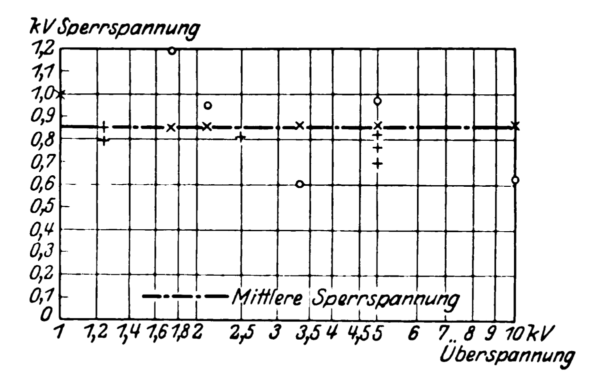


Bild 25. Sperrspannung an einer Teilfunkenstrecke des Blitzventils bei Beanspruchung durch verschieden hohe Überspannungen.

Spannungspitze kaum verbreitert. Die Sperrspannung, die sich bereits nach etwa 10^{-7} sec einstellt, ist jetzt entsprechend der größeren Zahl der Teilfunkenstrecken höher geworden. Tragen wir die Höhe der Sperrspannung in Abhängigkeit von der Zahl der Teilfunkenstrecken auf (Bild 24), so zeigt sich, daß sie ungefähr proportional mit der Zellenzahl steigt.

Wesentlicher für die Beurteilung der Wirkungsweise des Blitzventils ist das Verhalten einer Teilfunkenstrecke gegenüber verschieden hoher Prüfspannung. In Bild 25 ist die Sperrspannung für eine einzelne Teilfunkenstrecke bei steigender Prüfspannung aufgetragen. Trotz der starken Erhöhung von 1 auf 10 kV ändert sich die

[1] Die Abweichungen in dem Verlauf der Sperrspannung entsprechen denen der Nulllinie nach Bild 6.

Sperrspannung praktisch nicht[1]. Aus den zahlreichen aufgenommenen Punkten ergibt sich eine mittlere Sperrspannung von etwa 0,85 kV. Nur wenige Werte weichen stärker ab. Der höchste beobachtete Wert beträgt 1,2, der niedrigste 0,6 kV. Die Versuchsreihe zeigt demnach, daß das Blitzventil bis zum zehnfachen Wert seiner tatsächlichen Ansprechspannung seine Eigenschaft als Spannungsbegrenzer durchaus behält. Es ist anzunehmen, daß sich die Verhältnisse auch bei noch höheren Überspannungen je Teilfunkenstrecke nicht wesentlich ändern. Diese haben aber für das Blitzventil als Überspannungschutz keine praktische Bedeutung mehr.

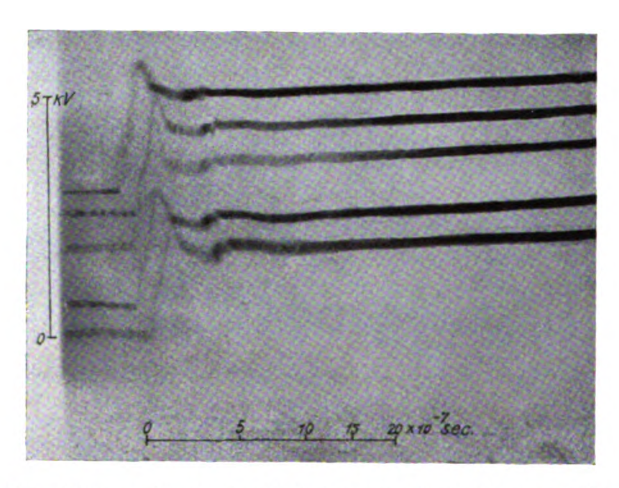


Bild 26. Fünf 3zellige Blitzventile in Parallelschaltung, durch Sprungwelle 5 kV beansprucht. Fünf Aufnahmen in etwa 5 ÷ 10 sec hintereinander auf dieselbe Platte aufgenommen.

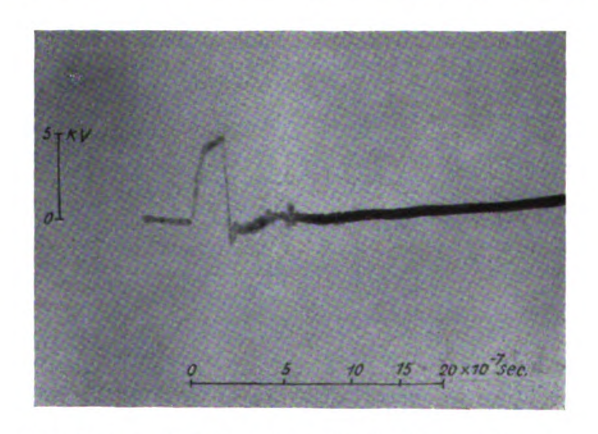


Bild 27 wie Bild 22, jedoch Elektroden aus Kupfer.

Auch durch Parallelschalten von Teilfunkenstrecken ändert sich die Höhe der Sperrspannung nicht. In Bild 26 ist der Spannungsverlauf an fünf parallel geschalteten dreizelligen Blitzventilen, wie sie für Niederspannungsanlagen auf den

[1] Sommer findet auch bei dem Blitzventil eine mit steigender Überspannung wachsende Sperrspannung (a. a. O. S. 320). Es ist möglich, daß sich seine Ergebnisse nur auf die anfängliche Spannungspitze beziehen, die aber durch geeignete Mittel (s. Bild 28) wirkungslos gemacht werden kann. Auch daß Sommer eine Änderung der Spannungsabsenkung bei Benutzung von Vorfunkenstrecken findet, läßt darauf schließen, daß er mit der Schleifenmethode nur die erste Spannungspitze und nicht die eigentliche Sperrspannung gemessen hat. Diese kann in ihrer Höhe durch die Vorfunkenstrecke nicht beeinflußt werden. Die Messungen Gabors am Blitzventil lassen keine Schlüsse auf die Beziehung zwischen Sperrspannung und Überspannung zu.

Markt gebracht werden, aufgezeichnet. Die Sperrspannung ist auch hier rund 0,8 kV je Teilfunkenstrecke. Beachtenswert ist dabei die trotz Parallelschaltung geringe Streuung. Die 5 Oszillogramme sind in Abständen von je etwa 5 ÷ 10 sec auf dieselbe Platte aufgenommen worden [1]. Die größte Abweichung vom Mittel beträgt etwa $\pm 5\%$. Die Meßpunkte in Bild 25 hatten eine sehr viel größere Streuung ergeben, die wohl im wesentlichen auf Ungleichmäßigkeiten der verschiedenen benutzten Teilfunkenstrecken (Abstand, Elektrodenoberfläche) zurückzuführen ist.

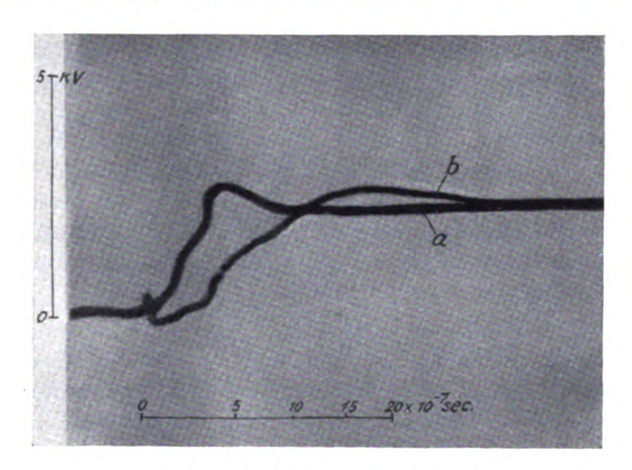


Bild 28. Spannungsverlauf an der Parallelschaltung Blitzventil-Kondensator bei Beanspruchung durch Sprungwelle 5 kV. a 3 zelliges Blitzventil und 1000 cm Parallelkapazität; b 3 zelliges Blitzventil und 5000 cm Parallelkapazität.

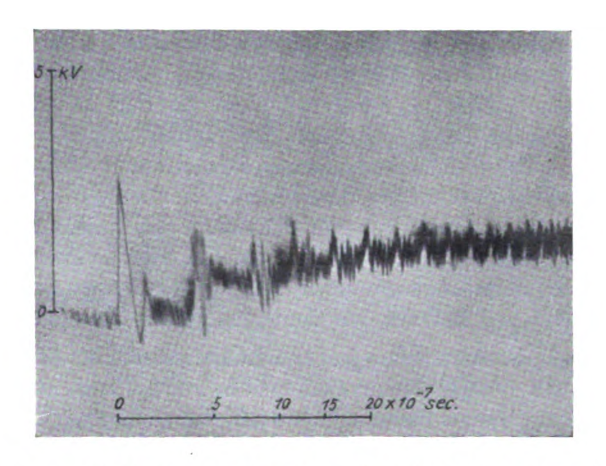


Bild 29. Blitzventil, eine Teilfunkenstrecke durch Rechteckschwingung 10 kV beansprucht.

Es läßt sich leicht zeigen, daß für den Verlauf des Ansprechvorganges bei dem Blitzventil die Zusammensetzung der Elektrodenmasse von ausschlaggebender Bedeutung ist. Ersetzt man z. B. die Elektroden durch einfache Kupferscheiben, so ergibt sich ein wesentlich anderer Spannungsverlauf (Bild 27). Wir sehen zwei bezeichnende Unterschiede gegenüber Bild 23. Einmal ist bei den Kupferzellen die Funkenverzögerung größer. Außerdem sinkt die Spannung nach Ansprechen der Funkenstrecken sofort auf sehr geringe Werte (Bogenspannung der Kupferfunkenstrecken) ab.

[1] Die Kurven sind der Deutlichkeit halber gegeneinander durch statische Felder verlagert.

Wenn auch, wie bereits erwähnt, die Funkenverzögerung bei den Blitzventilzellen kleiner als bei den gewöhnlichen Funkenstreckenableitern zu sein pflegt[1], so kann es doch auch hier zweckmäßig sein, die Spannungspitze zu vermeiden und gleichzeitig die Wellenstirn abzuflachen. Das läßt sich bei Funkenstreckenableitern bekanntlich durch Parallelschaltung von Kondensatoren erreichen[2]. Bild 28 zeigt die Wirkung einer derartigen Anordnung für das Blitzventil. Es ist hier eine Kapazität von 1000 bzw. 5000 cm parallel geschaltet. Die Spannungspitze, wie sie die Oszillogramme Bild 22 und 23 noch zeigen, ist hier verschwunden. Die Spannung steigt um so langsamer, je größer die Parallelkapazität ist, und geht dann praktisch unmittelbar in die Sperrspannung über. Eine derartige Schutzanordnung läßt stets nur flachstirnige Wellen an sich vorbeiziehen, deren Maximalspannung der Sperrspannung der Ventilstrecke entspricht. Besonders bemerkenswert bei dieser Anordnung ist, daß hier selbst bei der Begrenzung höchster Überspannungen beim Ansprechen niemals ein Spannungsprung oder ein Ausschwingvorgang eintritt. Die Parallelschaltung Widerstandableiter-Kondensator besitzt diesen Vorzug nicht. Aber auch das mit Vorfunkenstrecke ausgerüstete Blitzventil kann in gewissen Fällen beim Ansprechen Spannungsprünge aufweisen (Bild 19 u. 20).

Eine wenn auch sehr geringe und flache Spannungsüberhöhung tritt in Bild 28 aber auch bei der größeren Kapazität noch auf. Es könnte das als eine gewisse Stromabhängigkeit der Ventilzellen gedeutet werden. Aus den vorher angeführten Versuchen hatte sie sich nicht ergeben. So ändert sich z. B. bei den in Bild 24 aufgetragenen Sperrspannungen der durch das Blitzventil abgeleitete Strom zwischen 3 und 10 Amp., bei Bild 25 zwischen 1 und 25 Amp., ohne daß eine merkliche Einwirkung auf die Sperrspannung festgestellt werden konnte. Sie müßte demnach erst für höhere Stromstärken wirksam werden.

Um die Größe und Art dieser Stromabhängigkeit genauer festzustellen, wurde noch ein weiterer Versuch durchgeführt. Es wurde eine einzelne Teilfunkenstrecke einer Beanspruchung durch eine Rechteckschwingung unterworfen, deren Höhe die Sperrspannung um ein Vielfaches übertraf. Die an das Leitungsende gelangende Prüfspannung bricht unter entsprechender Stromerhöhung auf die Sperrspannung zusammen. Der durch die Teilfunkenstrecke abzuleitende Strom muß also bei Ankunft der Schaltwelle jeweils etwa um die Höhe des Anfangstromes steigen (Treppenkurve). Bild 29 zeigt den Spannungsverlauf an einer Teilfunkenstrecke bei einer derartigen Beanspruchung. Die außerordentliche Steilheit der ankommenden Spannungswelle[3] ergibt auch eine entsprechend hohe Anfangspannungspitze. Die sich danach einstellende Sperrspannung beträgt in dem gezeigten Beispiel nur etwa 0,6 kV.

Bei den folgenden Stromsteigerungen erhöht sich auch die Sperrspannung im Takte der Einschaltschwingung, wenigstens anfänglich. Am Ende der Beobachtungszeit fängt die Sperrspannung bereits wieder an abzusinken. Eine gewisse Stromabhängigkeit der Sperrspannung scheint demnach tatsächlich zu bestehen. Jedoch zeigt ein Vergleich zwischen Stromsteigerung und Erhöhung der Sperrspannung (Bild 30), daß diese Abhängigkeit verhältnismäßig gering ist. Während der Strom von rund 25 auf über 200 Amp., also auf über das Achtfache steigt, erhöht sich die Sperrspannung von 0,6 auf etwa 1,1 kV, also auf nicht ganz das Doppelte. Es ist dabei übrigens beachtenswert, daß ein Blitzventil mit einem Ableiterstrom von 200 Amp. in der Lage ist, bereits mit einer einzigen Säule bei einer Leitung mit einem Wellenwiderstand von 500 Ohm eine Spannungsabsenkung von 100 kV hervorzurufen. Bei Blitzventilen

[1] Dieser Vorteil gilt natürlich nicht mehr für das mit Vorfunkenstrecke ausgerüstete Blitzventil.

[2] Vgl. z. B. Gabor, Forsch.-Heft S. 70.

[3] Die Steilheit der Rechteckschwingung ist bedeutend größer als die der Sprungwelle, wenn diese durch Anfangswiderstände hervorgerufen wird.



für Mittelspannungsnetze sind meist mehrere Säulen parallel geschaltet, hier kann also unter sonst gleichen Verhältnissen ein entsprechend stärkerer Ableiterstrom fließen.

In Bild 30 ist außer der Sperrspannung und dem Ableiterstrom noch die Spannung des am Leitungsanfang liegenden, als Spannungsquelle benutzten Kondensators eingezeichnet. Die Höhe der jeweilig in die Leitung einziehenden Spannungswelle ist demnach auch dann noch höher als die Sperrspannung, wenn diese bereits abzusinken beginnt. Es ist deshalb anzunehmen, daß die Verringerung der Sperrspannung durch Erwärmung oder eine entsprechende Strombelastungserscheinung hervorgerufen wird und daß sich bei genügender Dauer der Überspannung allmählich die für Niederfrequenz geltende Sperr-, bzw. Löschspannung ergibt[1].

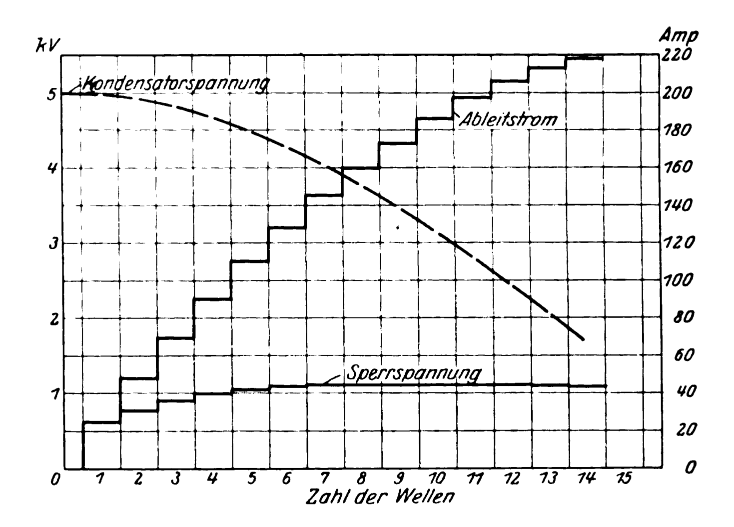


Bild 30. Verlauf des Ableiterstromes und der Sperrspannung einer Teilfunkenstrecke bei Beanspruchung nach Bild 29, sowie Spannungsverlauf an der Spannungsquelle (Kondensator).

Versuche bei Niederfrequenz haben ergeben, daß auch hier die Löschspannung unterhalb der Ansprechspannung liegen kann. Es wurden Werte bis herab zu 180 Volt festgestellt. Berücksichtigt man, daß die mit 860 Volt ermittelte mittlere Sperrspannung sich durch Streuung oder Stromabhängigkeit noch erhöhen kann, so muß daraus gefolgert werden, daß die Ansprechspannung des Blitzventils, die etwa das 5÷7fache der Betriebspannung beträgt, nicht mehr wesentlich herabgesetzt werden kann, wenn man mit Sicherheit auf ein selbsttätiges Löschen nach Verschwinden der Überspannung rechnen will. Die rasche Unterbrechung des Ableiterstromes ist aber schon deshalb notwendig, weil das Blitzventil seiner ganzen Bau- und Wirkungsweise nach nur eine sehr kurzzeitige Belastung ertragen kann. Es kommt deshalb in seiner jetzigen Form nur für Anlagen in Betracht, deren Isolationszustand noch einem Vielfachen der Betriebspannung als Überspannung gewachsen ist. Hier müßte das Blitzventil eine außerordentlich günstige Wirkungsweise zeigen. Geringe, besonders von Schaltvorgängen herrührende Überspannungen können sich, ohne Schaden

[1] Es liegt die Vermutung nahe, daß die Sperrspannung auch vor ihrem Absinken bereits durch die Strombelastungserscheinung beeinflußt worden ist. Würde der Ableiterstrom bereits beim Ansprechen den in Bild 30 angegebenen Endwert besitzen, so müßte sich eine anfängliche Spannungsüberhöhung, ähnlich wie in Bild 28 ergeben. Dahingehende Versuche haben gezeigt, daß die Überhöhung bei 200 Amp. Anfangstrom etwa 50% beträgt und bereits nach 10^{-7} sec abgeklungen ist.

anzurichten, in der Anlage austoben, während der Überspannungschutz nur bei schweren Störungen in Tätigkeit tritt und in diesem Falle die Anlage mit Sicherheit vor Spannungsüberhöhungen bewahrt.

IV. Abflacherschutzvorrichtungen.

Die hauptsächlichsten und bekanntesten Vertreter dieser Gruppe von Überspannungschutzvorrichtungen sind Spule und Kondensator. Beide haben bereits als Schutzmittel Verwendung gefunden, ehe man etwas über die Gefährlichkeit steilstirniger Wanderwellen wußte. Seit dem Bekanntwerden der Arbeiten K. W. Wagners über die Ausgleichvorgänge in Leitungen[1] werden diese Schutzvorrichtungen zum Abflachen von Wellenstirnen benutzt. Ihre Abmessungen sind auf diesen Verwendungszweck zugeschnitten.

Ob die steile Stirn wirklich die Gefährlichkeit für Spulenwicklungen besitzt, die man ihr zuschreibt, kann heute nicht mit Sicherheit gesagt werden. Wir besitzen bereits eine Reihe theoretischer und experimenteller Belege, daß Transformatorschäden ebensogut durch hochfrequente Schwingungen hervorgerufen werden können. Rogowski[2] hat vor einer Reihe von Jahren darauf hingewiesen, daß bei Einschaltvorgängen einer Spule oder bei Beanspruchungen durch hochfrequente Wechselströme hohe Spannungsbeanspruchungen auftreten können, und zwar infolge von Resonanz der aufgezwungenen Schwingung mit den Eigenschwingungen der Spule (Eigenschwingungen zweiter Art). Bestätigt wurden die Berechnungen Rogowskis durch die Untersuchungen von Rogowski-Flegler-Tamm[3] für die einlagige Spule und diejenige von J. Fallou[4] für den Transformator.

In letzter Zeit hat man sich besonders in Frankreich mit der Frage der Gefährlichkeit von Wellenstirnen befaßt[5]. In fast allen Arbeiten kommt in mehr oder weniger ausgeprägter, wenn auch nicht immer überzeugender Form die Auffassung zum Ausdruck, daß nicht die Steilheit eines einmaligen Spannungsprunges, sondern vielmehr die angeregten Schwingungen die wesentlichere Gefahrenquelle darstellen.

Die Vermutung Maudits, daß bei einem einmaligen Spannungsprung die zur Einleitung des Durchschlags nötige Energie fehle, kann allerdings durch die Untersuchungen von Durchschlagvorgängen mit dem Kathodenoszillographen[3] als widerlegt gelten. Dagegen besteht durchaus die Möglichkeit, daß die Durchschlagverzögerung in vielen Fällen eine Gefährdung von Spulen verhindert. Wenn auch die Spannungsverteilung in einer Spule um so ungünstiger wird, je größer die Steilheit des Spannungsprunges ist, so sinkt doch auch gleichzeitig die Beanspruchungszeit. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Durchschlagverzögerung, daß die Durchschlaggefahr nicht ohne weiteres mit der Steilheit auftreffender Wanderwellen anzusteigen braucht. Eine Entscheidung hierüber wird erst nach genauer Kenntnis der Durchschlagverzögerungszeiten der verschiedenen Isolierstoffe möglich sein.

Die steile Stirn tritt nicht nur bei einmaligen Spannungsprüngen (Sprungwellen) auf. Rechteckschwingungen, durch Schaltvorgänge oder Isolatordurchschläge eingeleitet, können noch nach Ablauf vieler Wellen eine erhebliche Steilheit des

[1] K. W. Wagner, Elektromagnet. Ausgleichvorgänge in Freileitungen und Kabeln, Leipzig 1908; ETZ 1908, S. 707; E. u. M. 1915, S. 89.

[2] W. Rogowski, Arch. f. Elektrot., VI (1918), S. 377, VII (1919), S. 240.

[3] Rogowski, Flegler und Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 479.

[4] J. Fallou, Bull. Soc. Franç. des Electr. 1926, p. 237, 1245 u. 1275; Rev. Gén. de l'Electr., XX (1926), p. 772, XXI (1927), p. 853.

[5] P. Bunet, Bull. Soc. Franç. des Electr. 1922, p. 229, 1924, p. 877; Rev. Gén. de l'Electr., XX (1926), p. 772, XXII (1927), p. 305. — Marchand, Rev. Gén. de l'Electr., XIII (1923), p. 1079, XX (1926), p. 772; Bull. Soc. Franç. des Electr. 1926, p. 1270. — Maudit, Bull. Soc. Franç. des Electr. 1925, p. 1060; Rev. Gén. de l'Electr., XX (1926), p. 209. — Fallou, a. a. O.

Spannungsanstieges aufweisen (Bild 1)[1]. Trifft eine derartige Schwingung auf eine Spule, so wiederholt sich die ungünstige Beanspruchung in einer verhältnismäßig geringen Zeitspanne und kann unter Umständen auch dort noch zu einem Durchschlag bzw. Überschlag führen, wo bei einem einmaligen Spannungsprung gleicher Stirnsteilheit die Zeit hierfür fehlt. Die Rechteckschwingung kann demnach auch ohne Annahme von Resonanzerscheinungen die Sprungwelle an Gefährlichkeit übertreffen, und dies um so mehr, je höher die Frequenz der Rechteckschwingung ist[2].

Solange wir nicht wissen, welche von den verschiedenen Beanspruchungsmöglichkeiten für eine Transformatorenwicklung die größte Gefahr in sich birgt, kann auch über den Wert der Stirnabflachung ein abschließendes Urteil nicht gefällt werden. Immerhin können wir bereits heute die Wirkungsweise der vorhandenen Schutzvorrichtungen klären und den Grad der durch sie erreichten Stirnabflachung, sowie ihren Einfluß auf den Verlauf der Klemmenspannung der zu schützenden Wicklung feststellen.

1. Schutzkondensatoren. Die abflachende Wirkung von Kondensatoren besteht bekanntlich darin, daß sie für auftreffende Wanderwellen zunächst wie ein Kurzschluß wirken und sich erst allmählich auf Spannung aufladen. Bei unmittelbar

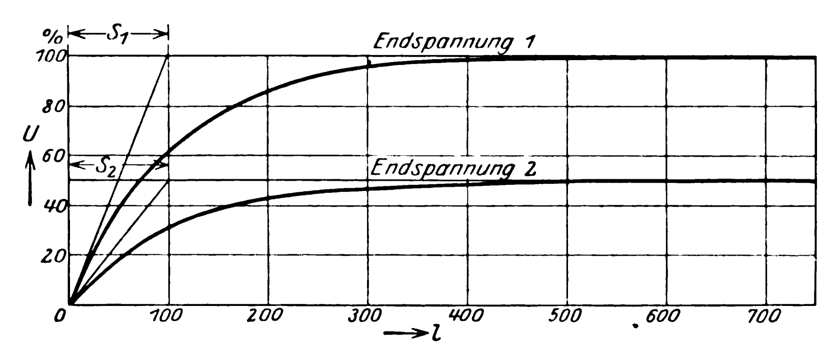


Bild 31. Umbildung einer Rechteckwelle durch einen Schutzkondensator bei verschieden hoher Wellenspannung.

an die Leitung angeschlossenen Kondensatoren gibt die Spannungskurve des Kondensators die Form der in der Leitung weiterziehenden Welle wieder. Die Steilheit der umgebildeten Welle hängt bei gleichem Wellenwiderstand der Leitung nicht nur von der Größe des Schutzkondensators, sondern auch von der Höhe der ankommenden Welle ab.

Bild 31 veranschaulicht den Einfluß der Wellenspannung. Die ankommende Welle soll Rechteckform besitzen. Die Stirn der neuen Welle steigt dann nach einer Exponentialfunktion an. Je höher die Endspannung ist, desto steiler ist auch der Verlauf der Exponentialkurve.

Es ist üblich, die Steilheit einer Welle aus dem Stirnteil mit dem stärksten Spannungsanstieg zu ermitteln, in dem gezeigten Beispiel also aus dem Kurvenanfang. Sinngemäß ergibt sich jeweils die Stirnlänge einer Welle (Bild 31)[3]. Diese ist unabhängig von der Höhe der Wellenspannung. Die Angabe der Stirnlänge bietet

[1] Siehe auch Rogowski-Flegler-Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 486, Bild 15. Auf die ungünstige Wirkung von Isolatordurchschlägen hat bereits Petersen (ETZ 1914, S. 205) hingewiesen.

[2] Rechteckwelle (endlicher Länge) und Stoßwelle (s. Abschnitt II) stehen in dieser Beziehung zwischen Sprungwelle und Rechteckschwingung.

[3] In Übereinstimmung mit der Zeitkonstante des zeitlichen Spannungsverlaufes nennt K. W. Wagner die Stirnlänge bei Exponentialverlauf „Raumkonstante" (ETZ 1916, S. 426).

deshalb gewisse Vorteile gegenüber der Angabe der Steilheit. Vielfach benutzt man auch beim Vergleich verschiedener Schutzapparate die durch sie bewirkte verhältnismäßige Steilheitverminderung oder Stirnlängenvergrößerung, unter Voraussetzung einer endlichen Steilheit bzw. Stirnlänge der ankommenden Welle. Beide sind aber von der Stirnform der Ursprungswelle abhängig. Die Welle in Bild **33** wird durch den gleich großen Kondensator zwar auf eine größere Stirnlänge umgebildet als die Welle in Bild **32**. Die Änderung der Stirnlänge ist jedoch offensichtlich geringer

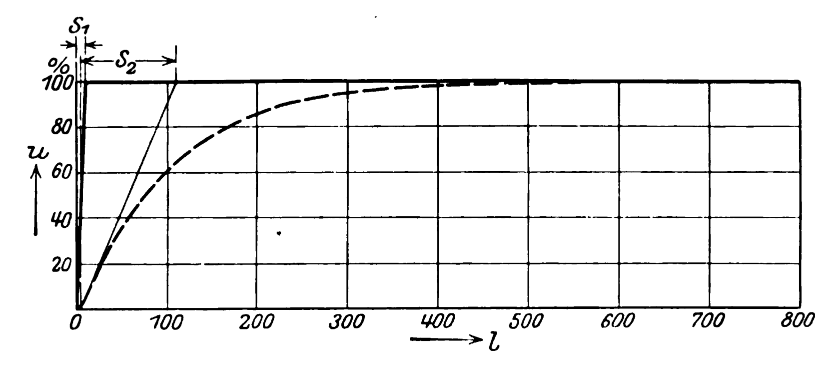


Bild **32**. Umbildung einer steilstirnigen Welle durch einen Schutzkondensator.

geworden. Die Angabe der verhältnismäßigen Steilheit- oder der Stirnlängenänderung setzt demnach immer die Kenntnis der Stirn der Ursprungswelle voraus und dies um so mehr, je geringer die Änderung der Stirn durch den Schutzkondensator ist.

Von einer wirksamen Abflacherschutzvorrichtung sollte man stets eine kräftige Umbildung der Wellenstirn erwarten. Hier kann aber, wie Bild **32** deutlich macht, mit ausreichender Annäherung die Rechteckwelle als Ursprungsform vorausgesetzt werden, bei der dann einfach die Stirnlänge der umgebildeten Welle das allgemeingültige Maß für die abflächende Wirkung ist.

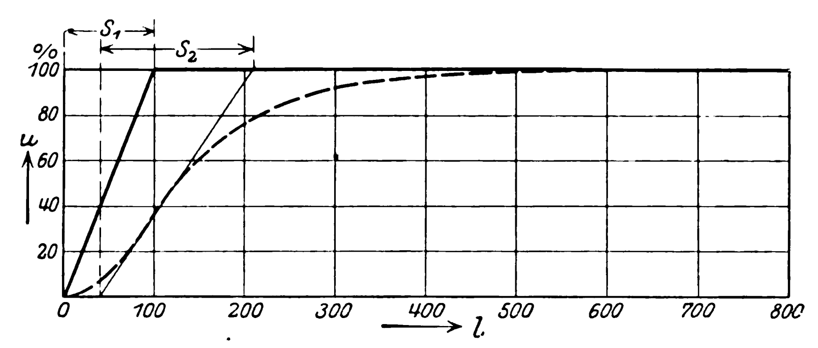


Bild **33**. Umbildung einer flachstirnigen Welle durch einen Schutzkondensator.

Ist der Schutzkondensator nicht unmittelbar an die Leitung angeschlossen, so kann seine Wirkung erheblich beeinträchtigt werden, insbesondere wenn in die Zuleitung noch Widerstände zur Unterdrückung mittelfrequenter Schwingungen eingeschaltet sind. Bild **34** zeigt den Spannungsverlauf am Ende einer Freileitung, an der ein Hartpapierkondensator von etwa 1500 cm angeschlossen ist. Die Länge des Kondensators (1 m) bedingt eine entsprechende Zuleitung. Man erkennt im Oszillogramm bereits deutlich die Wirkung dieser Leitungslängen. Die Spannung bricht nicht sofort zusammen, sondern es zeigt sich zuvor noch eine Spannungspitze mit ursprünglicher Steilheit.

Bei dem in Bild 35 gezeigten Oszillogramm liegt zwischen Leitung und Kondensator ein Widerstand in Höhe des Wellenwiderstandes. Der Spannungsanstieg am Kondensator ist entsprechend flacher geworden (Aufladung über Z und R). An der Leitung bewirkt aber der Widerstand vor Beginn der Schutzwirkung noch einen Spannungsprung, der in dem gezeigten Beispiel gerade die Höhe der ankommenden Welle erreicht. Hier kann man schon kaum mehr von einer Abflachung sprechen.

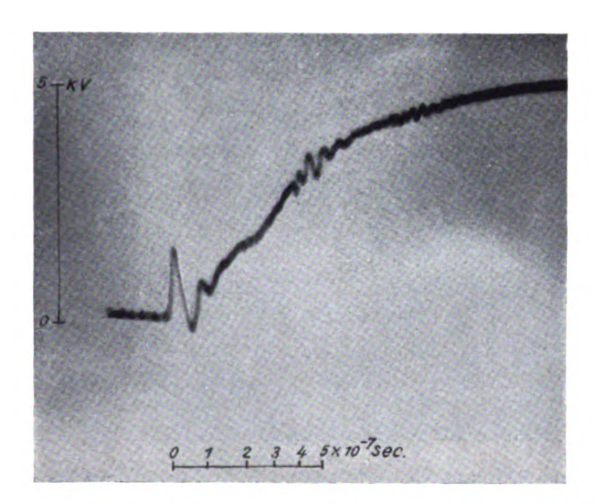


Bild 34. Umbildung einer Sprungwelle 5 kV durch einen mit kurzer Zuleitung an die Leitung angeschlossenen Kondensator von 1500 cm Kapazität.

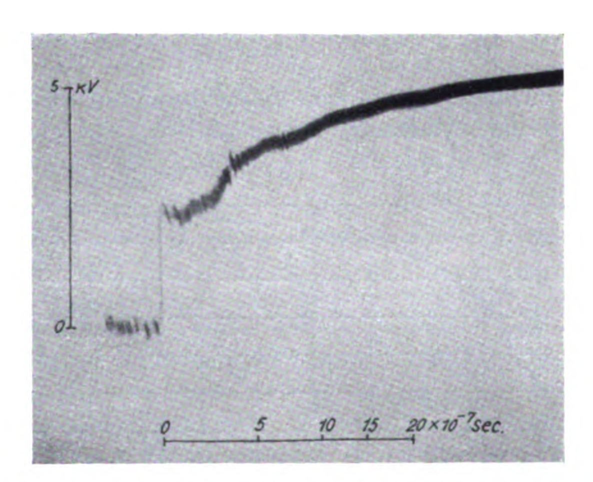


Bild 35 wie Bild 34, jedoch in die Zuleitung ein dem Wellenwiderstand gleicher Ohmscher Widerstand eingeschaltet.

Ein gewisses Maß von Abflachung erreicht man in Freileitungsanlagen bekanntlich, wenn man das letzte Leitungstück als Kabel verlegt. Bild 36 veranschaulicht die Wirkung einer derartigen Anordnung. Das an die Doppelleitung angeschaltete, 7 m lange Kabel bewirkt ein allmähliches Ansteigen der Spannung in Sprüngen, deren Höhe sich aus dem Verhältnis der Wellenwiderstände Freileitung/Kabel ergibt. Je größer dieses Verhältnis und die Kabellänge ist, desto stärker wird die Abflachung.

Für die Wirkungsweise von Schutzkondensatoren ist es wesentlich, daß sie auch bei kurzzeitiger Beanspruchung als konzentrierte Kapazität wirken. Besonders bei Hartpapierkondensatoren konnte dies in Zweifel gezogen werden. Es wurden deshalb

verschiedene Hartpapierkondensatoren auf ihre wirksame Kapazität bei Sprungwellenbeanspruchung untersucht. Bild 37 gibt den entzerrten Spannungsverlauf des in Bild 34 gezeigten Oszillogramms wieder. Da die Prüfspannung mit genügender Annäherung eine Rechteckwelle war, mußte der Verlauf der Kondensatorspannung einer Exponentialfunktion entsprechen. Es ergibt sich jedoch zunächst ein steilerer Spannungsanstieg [1]. Die wirksame Kapazität ist hier also kleiner (1100 cm). Nach nicht ganz

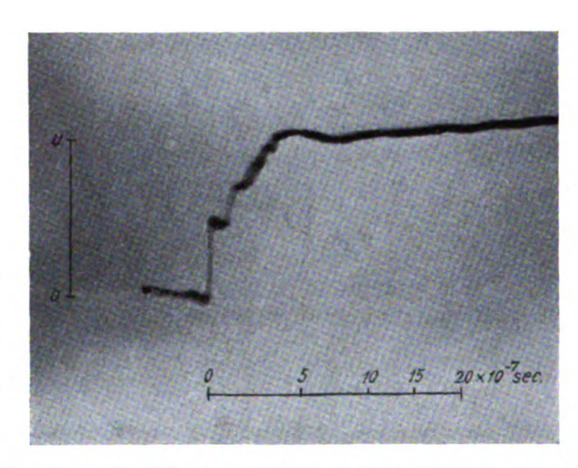


Bild 36. Umbildung einer Sprungwelle durch ein an die Freileitung geschaltetes Kabel von 7 m Länge. Spannungsverlauf am Kabelende.

10^{-6} sec ergibt sich dann wieder gute Übereinstimmung mit den angegebenen Werten von 1500 cm. Es zeigt sich also tatsächlich eine Veränderung der Kapazität um etwa $20 \div 30\,\%$.

Im Gegensatz zu den Hartpapierkondensatoren ergaben Glaskondensatoren (Schottsche Minosplattenverdichter) eine praktisch stets gleich große Kapazität

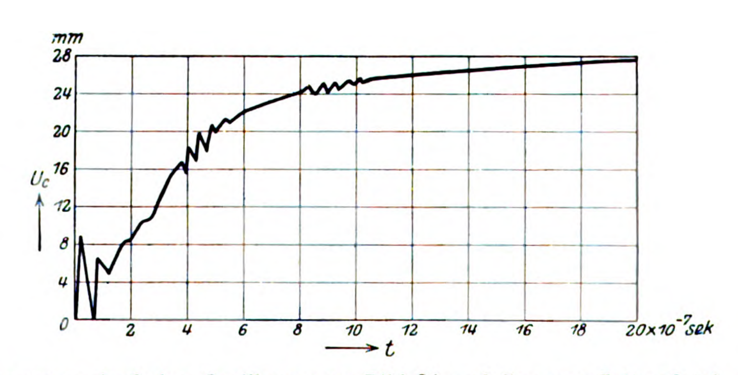


Bild 37. Spannungsverlauf des Oszillogramms Bild 34 auf linearen Zeitmaßstab umgezeichnet.

(Bild 38). Die Glaskondensatoren waren sehr viel kürzer als die Hartpapierkondensatoren. Entsprechend ist auch bei gleicher Zuleitungslänge die Spannungspitze kleiner geworden. Sie ist hier praktisch nur noch eine Wirkung der Zuleitung.

2. Schutzspulen. Für die Bestimmung der abflachenden Wirkung von Schutzspulen gilt sinngemäß das gleiche wie für Kondensatoren. Auch bei Spulen kann die Verwendung von Ohmschen (Überbrückungs-) Widerständen die abflachende

[1] Der Kurvenanfang mit der Spannungspitze ist bei der Auswertung nicht berücksichtigt.

Wirkung in Frage stellen. Böhm hat seinerzeit[1] gezeigt, daß es zweckmäßig ist, derartige Überbrückungswiderstände zur Unterdrückung einer Schwingung zwischen Schutzspule und Eingangskapazität des Transformators zu benutzen. Wenn diese Widerstände auch mit Sicherheit jede Schwingung im Eingangskreis unterdrücken[2], so wird doch gleichzeitig wieder die Schutzwirkung der Spule beeinträchtigt, da über

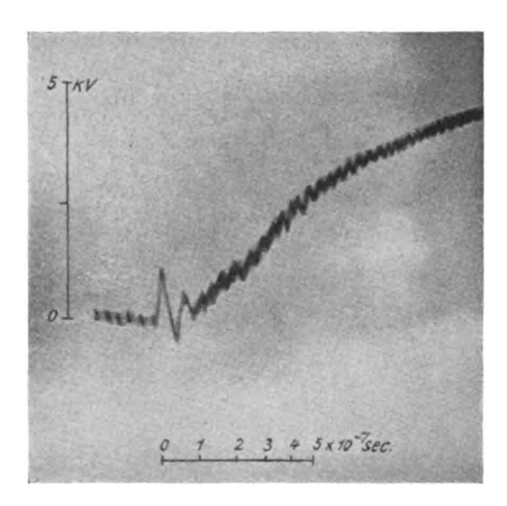


Bild 38 wie Bild 34, jedoch Glaskondensator 1500 cm.

den Widerstand im ersten Augenblick ein Teil der Sprungwelle mit ursprünglicher Steilheit auf den Transformator trifft. Die Höhe dieser Sprungwelle ergibt sich zu

$$U_2 = 2\,U_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + R},$$

wobei U_1 die auf die Spule auftreffende Sprungwelle, U_2 den auf den Transformator auftreffenden Wellenteil[3], Z_1 den Wellenwiderstand der Leitung vor der Schutzspule, Z_2 den Wellenwiderstand der Leitung zwischen Spule und Transformator und R

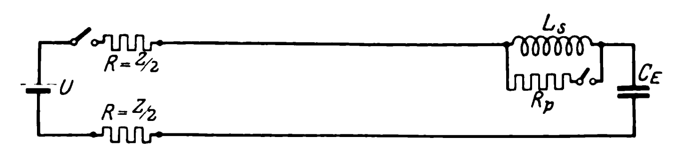


Bild 39. Schaltanordnung zur Prüfung der Überbrückungswiderstände von Schutzspulen.

den Überbrückungswiderstand darstellt. Nehmen wir zunächst $Z_1 = Z_2$ an, so wird der Wellenteil U_2 für $R = Z$ noch $^2/_3$ und für $R = 6Z$ noch $^1/_4$ der Wellenspannung U_1 betragen. Je größer der Überbrückungswiderstand innerhalb der von Böhm angegebenen Grenze gewählt wird, desto geringer wird demnach die Teilwelle. Man kann deren Höhe aber auch, wie die Gleichung zeigt, dadurch herabdrücken, daß man den Wellenwiderstand der Zwischenleitung (Z_2) klein macht gegenüber Z_1. Für $Z_2 = 0{,}1\ Z_1$ (Kabel) und $R = Z_1$ würde dann die Teilwelle bereits auf $^1/_{10}$, für $R = 6Z_1$ sogar auf etwa $^1/_{35}$ der ankommenden Welle herabgedrückt. Die Spannung am Transformator verläuft dann in ähnlicher Weise, wie für die Anordnung Freileitung/Kabel in Bild 36 gezeigt worden ist.

[1] O. Böhm, Arch. f. Elektrot., V (1917), S. 382.
[2] D. Gabor, El. Wirtsch. 1926, S. 307.
[3] Die Klemmenspannung am Transformator ergibt entsprechend der Reflektion erhöhte Werte.

Man kann als Überbrückungswiderstände von Spulen außer Metallwiderständen auch Silit- oder Ozelitstäbe benutzen. Hier macht jedoch die Bestimmung des Grenzwiderstandes gewisse Schwierigkeiten, da sich der wirksame Widerstand als Mittelwert aus der jeweiligen Spannungsbeanspruchung ergibt. Die folgenden Oszillogramme lassen die Einwirkung von Silitstäben auf die Eingangschwingung erkennen. Bild 39 zeigt die benutzte Schaltanordnung. Am Ende einer Doppelleitung von 375 Ohm Wellenwiderstand liegt eine Siemens-Flachdrosselspule von etwa 4 MH in Reihe mit

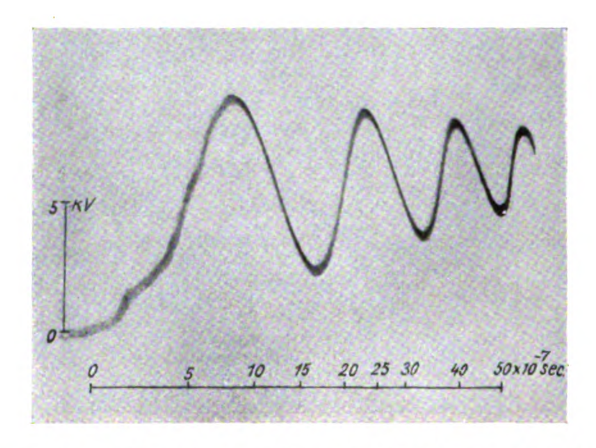


Bild 40. Spannungsverlauf am Kondensator C_E nach Anordnung Bild 39 bei unüberbrückter Spule.

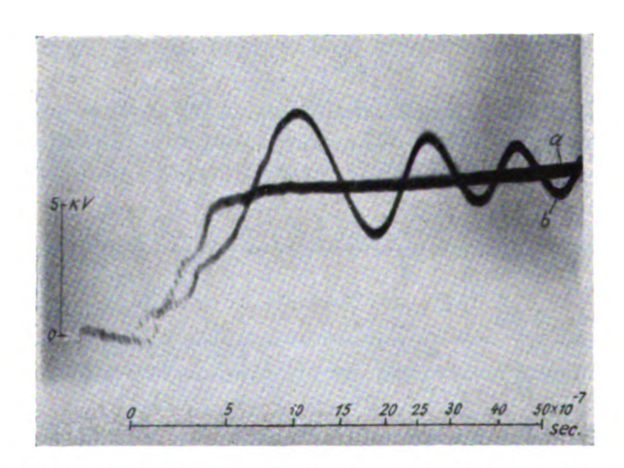


Bild 41 wie Bild 40, jedoch a Spule mit 4000 Ohm, b mit 100000 Ohm Silitwiderstand überbrückt.

einem Kondensator von 100 cm, der die Eingangskapazität des Transformators darstellen soll. Wird auf diese Anordnung eine Stoßwelle gesetzt, so ergibt sich am Kondensator die bekannte Eingangschwingung, die in dem gezeigten Beispiel etwa $0{,}6 \cdot 10^6$ Hertz hat (Bild 40). Nach Überbrückung der Spule mit einem Silitwiderstand von 4000 Ohm [1] ist die Schwingung bei einer Spannung von 5 kV vollkommen verschwunden (Bild 41a). Der nach Böhm ermittelte Höchstwert beträgt 3000 Ohm. Man kann aber, wie Bild 42 zeigt, auch einen Silitwiderstand von 20000 Ohm

[1] Die hier angegebenen Widerstandwerte sind Sollwerte für 110 Volt. Über die Spannungsabhängigkeit der Silitwiderstände siehe Abschnitt III, 1.

parallel schalten, ohne eine gefährliche Ausbildung der Schwingung zu bewirken. Selbst bei einem Widerstand von 100000 Ohm hat die Schwingung noch nicht ihre volle Höhe erreicht und ergibt gegenüber der unüberbrückten Spule eine wesentlich stärkere Dämpfung (Bild 41b).

Die Oszillogramme zeigen, daß der auf 110 Volt bezogene Sollwert der Silitwiderstände beträchtlich erhöht werden konnte. Der Widerstandwert ändert sich aber mit der Höhe der ankommenden Welle. Daraus ergibt sich, daß sich merklich spannungsabhängige Widerstände nicht als Überbrückungswiderstände von Schutzspulen eignen.

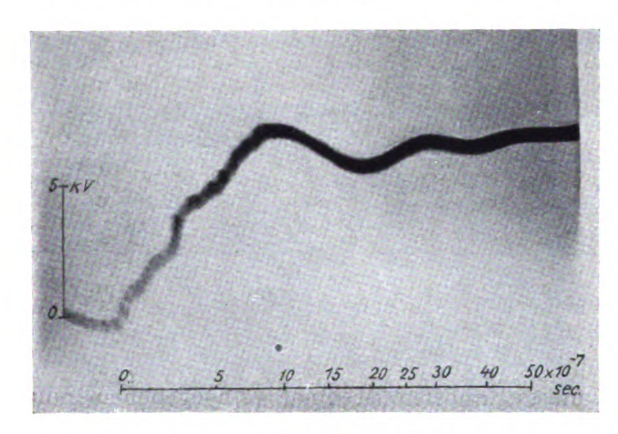


Bild 42 wie Bild 40, jedoch Spule mit 20000 Ohm Silitwiderstand überbrückt.

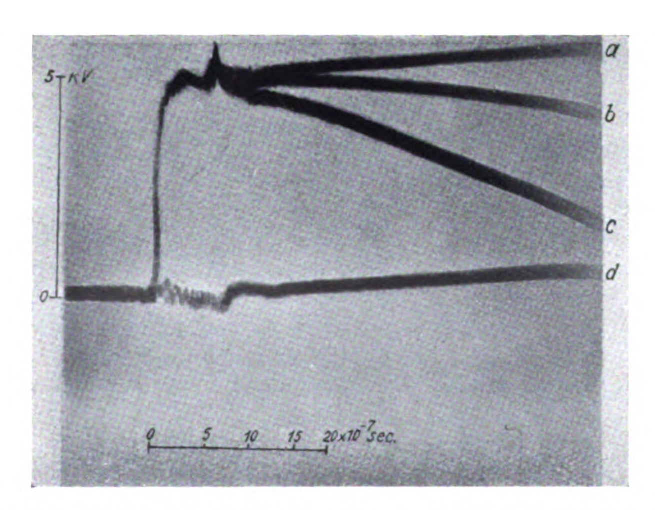


Bild 43. Spannungsverlauf am Ende der Versuchsdoppelleitung. Schaltung nach Bild 3a. a Ende offen; b Ende mit Schutzspule für 6 Ampere; c mit Schutzspule für 25 Ampere überbrückt; d Ende kurzgeschlossen.

Sind sie so bemessen, daß sie bei steilstirnigen Wellen in Höhe der Betriebspannung die Eingangschwingung gerade unterdrücken, so lassen sie bei Wellen höherer Spannung eine unnötig starke Teilwelle durch. Umgekehrt vermögen sie, für höhere Spannungen bemessen, nicht bei allen Beanspruchungen Schwingungslosigkeit zu gewährleisten.

In der gleichen Weise wie bei den Schutzkondensatoren wurde auch für verschiedene Schutzspulen die wirksame Induktivität bestimmt. Bild 43 zeigt den Spannungsverlauf am Ende einer Doppelleitung von 375 Ohm bei verschiedenen

Schaltungen, und zwar: a) freies Ende (Sprungwelle), b) Leitungsende durch eine Siemensflachdrossel für 6 Amp. überbrückt, c) Überbrückung durch eine Spule für 25 Amp. und d) Leitungsende kurzgeschlossen (Nullinie).

In Bild **44** ist der entzerrte Spannungsverlauf für die 25-Amp.-Spule aufgezeichnet. Die Zeitkonstante ergibt sich hier im Durchschnitt zu **137** $\cdot$ **10**$^{-7}$ sec. Die Induktivität

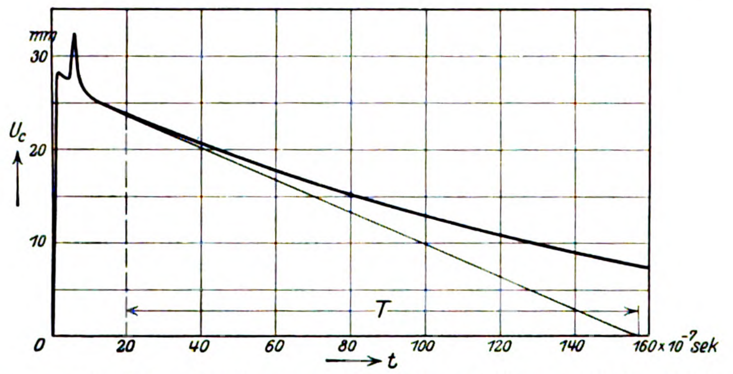


Bild **44**. Spannungsverlauf des Oszillogramms Bild **43** c auf linearen Zeitmaßstab umgezeichnet.

beträgt demnach rund 5 MH. Dieser Wert, der auch für eine zweite 25-Amp.-Spule ermittelt wurde, stimmt gut mit den listenmäßig angegebenen Induktivitäten (4,5 MH) überein. Dieselbe Übereinstimmung zeigte sich für eine 6-Amp.-Spule (ermittelt **34** gegenüber **30** nach Liste). Eine zweite 6 Amp.-Spule und zwei 2 Amp.-Spulen

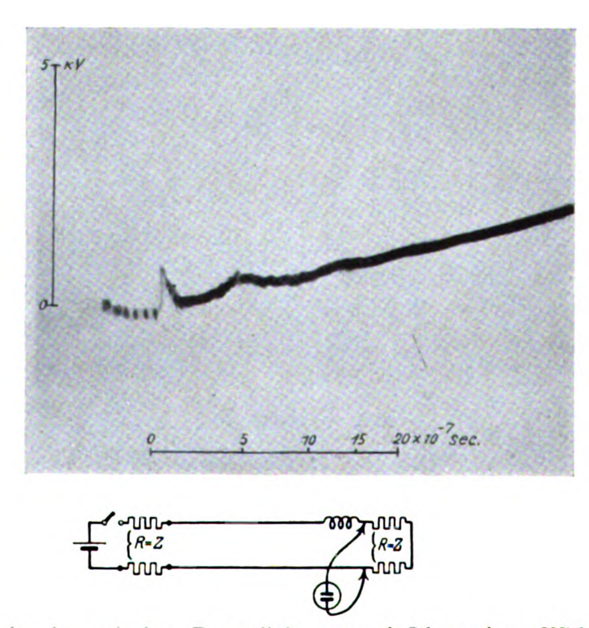


Bild **45**. Flachdrosselspule zwischen Doppelleitung und Ohmschem Widerstand in Höhe des Wellenwiderstandes (Fortsetzung der Doppelleitung). Spannungsverlauf am Widerstand.

zeigten mit 56 MH gegenüber den listenmäßigen Induktivitäten (**30** MH) eine rund $90\,^0/_0$ höhere Induktivität.

Für die Beurteilung von Flachdrosselspulen mit ihrer hohen Eigenkapazität ist es — besonders solange sie unüberbrückt sind — von Bedeutung, ob sie beim Auftreffen von Sprungwellen einen wesentlichen kapazitiven Stoß durchlassen. Aus

Bild 40 kann bereits geschlossen werden, daß die wirksame Eigenkapazität der Flachdrosselspule klein gegen 100 cm (Eingangskapazität von Transformatoren) ist. Auch bei einer im Leitungszug eingeschalteten Flachdrossel ist die durchtretende Spannungspitze nicht von wesentlicher Höhe. Bild 45 zeigt den Spannungsverlauf an einem an Stelle des 100-cm-Kondensators hinter der Schutzspule eingebauten Ohmschen Widerstand in Höhe des Wellenwiderstandes der Doppelleitung. Der Widerstand wirkt wie eine Fortsetzung der Doppelleitung hinter der Flachdrossel. Beim Auftreffen der Sprungwelle an der Spule sehen wir hinter der Spule in Bild 45 eine kleine Spannungspitze erscheinen. Es ist wahrscheinlich die durch die Eigenkapazität der Spule durchtretende Influenzwelle[1]. Nach Verschwinden der Influenzwelle erscheint

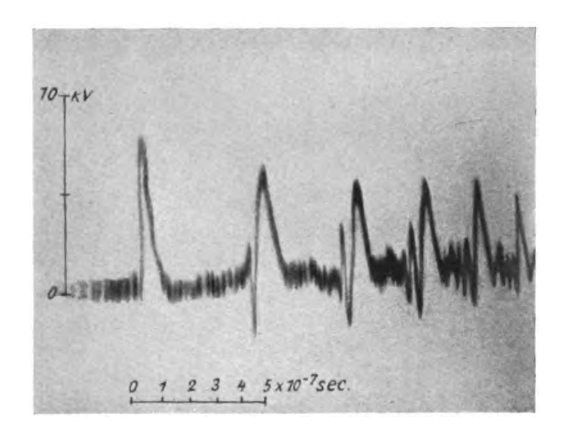


Bild 46. Bendmannspule, beansprucht durch Rechteckschwingung 10 kV.

die durch die Spule abgeflachte Wanderwelle. Wir können aus den gezeigten Oszillogrammen schließen, daß die Flachdrosselspulen bei Beanspruchung durch Sprungwellen im wesentlichen nicht anders wirken wie Zylinderspulen.

3. Bendmannspule (Blankdrossel, Koronaspule). Diese Spule stellt eine Abart der Schutzspulen dar. Sie hat gegenüber den üblichen Spulen eine außerordentlich geringe Induktivität. Ihre abflachende Wirkung soll nach Angabe des Erfinders durch Funkenüberschläge zwischen den Windungen der Schutzspule hervorgerufen werden.

Für die vorliegende Untersuchung stand eine Bendmannspule für 12 kV zur Verfügung. Diese sprach bei der benutzten Prüfspannungswelle von 10 kV trotz deren verhältnismäßig hoher Steilheit von 5 ÷ 10 kV/m nicht an (die hier benutzten Rechteckwellen waren die steilsten, im Institut hergestellten Wellen). Wegen der geringen Spannungshöhe lassen sich aus diesem Ergebnis keine endgültigen Schlüsse auf das Verhalten der Bendmannspule ziehen. Immerhin geben die aufgenommenen Oszillogramme bereits gewisse Hinweise. Bild 46 zeigt den Spannungsverlauf an der am Leitungsende als Überbrückung angeschlossenen Spule. Die Zeitkonstante ist außerordentlich klein, etwa $0{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec. Die je Windung auftretende Höchstspannung wird bestimmt nicht länger bestehen können. Damit ein Durchschlag von Windung zu Windung auftreten kann, muß die Funkenverzögerung also sicher kleiner sein, als die oben ermittelte Zeitkonstante. Dies bedeutet, daß die Windungsspannung einen Wert erreichen muß, der die statische Durchschlagspannung (bei der benutzten Spule etwa 3 ÷ 5 kV) erheblich übertrifft. Es müssen demnach verhältnismäßig hohe und steile Wellen auftreffen, wenn Windungsdurchschläge erfolgen sollen.

[1] Rogowski, Flegler und Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 485, Bild 13.



Es wurde aber bereits oben ausgeführt, daß die gleiche Überlegung für die zu schützende Wicklung gelten muß. Beim Auftreffen steilstirniger Wellen oder hochfrequenter Schwingungen genügt es für eine Schutzmöglichkeit, daß die Ansprechverzögerung der Blankdrossel mit Sicherheit unter die Durchschlagverzögerung der zu schützenden Wicklung gelegt werden kann. Die Blankdrosselspule wird auch beim heftigsten Ansprechen niemals eine Abflachung erzielen können, die derjenigen der üblichen Schutzspulen mit ihren um zwei bis drei Größenordnungen höher liegenden Induktivitäten auch nur annähernd entspricht. Ob sie trotzdem einen Schutzwert, vielleicht besonders gegen hochfrequente Schwingungen, besitzt, kann erst nach Klarstellung der Vorgänge in Transformatorwicklungen entschieden werden.

4. Vidmarspule. Die Widerstandüberbrückung von Schutzspulen bietet, wie bereits erwähnt, verschiedene Nachteile. Man kann nun nach Böhm auch noch auf andere Weise die Eingangschwingung unterdrücken, z. B. durch eine Teilüberbrückung der Spule. Um bei einer derartigen Überbrückung die notwendigen Induktivitäten möglichst gering zu halten, ist vollkommene magnetische Kopplung

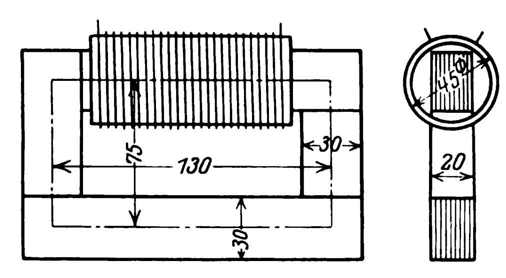


Bild 47. Einlagige Spule auf Hartpapierzylinder, 32 Windungen 0,7 mm ∅ Maschinendraht mit Eisenkern (Epsteinbleche 0,35 mm) zur Prüfung der magnetischen Wirkung des Eisens bei kurzzeitiger Beanspruchung.

des überbrückten und des unüberbrückten Teils erwünscht. Das kann zu Isolationsschwierigkeiten führen. Vidmar[1] sucht diese Schwierigkeiten zu vermeiden, indem er beide Spulenteile auf einen gemeinsamen Eisenkern aufbringt. Trotz des für die Isolation notwendigen Abstandes von Spulenteil zu Spulenteil wird durch den gemeinsamen Eisenfluß die notwendige magnetische Kopplung erreicht, und die Windungszahl kann entsprechend herabgesetzt werden.

Aus den geschilderten Voraussetzungen geht hervor, daß der Anteil des Eisens an dem Gesamtfluß einer Spule von ausschlaggebender Bedeutung für die Schutzwirkung ist. Ob sich aber der Einfluß des Eisens in den für Wanderwellenstirnen in Betracht kommenden Zeiten überhaupt auswirken kann, ist noch sehr ungeklärt.

Von Untersuchungen mit hochfrequenten Schwingungen her ist bekannt, daß die Wirkung des Eisens bei kurzzeitigen Spannungsänderungen durch Wirbelströme sehr stark herabgemindert werden kann. Es wurden deshalb noch Versuche zur Klärung der Wirksamkeit des Eisens in Spulen bei Sprungwellenbeanspruchung angestellt. In Bild 47 sind die Abmessungen der verwendeten Spule und des benützten Eisenkerns eingezeichnet, Bild 48 gibt den Spannungsverlauf an der Spule ohne Eisen, Bild 49 an der Spule mit Eisen wieder. Der Vergleich der beiden Oszillogramme läßt bereits die geringe Wirksamkeit des Eisenkerns in den ersten 10^{-7} sec erkennen. Noch deutlicher zeigt dies Bild 50, in dem der jeweilige Spannungsverlauf (a ohne, b mit Eisenkern) über dem linearen Zeitmaßstab aufgetragen ist. Der Vergleich der Zeitkonstanten ergibt eine Vergrößerung der Induktivität durch den Eisenkern auf etwa das 3 fache, während sie sich bei voller Wirkung des Eisens auf etwa das 50fache hätte erhöhen müssen (Bild 50c). Selbst bei besonderer Ausbildung des

[1] M. Vidmar, ETZ 1927. S. 801.

Eisenblechs wird eine magnetische Wirkung des Eisenkerns für sehr steile Stirnen nicht in Betracht kommen. Damit fallen aber für die Vidmarspule die wichtigsten Voraussetzungen.

Auch die bifilare Spule bietet, abgesehen von den von Vidmar erwähnten Isolationschwierigkeiten, wenig Aussicht auf Erfolg. Wie in einer späteren Arbeit

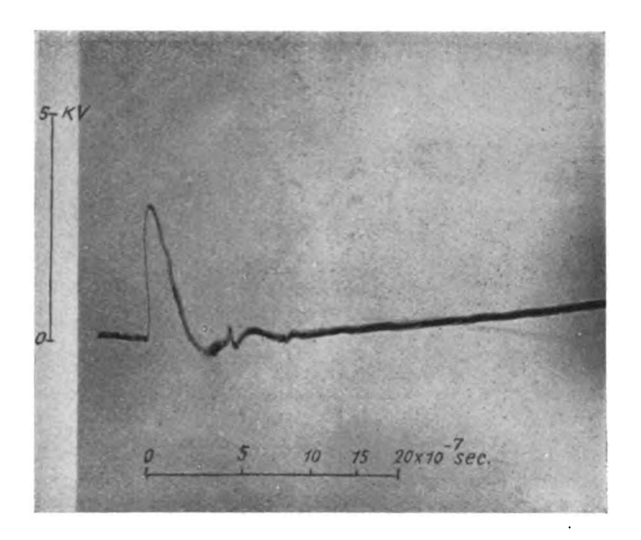


Bild 48. Spannungsverlauf an der eisenlosen Spule (Abmessungen der Spule wie in Bild 47) bei Beanspruchung durch Sprungwelle 5 kV.

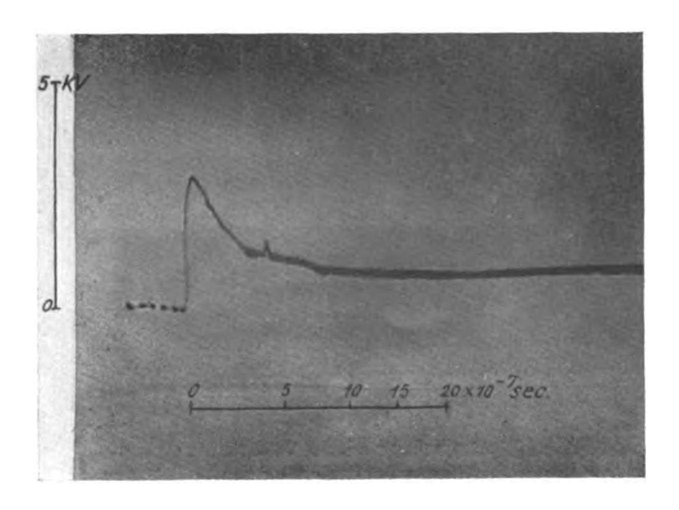


Bild 49. Spannungsverlauf an der Spule mit Eisenkern nach Bild 47 bei Beanspruchung durch Sprungwelle 5 kV.

gezeigt werden wird, bildet diese Spule, selbst bei verhältnismäßig enger Wicklung, die Stirn von eindringenden Wellen praktisch nicht stärker um als eine Doppelleitung.

5. Glimmschutz. Bei dieser Schutzvorrichtung liegen die Verhältnisse in gewissem Sinne ähnlich wie bei der Bendmannspule. Die wirksame Kapazität des Glimmschutzes beträgt nur einen Bruchteil derjenigen der üblichen Schutzkondensatoren (bei dem untersuchten Glimmschutz der Serie IV war die höchste fest-



gestellte Kapazität noch nicht 500 cm gegenüber 10000 bis 100000 cm der üblichen Schutzkondensatoren). Die abflachende Wirkung ist entsprechend geringer.

Vielfach wird der Glimmschutz den Überspannungs**ableitern** zugeordnet. Das entspricht aber weder dem Aufbau noch der Wirkungsweise dieses Schutzapparates. Alle bei ihm für eine Schutzmöglichkeit in Betracht kommenden Eigen-

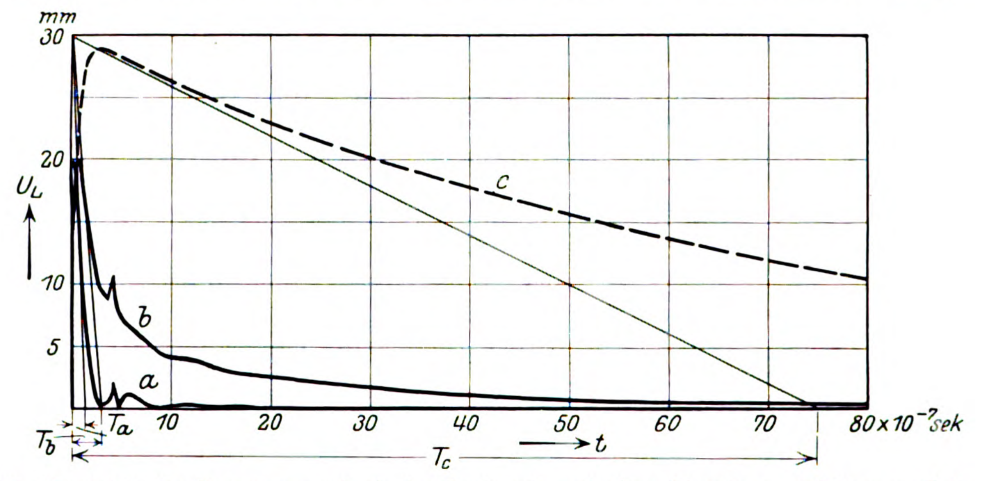


Bild 50. Vergleich des Spannungsverlaufs der Spule mit und ohne Eisenkern, auf linearen Zeitmaßstab umgezeichnet, a Spule ohne Eisen nach Bild 48; b Spule mit Eisen nach Bild 49; c Spannungsverlauf an einer der Eisenspule bei Niederfrequenz entsprechenden Induktivität unter Berücksichtigung der Eigenkapazität der Spule.

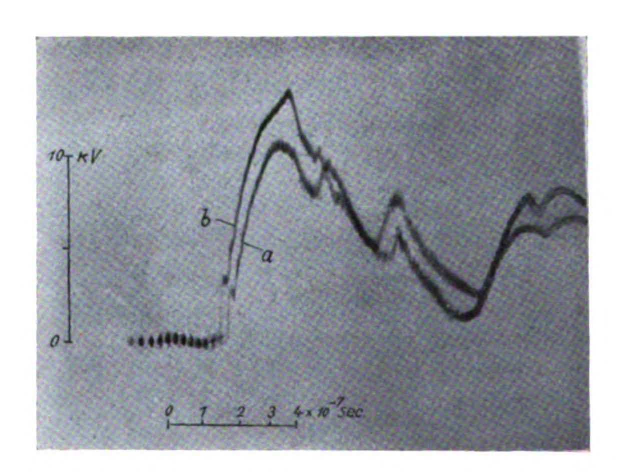


Bild 51. Glasplatte zwischen Spitzenelektroden. a Spannungsverlauf nach längerem Kurzschließen beider Elektroden; b Spannungsverlauf bei zweiter Beanspruchung, wenige Sekunden nach Aufnahme der Kurve a.

schaften lassen sich praktisch auch bei gewöhnlichen Kondensatoren sinngemäßer Schaltung nachweisen. Die Tatsache, daß beim Glimmschutz eine gewisse Energievernichtung stattfindet, berechtigt ebenfalls nicht, ihn den Ableitern zuzurechnen. Bei jedem Aufladen eines Kondensators findet eine dem Widerstand der Zuleitung entsprechende Energievernichtung statt. Aber der vorgelagerte Widerstand ist, wie bereits in Bild 35 (Abschnitt IV, 1) gezeigt werden konnte, nicht einmal ein Vorteil für die Schutzkondensatoren!

Hier soll noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht werden, der bei Stoßbeanspruchung die abflachende Wirkung des Glimmschutzes beeinträchtigen kann.

In Bild 51 ist der Spannungsverlauf an einer dem Glimmschutz ähnlichen Versuchsanordnung wiedergegeben (Glasplatte zwischen Spitzen-Funkenstrecken). Die Kurve a zeigt den Spannungsverlauf an der Funkenstrecke, wenn beide Elektroden kurz vorher leitend verbunden waren. Die Kurve b ergab sich bei einem Spannungstoß, der wenige Sekunden nach dem ersten erfolgte. Die Glasplatte war noch teilweise aufgeladen, die wirksame Kapazität verringert. Dementsprechend erfolgte der Spannungsanstieg bei der zweiten Stoßwelle rascher als bei der ersten. Ähnliche Verhältnisse können bei dem Glimmschutz eintreten, wenn kurz hintereinander zwei Spannungstöße in gleicher Richtung erfolgen.

V. Einbau von Schutzvorrichtungen.

Überspannungschutzvorrichtungen können, soweit sie nicht im Zug der Leitung liegen, meistens nicht unmittelbar an die zu schützende Anlage angeschlossen werden. Bei der Ausführung der notwendigen Zuleitungen richtet man sich im allgemeinen nach zwei Gesichtspunkten: möglichste Kürze und Vermeidung scharfer Biegungen.

Die Zuleitung wirkt sich bekanntlich mit ihrer doppelten Länge als Ansprechverzögerung der Schutzvorrichtung aus. Für Schutzkondensatoren bedeutet das, daß abgesehen von der Spannungsenkung infolge der Leitungsteilung überhaupt nur solche Wellenstirnen beeinflußt werden können, die größer als die doppelte Zuleitungslänge sind. Bild 34 (Abschnitt IV, 1) zeigt diesen Einfluß deutlich. Bei den sehr steilstirnigen Prüfwellen bildet sich hier bereits bei der verhältnismäßig geringen Zuleitung (einschließlich Kondensatorlänge etwa 2 m) eine Spannungspitze aus. Dabei muß noch beachtet werden, daß der steile Spannungsprung nicht nur nicht abgeflacht wird, sondern sich sogar nach Ablauf der Ansprechverzögerung wiederholt.

Für Funkenstreckenableiter liegen die Verhältnisse ähnlich. Hier addiert sich die durch die Zuleitung bewirkte Ansprechverzögerung zur Funkenverzögerung. Während diese jedoch wie die Durchschlagverzögerung der zu schützenden Anlage spannungsabhängig ist, d. h. mit steigender Überspannung sinkt, gilt dies nicht für die Ansprechverzögerung infolge der Zuleitungslänge. Je höher die Überspannung ist, desto schwerer fällt die Wirkung der Zuleitung ins Gewicht. Nach den bisherigen Untersuchungen über Durchschlagverzögerungen von Luft, festen und flüssigen Isolierstoffen [1 2] muß damit gerechnet werden, daß die Verzögerung bei hohen Überspannungen wesentlich unter 10^{-7} sec (30 m Lauflänge bei Freileitungen) liegt. Die Verkürzung der Zuleitung muß also bei Funkenstreckenableitern wie bei Kondensatoren von großer Bedeutung sein.

Umbiegung und Bogenführung von Doppelleitungen rufen, wie die Untersuchungen mit dem Kathodenoszillographen im Aachener Institut gezeigt haben[1], keine merkbare Veränderung der auf ihnen laufenden Wellen hervor. Dies gilt auch für die Zuleitung von den verschiedenen Phasen einer Leitung zu einer Schutzanordnung. Die Zuleitungen können im allgemeinen vollständig parallel zueinander geführt werden. Es findet dann keine Änderung des Wellenwiderstandes statt. Reflexionen sind darum selbst bei verhältnismäßig scharfen Umbiegungen nicht möglich, wenn diese für alle Zuleitungen gleichmäßig durchgeführt werden. Es ist aus demselben Grunde auch gleichgültig, ob die Zuleitung so von der Hauptleitung abgezweigt wird, daß sie eine gerade Fortsetzung der ankommenden Leitung bildet, oder ob sie zur Hauptleitung etwa im rechten Winkel abgebogen wird.

[1] Rogowski-Flegler-Tamm, Arch. f. Elektrot., XVIII (1927), S. 479.

[2] R. Tamm, Arch. f. Elektrot., XIX (1928), S. 235; siehe auch diese Arbeit Bild 8 und Bild 9 (Abschnitt III, 1).

Auch die Führung der Zuleitung zwischen Phase und Erde wird am zweckmäßigsten unter dem Gesichtspunkt der Änderung des Wellenwiderstandes betrachtet. Umbiegungen werden nur dann als Reflexionspunkte mit Spannungserhöhung wirken, wenn sie eine plötzliche Vergrößerung des Abstandes zwischen Zuleitung und Erde

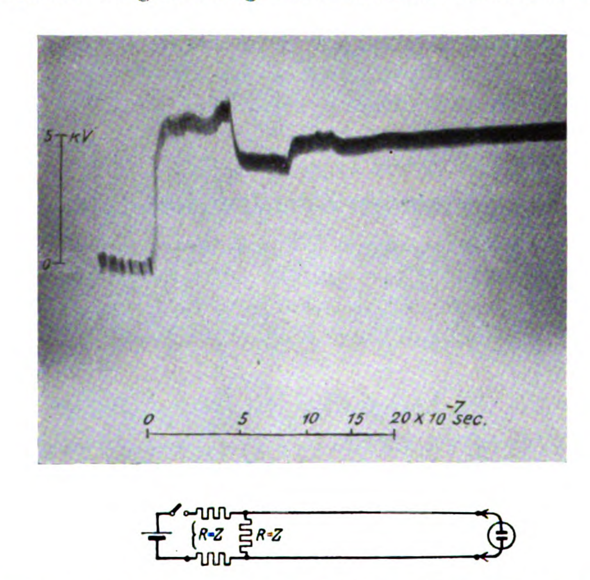


Bild 52. Spannungsverlauf am Leitungsende bei Einbau eines dem Wellenwiderstand gleichen Überbrückungswiderstandes 60 m vor dem Leitungsende; Sprungwellenschaltung nach Bild 3a[1].

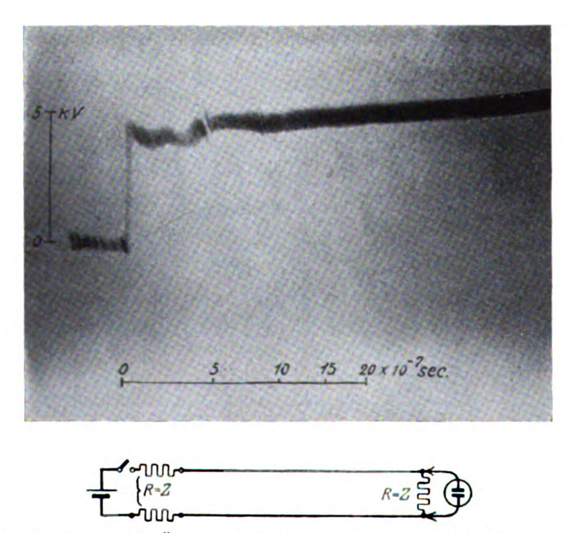


Bild 53 wie 52, jedoch derselbe Überbrückungswiderstand unmittelbar am Leitungsende[2].

darstellen. Alle übrigen Umbiegungen üben auf die einziehende Wanderwelle keinen störenden Einfluß aus. Man kann daraus den Schluß ziehen, daß es vorteilhaft sein wird, selbst mehrere und scharfe Umbiegungen der Zuleitungen zu den Schutzvorrichtungen in Kauf zu nehmen, wenn dadurch an Leitungslänge gespart werden kann.

[1] Über die Wirkung des Leitungsanfanges s. Abschnitt II.

[2] Die Wirkung der Anordnung Bild 53 entspricht der Sprungwellenschaltung Bild 3c. Dadurch wird gleichzeitig deutlich, daß ein Ableiterwiderstand in Höhe des Wellenwiderstandes günstigsten Falles nur eine Spannungserhöhung infolge Reflexion vermeiden kann.

Außer der Zuleitung kann auch der Abstand der Schutzvorrichtung von der zu schützenden Anlage die Schutzmöglichkeit beeinflussen. Dies gilt besonders für Ableiterschutzvorrichtungen. Hier kann sich zwischen Ableiter und Anlage ein Einschwingvorgang mit erhöhten Spannungen ausbilden.

In Bild 52 ist z. B. der Spannungsverlauf am Ende einer offenen Freileitung wiedergegeben, wenn der Ableiter mit einem dem Wellenwiderstand gleichen Dämpfungswiderstand 60 m vor dem Leitungsende sitzt. Der Einschwingvorgang ist hier deutlich ausgeprägt gegenüber Bild 53, bei dem derselbe Ableiter unmittelbar am Leitungsende sitzt.

Im ersten Fall (Ableiter vor dem Leitungsende) ergibt sich am Leitungsende beim Eintreffen der ersten Welle eine Spannung von der doppelten Höhe der Ableiter-Restspannung.

$$u_e' = 2\,u_a = 2\,\frac{2\,U\,R}{Z + 2\,R}.$$

Im zweiten Falle (Ableiter unmittelbar am Leitungsende) ergibt sich am Leitungsende beim Eintreffen der Spannungswelle die Endspannung

$$u_e'' = 2\,U\,\frac{R}{Z + R}$$

und hieraus

$$\alpha = \frac{u_e'}{u_e''} = \frac{2\,(Z + R)}{Z + 2\,R}.$$

Der Unterschied wird um so größer, je kleiner der Ableiterwiderstand ist (für $R = \infty$ wird $\alpha = 1$, für $R = 0$ wird $\alpha = 2$). Für $R = Z$ ergibt sich ein Endspannungsverhältnis $\alpha = {}^4/_3$, wie auch die Oszillogramme zeigen.

Zusammenfassung.

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit der Feststellung der Wirkungsweise verschiedener, zur Zeit auf dem Markt befindlicher Überspannungschutzvorrichtungen. Die Versuchsergebnisse gestatten nicht nur, das Verhalten der Apparate gegenüber den verschiedenen an sie zu stellenden Anforderungen zu beurteilen, sondern es lassen sich bereits auch Schlüsse auf die Entwicklungsmöglichkeiten der verschiedenen Schutzarten ziehen.

Der zur Bekämpfung von Spannungsüberhöhungen gebräuchlichste Schutz, der Widerstandableiter in seinen verschiedenen Formen, besitzt im allgemeinen einen verhältnismäßig hohen Dämpfungswiderstand. Als Schutz gegen hohe Überspannungen kommt er deshalb nicht in Frage. Auch der Einbau spannungsabhängiger Dämpfungswiderstände bietet zur Zeit keine Aussicht auf durchgreifende Besserung.

Gegenüber den Widerstandableitern besitzen die sogenannten Ventilableiter den großen Vorteil der sicheren und von der Höhe der Überspannung unabhängigen Spannungsbegrenzung. Die eingehende Untersuchung des Blitzventils (Autovalve Arrester) ergibt, daß dieser Ableiter die Ventilwirkung auch bei Sprungwellenbeanspruchung in einer ganz ausgesprochenen Form zeigt. Die Parallelschaltung Blitzventil-Schutzkondensator läßt stets nur flachstirnige, spannungsbegrenzte Wellen an sich vorüberziehen. Beim Ansprechen dieser Anordnung können weder steilstirnige Entladewellen (Sprungwellen) noch Ausschwingvorgänge entstehen. Das günstige Verhalten des Blitzventils kann sich bei seiner Verwendung in Starkstromanlagen mit dem heute üblichen Sicherheitsgrad der Isolation wegen seiner zu hohen Ansprechspannung nicht auswirken und wird durch Verwendung von Vorfunkenstrecken stark beeinträchtigt.

Eine endgültige Beurteilung der Schutzmöglichkeiten von Abflacherschutzvorrichtungen ist nicht möglich, solange infolge der Ungeklärtheit der Vorgänge in



Transformatorwicklungen nicht bekannt ist, welche Beanspruchung für die Transformatoren die größte Gefahr in sich birgt. Die Untersuchung dieser Schutzanordnung muß sich deshalb darauf beschränken, die Stärke der Abflachung und die Einwirkung auf den Verlauf der Klemmenspannung der zu schützenden Apparate zu bestimmen.

Bei Kondensatoren und Spulen stimmt die aus dem Spannungsverlauf ermittelte wirksame Kapazität, bzw. Induktivität im allgemeinen gut mit den angegebenen Werten überein. Widerstände vor Schutzkondensatoren können die erreichte Abflachung praktisch wirkungslos machen. Überbrückungswiderstände von Schutzspulen wirken ungünstig, wenn sie eine starke Spannungsabhängigkeit besitzen. Je nach dem gewählten Widerstandwert lassen sie entweder bei hoher Wellenspannung eine zu starke Teilwelle durch oder aber sie unterdrücken bei geringer Wellenspannung nicht die Eingangschwingung. Die durch den Überbrückungswiderstand durchtretende Teilwelle kann in Freileitungsanlagen durch Einfügen eines Kabels zwischen Spule und Transformator unschädlich gemacht werden.

Bendmannspule und Glimmschutz stellen eine Abart der Schutzspule, bzw. des Schutzkondensators dar. Ihre wirksame Induktivität, bzw. Kapazität liegt um Größenordnungen unter den sonst üblichen Werten. Die Beeinflussung der Stirn von Sprungwellen ist entsprechend geringer. Es ist möglich, daß sie gegenüber hochfrequenten Schwingungen eine größere Schutzmöglichkeit besitzen. Diese Frage läßt sich jedoch nur in Zusammenhang mit Spulenuntersuchungen klären.

Die vor kurzem von Vidmar angegebene Schutzspule hat zur Voraussetzung, daß der verwendete Eisenkern bereits in Zeiten, die der Ausbildung von Wellenstirnen entspricht, in volle magnetische Wirksamkeit tritt. Es zeigt sich jedoch, daß, wohl infolge von Wirbelströmen, die Induktivität von Eisenspulen bei einer Beanspruchungsdauer von 10^{-7} bis 10^{-8} sec nicht wesentlich höher ist als die von Luftspulen gleicher Windungsabmessungen. Damit entfallen die wichtigsten Voraussetzungen der Vidmarspule.

Anschlußleitungen von Schutzapparaten wirken in ihrer doppelten Länge als spannungsunabhängige Ansprechverzögerung. Umbiegung und Bogenführung der Zuleitung ruft keine merkbare Veränderung der auf ihr laufenden Wellen hervor, solange eine plötzliche Erhöhung des Wellenwiderstandes vermieden werden kann. Es erscheint deshalb zweckmäßig, die Zuleitung soweit irgend möglich zu verkürzen, selbst wenn dabei mit Rücksicht auf die übrige Schaltanlage mehrere Umbiegungen in Kauf genommen werden müssen. Bei großem Abstand der Schutzapparate von der zu schützenden Anlage bilden sich merkliche Einschwingvorgänge mit erhöhten Spannungen aus.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden auf Veranlassung von Herrn Professor Dr.-Ing. W. Rogowski durchgeführt, dem ich für seine zahlreichen Anregungen und gütige Förderung zu großem Dank verpflichtet bin. Auch der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sowie der Gesellschaft von Freunden der Aachener Hochschule sei an dieser Stelle Dank gesagt für die Unterstützung der Arbeit. Verschiedene Herstellerwerke von Überspannungschutzvorrichtungen und Zubehörteilen, die SSW, die Meirowskywerke, die Emag, die Dr.-Paul-Meyer-A.-G., die Westinghouse Electrical Company und ihr Vertreter, Herr Direktor Müller, die General Electric Company bzw. die AEG, die Firma Conrady und Gebr. Siemens haben dem Institut ihre Erzeugnisse für die Untersuchungen zur Verfügung gestellt. Ihnen sei auch hier Dank ausgesprochen.



Verfahren und Vorrichtungen zur Widerstandseichung mittels kalibrierbarer Eichgeräte.

Von

H. Hausrath.

Die praktischen Vorzüge der Kurbelrheostaten gegenüber den Stöpselrheostaten sind so bedeutend, daß sie diese überall verdrängt haben, wo häufigere Abgleichungen auszuführen sind[1]. Die immer, selbst bei Ausführung bester Firmen bestehende und auch durch sorgfältigste Pflege nicht zu vermeidende Unsicherheit bezüglich der Kontakte verhindert aber die Anwendung eines Kurbelwiderstandes als einmal geeichten Normalwiderstands zur Nachprüfung und Eichung der Gebrauchswiderstände. Als solche Normale sind nur Rheostaten mit Dekadenanordnung von 9 oder 10 Einzelwiderständen zulässig, die mit einem einzigen Stöpsel eingeschaltet werden (Parallel- statt Serienschaltung). Diese Bauart ermöglicht aber keine Kalibrierung und grundsätzlich kann nur durch Kalibrierung eine unabhängige Kontrolle und unbedingt sichere Eichung eines Satzes erreicht werden.

Aber auch bei den Serienanordnungen mit Stöpsel- oder Kurbelkontakten, die nach allgemeiner Auffassung innerhalb ihrer Dekaden kalibrierbar sind, besteht eine Unsicherheit über die Zuordnung der Verbindungswiderstände — Stöpsel- oder Kurbelkontakte — die es unmöglich macht, aus dem Ergebnis der üblichen Kalibrierung, die mittels Abgriffen vorgenommen werden muß, für jede bei der Benutzung der Rheostaten vorkommende Kombination den zutreffenden Eichungswert zu bestimmen. Dieser grundsätzliche Mangel haftet selbstverständlich der dabei zum Vorbild dienenden Gewichtssatzkalibrierung nicht an, weil die Gewichte ja voneinander unabhängig zu ordnende einzelne Elemente sind.

Ein den Bedürfnissen der exakten Meßtechnik und ebenso der praktischen Anwendung voll entsprechendes Verfahren des Widerstandsaufbaues und der Widerstandsprüfung muß sich deshalb offenbar auf kalibrierbare Normale mit dekadischem Aufbau gründen, deren Stufen bei der Abgleichung, Kalibrierung und Anwendung als Normal zur Eichung der Gebrauchswiderstände unter gleichen Bedingungen der Stromverteilung stehen und keine stromdurchflossenen Kontaktorgane besitzen.

Im folgenden sind solche Anordnungen und ihre Anwendungen angegeben. Zn ihrer Herstellung und Prüfung dient die in der nachstehenden Abhandlung beschriebene einwandfreie Ausgestaltung des Guzmannschen Kalibrierverfahrens. Sie beruht auf der Verwendung eines normalen neunstufigen Kurbelrheostaten statt der bisher üblichen Widerstandsreihe nach Strouhal und Barus in Verbindung mit einem nacheinander vor und hinter die Reihe einzuschaltenden Einheitswiderstand, wobei der Widerstand der Verbindungsleitungen in den Einheitswiderstand bzw. in die Endstufen des Kurbelrheostaten einbezogen ist.

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf einen beispielsweise zehnstufigen Rheostaten kommt man zwangläufig zu dem in Bild 1 dargestellten Aufbau von

[1] Sehr wünschenswert ist allerdings noch die Schaffung eines die einzelnen Kurbeln koppelnden Getriebes von der Art normaler Zählwerkgetriebe, das die untere Dekade beim Übergang zur höheren über die Dekadengrenze mitnimmt, so daß auch hier ein Übergang mit der Einheit der geregelten Dekade erzielt wird. Die Kontaktsätze sind natürlich zu diesem Zweck im Kreis anzuordnen.



zehn Widerstandsrollen, die durch kurze blanke Drahtstücke von ausreichender Stärke miteinander in Reihe verbunden sind. Die Widerstandsrollen sind deshalb nicht, wie bei Kurbelrheostaten üblich, durch je einen Kontaktklotz aneinander angeschlossen, sondern ihre Wicklung endet wie bei Stöpsel-Serienkontakten, aber ohne genaue Abgleichung, in getrennten Klötzen. Diese sind hauptsächlich mit Rücksicht auf die Kapazitätsverminderung bei Anwendung in Wechselstrom-Meßanordnungen möglichst klein bemessen. Die Stufen sind vorläufig so abgeglichen, daß der Betrag des Nennwerts, von der Anfangsklemme A aus gerechnet, möglichst auf die Mitte der Drahtverbindung zu liegen kommt. An diese Verbindungsdrähte werden nun schmale Abgriffe übergeklemmt, die durch biegsamen Draht an die bezifferten Kontakte angeschlossen sind. Hierauf wird der Gesamtwiderstand zwischen A und E endgültig abgeglichen. Dann sind die Abzweigklemmen auf die Punkte zu bringen, an denen sie genau die Nennwerte begrenzen. Die Abgleichbarkeit kann grundsätzlich durch Vergleich mit einem kalibrierten Meßdraht erfolgen, in dem dieser der Anordnung nebengeschaltet und in Brücke gegen die Meßdrahtpunkte mit dem wahren, der Stufenziffer entsprechenden Widerstandswert gemessen wird. Statt dessen wird man

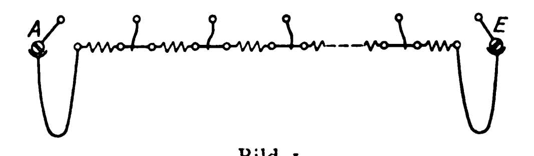


Bild 1.

als Grundnormal für weitere Abgleichungen eine Reihenanordnung mit solchem Einheitsbetrag anfertigen, daß die Verbindungsdrähte, mit ausreichender Stärke wie Meßdrähte von wenig cm Länge frei ausgespannt, einen Einstellbereich von etwa 1⁰/oo des Einheitswertes umfassen. An jedem Draht wird vorübergehend eine Skala angebracht. Auf diese Anordnung wird das bekannte Kalibrierverfahren, wie für Meßdraht beschrieben, angewandt. Der einzige Unterschied ist der, daß nicht ein einziger Schleifkontakt verschoben wird, sondern daß das Galvanometer der Reihe nach an die bezifferten Kontaktklötze mittels eines über sie schleifenden Kurbelkontaktes gelegt und dann die Abgriffklemme eingestellt und die Stellung an ihrer Skala abgelesen wird. Dies wird nach Übernahme des Einheitswiderstandes von einem Ende auf das andere Ende des Kurbelrheostaten wiederholt. Nachdem die Korrektionen bestimmt sind, wird jede Klemme um den Betrag der Korrektion verschoben. Es ist selbstverständlich gleichgültig, von welchem Skalenpunkt aus die Korrektionen gerechnet werden. Wesentlich ist nur, daß der Verbindungsdraht und seine Skala innerhalb der Meßstrecke genügend gleichförmig sind. Auch können die Skalen entbehrt werden, indem die Einstellungen jeweils von einem geeigneten Festpunkt aus in übereinstimmender Weise gemessen werden. Die Bürste, welche über die Kontaktklötze gleitet, kann, wie dargestellt, an einem Schieber statt an einer Kurbel angebracht sein, weil diese Kontakte bei allen Anwendungen nur als stromlose Potentialklemmen dienen. Aus dem gleichen Grund ist ein Verlöten der Abgriffklemmen unnötig und muß mit Rücksicht auf das besonders hier angewendete Abgleichverfahren vermieden werden. Zur Unterscheidung gegenüber den üblichen Kurbel- und Serienrheostaten mag dieser als Kettenrheostat bezeichnet werden.

Bild 2 zeigt, wie ein solcher Normalwiderstand N in Verbindung mit einem entsprechend gebauten aber anders eingeteilten Normal-Hilfsrheostat H in einer Brückenschaltung zur unmittelbaren Eichung eines neunstufigen Kurbeldekadenwiderstands W oder eines an seiner Stelle anzulegenden Stöpselrheostaten zu verwenden ist. B +, B − ist Batterieanschluß, g_1 und g_2 Galvanometeranschluß. W bildet mit einem Stück des Meßdrahts M von kleinem Widerstand einen Brückenzweig, das

andere Stück von M mit dem anschließenden Teil von N den zweiten, der an W anschließende Teil von H den dritten, sein Rest mit dem Rest von N den vierten. Die Kurbel von N wird jeweils auf die gleichzifferige mit der zu eichenden Stellung von W gestellt, gleichzeitig die Kurbel von H auf die gleichzifferige über St angeschriebene Stellung. Die bei H links angegebenen Zahlen bedeuten die Widerstände der betreffenden Stufen, wenn W und N Stufen von je 10 Ohm besitzen. Man erkennt, daß die Brücke bei fehlerlosem W stets abgeglichen ist, wenn der Schleifkontakt von M in der Mitte steht. Die Korrektion ist bei geeigneter Abgleichung des Meßdrahts durch Nebenwiderstand M' ohne weiteres am Meßdraht abzulesen. Als Anschlußpunkte w_1, w_2 des Rheostaten sind im angenommenen Beispiel, das die Eichung der Zehnerdekaden des Rheostaten W betrifft, der Nullkontakt der Einerdekade und der Zehnerdekade zu wählen.

Für die entsprechende Eichung der Anfangsdekade des Rheostaten wäre w_1 durch die Anfangsklemme, für die höchste Dekade wäre w_2 durch die Endklemme des ganzen Rheostaten zu bilden, damit durch Addition der Korrektionen für die

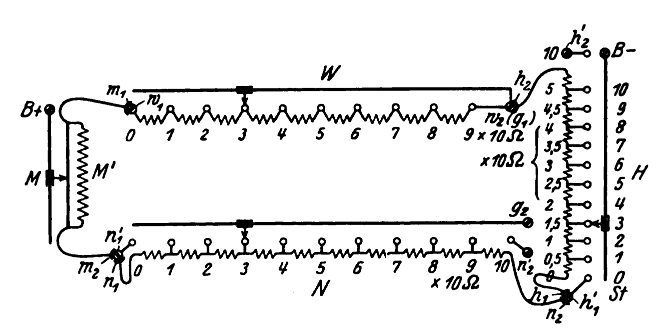


Bild 2.

einzelnen Dekaden — selbstverständlich auch für die Nullstellung — die Gesamtkorrektion des Satzes für Anschluß an den Endklemmen erhalten wird. Die dargestellte Brückenanordnung vermeidet alle Verbindungswiderstände dadurch, daß die verwendeten Normale keine Kontakt- oder Verbindungswiderstände enthalten und daß die Verbindungen derselben untereinander und mit dem Rest des Brückenkreises durch Verbindungsleitungen hergestellt werden, deren Widerstand in die Widerstandsstufe an dem betreffenden Ende abgeglichen ist. Der Symmetrie wegen ist diese Einrichtung an beiden Enden angenommen. Die Normale M enthält besondere feste Stromzuleitungsklemmen n_1' und n_2', an welche die zugehörigen Potentialkontakte angeschlossen sind. Entsprechende, mit h_1' und h_2' bezeichnete sind mit Rücksicht auf anderweitige Verwendung auch bei H angenommen, obgleich sie in dieser Kombination nicht benötigt werden. In diese festen Klemmen müssen also die Kabelschuhe n_1, n_2, h_1, h_2 der beweglichen Verbindungsleitungen, an denen der Widerstand dieser Normalrheostaten endet, eingeklemmt werden, damit die zugehörigen End-Potentialklötze genau das Anfangs- bzw. das Endpotential des Satzes annehmen. Diese Schaltung ist im Beispiel am Anfang von N und von H anzuwenden, damit W auch für seine Nullstellung geeicht werden kann. Wird die Verbindungsleitung zum Anschluß an den Nachbarapparat benötigt, so muß das Potential durch Anschluß an den Kabelschuh, statt durch Einstellung der Kurbel auf den betreffenden Endkontakt abgegriffen werden. In Bild 2 ist beispielsweise das Endpotential bei N benötigt, da eine normale neunstufige Dekadenanordnung angenommen ist und die Abgriffe bei H überhaupt nur vom Anfangs- bis zum Mittelwert (bei 50 Ohm) ausgeführt sind. Soll dagegen ein zehnstufiger Widerstand geeicht werden, so muß die Galvanometerleitung für die Eichung der zehnten Stufe von der Anschlußklemme g_2 fortgenommen und zum Kabelschuh in die Anschlußklemme h_1 der Normale H

eingesteckt werden. Selbstverständlich werden die Verbindungskabel wie die Schnüre von Handvermittlungsschränken gegen Verletzung und Überbiegung geschützt. In gleicher Weise wird der Meßdraht M durch zwei eingeeichte Verbindungsleitungen angeschlossen. Die genau auf den Nullpunkt des Meßdrahts zu legende Widerstandsmitte wird am einfachsten durch Verschieben des Abgriffs für den zur Ableitung dienenden Nebenwiderstand M' an einem überschießenden Meßdrahtstück eingestellt. Bei dieser Abgleichung können N und H als Vergleichszweige in Brückenanordnung dienen. Die endgültige Abgleichung mittels des Nebenwiderstandes M' hat so zu erfolgen, daß der auf eine vom Nullpunkt aus gemessene Strecke der Meßdrahtanordnung entfallende Kombinationswiderstand gleich der Hälfte der in ihrem Endpunkt aufgetragenen Korrektion ist.

Das beschriebene Verfahren ist bei einwandfreier Beschaffenheit der Normalen nicht nur innerhalb ihrer Fehlergrenze fehlerfrei, sondern infolge der unmittelbaren Ablesung der Korrektionen den bekannten Verfahren, auch der Eichung durch Vergleich mit einem Normalrheostaten von üblicher Bauart, praktisch überlegen. Es

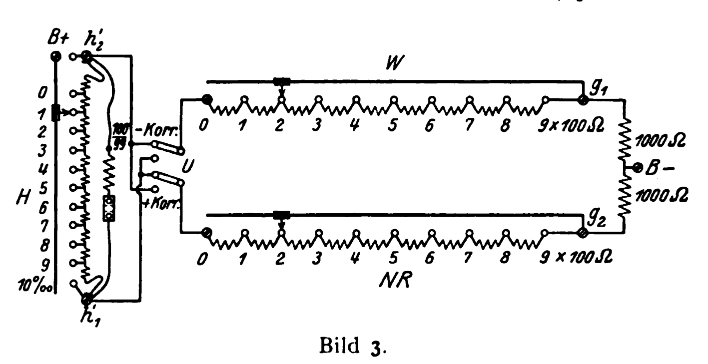


Bild 3.

würde trotzdem nur für reich dotierte Laboratorien in Frage kommen können, wenn zur Eichung jeder Dekade ein besonderer Satz der drei Normalapparate N, H, M erforderlich wäre.

Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß die gerügten Fehlerquellen der unmittelbaren Eichung mittels eines Normalrheostaten und der üblichen Kalibrierung bei der 10000er, 1000er und vorbehaltlich sehr guter Ausführung auch der 100er Dekade verschwindend kleinen Einfluß haben. Für die drei unteren Dekaden reicht man dann mit einem einzigen Apparatsatz mit dem Einheitswert von 10 Ohm aus, dem für die Eichung der beiden Unterdekaden nur noch je drei Nebenwiderstände beizugeben sind. Zur Eichung einer Einerdekade wird der Normale H zwischen Klemme h_1' und w_2, der Normale N zwischen n_1' und h_1' je ein Normalwiderstand von $\frac{100}{9}$ Ohm nebengeschaltet, für die Zehnteldekade je $\frac{100}{99}$ Ohm. Der Meßdrahtanordnung wird zwischen den Klemmen n_1' und w_1 jeweils ein Widerstand nebengeschaltet, der sie ebenfalls auf den 10. bzw. 100. Teil des eigenen Betrages bringt. Alle diese Nebenwiderstände werden zweckmäßig, durch je eine Lasche ein- und ausschaltbar, mit dem betr. Apparat vereinigt, wobei die Zuleitungen neben den Verbindungsdrähten im Panzerschutz bis zu den Auschlußklemmen geführt sind.

Der Beweis für die zunächst wohl überraschende Richtigkeit der Anwendung von Nebenschlüssen in dieser Schaltung ist durch experimentelle und rechnerische Prüfung leicht zu erbringen.

Der gesamte, aus N, H, M und sechs Nebenschlüssen bestehende Apparat wird zweckmäßig als Eichapparat zusammengebaut. Bei Verzicht auf universellste weitere Verwendung können natürlich die ablösbaren Schnurverbindungen beiderseits von N durch feste Innenverbindungen ersetzt werden. Für besondere Verwendung der

Einzelapparate z. B. zur Eichung eines Meßdrahtes mittels N können außer diesen festen Anschlüssen noch die abgeglichenen, besonderen Verbindungsschnüre angebracht werden. Dieser Eichapparat wird in gleicher Weise auch zur Eichung für die Nullstellung der höheren Dekaden verwendet, um genügend genaue Korrektionen auch bei Benutzung der Anschlußklemmen des Rheostatensatzes unter Einstellung der höheren Dekaden auf Null zu erhalten.

Für die unmittelbare Eichung der Widerstandsstufen der höheren Dekaden, die keine Rücksicht auf den Widerstand genügend starker Verbindungslitzen erfordert, wird vorteilhaft die Normale H mit ihren beiden Nebenschlüssen nach Bild 3 verwendet.

Die beispielsweise zu eichende 100er Dekade des Rheostaten W wird hier mit der gleichen Dekade des als ausreichend genau abgeglichenen oder als geeicht anzunehmenden Normalrheostaten NR und zwei 1000-Ohm-Normalen zur Brücke vereinigt, wobei H über den Umschalter U zwischen W und NR geschaltet wird. Parallel zu H wird für diese Dekade der kleinere Nebenwiderstand, also $\frac{100}{99}$ Ohm gelegt. Die

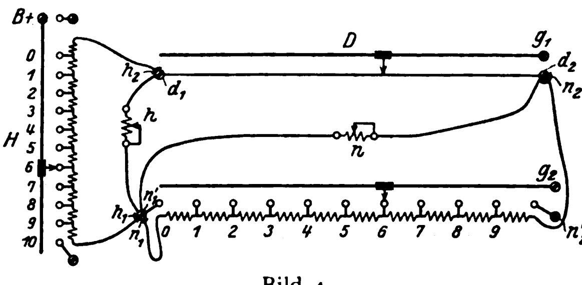


Bild 4.

Einstellung der Stromzuleitungsbürste ergibt bei dieser Widerstandskombination die Korrektur unmittelbar in Promille, die Umschalterstellung das Vorzeichen. Die Bruchteile der pro mille werden aus den Zeigerausschlägen interpoliert. Der Widerstand der Verbindungsleitung zwischen H einerseits und W und NR andererseits fällt, soweit er gleich groß ist, heraus.

Da die Korrektionsskala in Bild 3 und die Stellungsskala bei H in Bild 2 einander entgesetzt laufen, wird die letztere als überflüssig am besten ganz weggelassen.

Die Eichung von Kompensationsapparaten Feußnerscher Anordnung kann mit den gleichen Mitteln erfolgen.

Ist ein Stöpsel- oder Kurbelrheostat üblicher Art in höheren Dekaden zu eichen und sind zwei weitere Rheostaten mit der betr. Dekade vorhanden, so ist ein Normal dieser Art entbehrlich und läßt sich NR in Bild 3 durch einen einfachen Normalwiderstand vom Gesamtwert der Dekade ersetzen, wenn im oberen Zweig statt W nacheinander die sich zum Gesamtbetrag ergänzenden Kombinationen von je zwei der drei Rheostaten eingesetzt und gemessen werden. Neunstufige Dekaden werden dabei zweckmäßig durch eine in allen Kombinationen zugefügte Einheit auf 10 Stufen ergänzt. Aus den Korrektionen der 30 Kombinationen der Stufen $0 + 10$ bis $4 + 6$ und den drei Kombinationen der Stufe $5 + 5$ berechnen sich dann leicht, soweit erforderlich, die Korrektionen der 3×11 Stufen der drei Rheostaten. An Stelle von H kann hier, wie auch in der Schaltung nach Bild 3 selbst, das Kettennormal N verwendet werden mit solchem Nebenschluß, daß die einzelnen Stufen die Korrektion in promille oder einem geeigneten kleineren Maß angeben. Der Umschalter U fällt dann weg.

Auch dieses Verfahren ermöglicht wenigstens für einen der Rheostaten die Eichung der unmittelbar zwischen den Klemmen liegenden Widerstandswerte, indem man für die Herstellung der Reihenschaltungen je zweier Rheostaten nur zwei Verbindungsleitungen außer den in Bild 3 gezeichneten benutzt, von denen je eine mit



je einem der anderen Rheostaten verbunden bleibt. Die verschiedenen Dekaden werden mittels des Kettennormals aufeinander zurückgeführt, wie weiter unten bei Bild 6 und 7 angegeben.

Die Eichung — nicht Kalibrierung — eines Meßdrahts in zehn Abschnitten mittels der Normale N durch Parallelschalten und Brückenabgleichung gegen die Potentialabgriffe ist schon genannt worden. Will man nun jeden Abschnitt nochmals in zehn Unterabschnitten eichen, so ist dies unter Verwendung der Normalen H und N wie folgt ausführbar.

Der Kabelschuh h_1 der Normalen H wird nach Bild 4 in die Anschlußklemme n_1' von N, der Kabelschuh h_2 in die Anschlußklemme d_1 des Meßdrahtes D gesteckt. Die Gleitkontakte am Meßdraht und an N werden auf Null gestellt, bzw. das Galvanometer an die Anfansgklemme des Meßdrahts angelegt, der Kontakt bei H auf die Widerstandsmitte. Mittels des technischen Regelwiderstandes n, der zu N nebengeschaltet ist, wird nun der Kombinationswiderstand dieses Zweiges so lange verringert, bis das Galvanometer stromlos ist. Dann ist dieser Widerstand gleich dem des Meßdrahtes. Zur Eichung der Unterabschnitte ist weiterhin der Nebenwiderstand h so einzustellen, daß eine 5-Ohm-Stufe von H in Kombination mit h eine Widerstandsstufe von N, also nach dem Vorhergehenden den zehnten Teil des Meßdrahtwiderstandes ersetzt. Hierzu stellt man zunächst den Meßdrahtkontakt auf das Ende des ersten Abschnittes, d. h. auf das Potential der Stufe 1 von N ein, während der Kontakt von H auf der Widerstandsmitte, d. h. auf dem Nullpunkt der eingetragenen Korrektionsskala steht, wobei nach der obigen Einstellung von n Potentialgleichheit zwischen n_1' und h_2 besteht. Nun legt man die Batteriezuleitung B_+ an die Anfangsklemme n_1' von N, die andere, vorher am Meßdrahtende angeschaltete Batteriezuleitung auf die Mitte des zehnten Meßdrahtabschnitts und die Galvanometerzuleitung am Meßdraht auf seine Anfangsklemme. Dann regelt man h so lange, bis das Galvanometer wieder stromlos wird. Offenbar deckt dann die Verschiebung auf H zwischen 0 und 10 gerade einen Abschnitt. Prinzipiell ist nach der Einstellung von h wegen der veränderten Stromausbreitung in den Klemmen d_1 und d_2 eine nochmalige Prüfung in der Nullstellung von D und N erforderlich, die aber praktisch kaum einmal zu einer Nachstellung von n und h Veranlassung geben wird.

Die Eichung der Unterabschnitte erfolgt nun unter Verschiebung der Bürste für die Batteriezuführung B_+ bei H und entsprechender Verschiebung der Hilfsbürste für B_- auf der zweiten Hälfte des letzten Meßdrahtabschnittes. Da dieser noch nicht geeicht ist, entsteht dabei ein praktisch kaum in Erscheinung tretender Fehler. Wird nun in ganz entsprechender Weise unter Übernahme von H an das Meßdrahtende der letzte Abschnitt geeicht, so wird bei Wiederholung beider Eichungen jede beliebige Genauigkeit erreicht. In entsprechender Weise erfolgt die Eichung der weiteren Unterabschnitte unter abwechselndem Vorrücken der Bürste von D und N von beiden Seiten her bis auf die Mitte zu. Steht ein zweiter Normalrheostat H zur Verfügung, so erübrigt sich die Anwendung eines im letzen Abschnitt zu verschiebenden Hilfskondakts für die Stromzuleitung.

Selbstverständlich bleibt es unbenommen, bei der Eichung innerhalb der Abschnitte sich auf eine kleinere Auswahl der zehn Stufen von H zu beschränken. Besonders wichtig für viele Anwendungen des Meßdrahts ist aber die Möglichkeit, die Eichung bis auf 1% von den Enden aus zu erstrecken.

Grundsätzlich kann nun wieder, von den Unterabschnitten ausgehend, eine nochmalige Untereichung mit entsprechend verkleinertem Nebenwiderstand h ausgeführt werden. Ein Bedürfnis dafür wird aber kaum einmal vorhanden sein.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß das N-Normal noch besser als ein Rheostat zur Ausführung des in der voranstehenden Abhandlung beschriebenen Kalibrierverfahrens mit 9-stufigem Widerstand verwendet werden kann, wenn hinter der



neunten Stufe von N noch eine Anschlußklemme angebracht wird. Da diese sonst leer liegt und von den Potentialklemmen abgezweigt sein kann, wird hierdurch die Einwandfreiheit der Konstruktion und Abgleichung nicht beeinträchtigt.

Als nicht unwichtige Anwendung der Apparatur ist schließlich die genaue Vergleichung einzelner Widerstandsnormale anzuführen, die bei beliebigem absolutem Wert in Widerstandsverhältnis 1 : 1 oder 1 : 10 stehen.

Bild 5 zeigt die drei Normale schematisch in Brückenanordnung für den Vergleich der beiden dem Nennwert nach gleichen Einzelwiderstände R ohne Potentialklemmen. Zu M wird je nach der Größenordnung von R derjenige von den zu N gehörigen Nebenschlüssen gelegt, welcher die gewünschte prozentische Korrektionsablesung ergibt. Fehler der Apparate M, N und H werden durch Vertauschen der beiden R eliminiert.

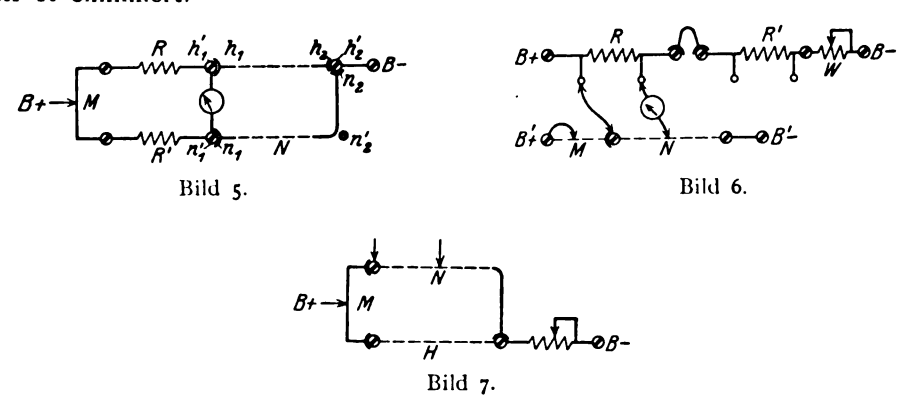


Bild 5. Bild 6.

Bild 7.

Der Vergleich zweier gleicher Widerstände von kleinem Nennwert mit Potentialklemmen kann nach Bild 6 mittels einer Kompensationsmethode erfolgen. Der aus N und M gebildete einfache Kompensationsapparat muß bei B_+', B_-' unmittelbar an einen Akkumulator angeschlossen oder parallel einem viel kleineren Widerstand bei großem Vorwiderstand gelegt werden. Zunächst wird das eine R durch Stromregelung mit technischem Widerstand W gegen eine geeignete Stufe von N kompensiert, dann wird auf den Vergleichswiderstand R′ übergelegt. Die zur Wiederkompensation erforderliche Verschiebung bei M gibt hier den halben Betrag der Korrektion gegenüber den übrigen Schaltungen. Ein praktisch wohl kaum bemerkbarer Urfehler ist hier im Widerstand der Verbindungsleitung zum Meßdraht, eine gewisse Unsicherheit durch den im Stromkreis liegenden Gleitkontakt von M begründet. Eine hierin günstigere Schaltung des Kompensationsapparates besteht darin, daß N und H nach Bild 7 mit den Anfangsklemmen an die Enden von M, mit den Endklemmen aneinandergelegt und von diesen und vom Gleitkontakt von M über einen Regelwiderstand an den Akkumulator angeschlossen werden. Dann kann, wie eine einfache Rechnung zeigt, bei einer Verschiedenheit der Zweige, die nur Korrektionsgrößen entspricht, der Strom im Kompensationsapparat durch den Vorwiderstand beliebig eingestellt werden, ohne daß bei der Korrektionsmessung eine wesentliche Änderung der Spannung zwischen den Verzweigungspunkten entsteht.

Die Anordnung nach Bild 6, noch besser aber wegen der unbeschränkten Regelbarkeit des Kompensationsstromes, die zuletzt genannte Verzweigungsschaltung ermöglichen auch den Vergleich für den Fall $R' = 10\,R$. Dann wird R an der ersten Stufe, R′ am Ende von N kompensiert.

Die beschriebenenen Anwendungen, denen noch manche andere anzureihen wären, zeigen, daß die angegebene Eichapparatur einen Universalapparat bildet, der alle vorkommenden Prüfungen von Widerständen oder Widerstandskombination ohne prinzipielle Fehler und unter unmittelbarer Ablesung der Korrektionen auf einfachste



Weise auszuführen gestattet. Wichtiger als dieses erscheint dem Verfasser jedoch, daß hierbei ein Rheostatenaufbau angewendet wird, der denkbar genaueste Abgleichung der Einzelstufen gestattet, und zwar auf unmittelbarer oder mittelbarer Grundlage der einwandfreiesten Form des Kalibrierverfahrens. Nach diesem Kalibrierverfahren kann diese Rheostatenform dann auch ohne Zuhilfenahme weiterer Normale auf das Genaueste und mit geringstem Zeitaufwand nachgeprüft werden.

Das neue Kalibrierverfahren und der zu seiner Ausführung nach der voranstehenden Abhandlung angegebene Kalibrierapparat oder statt dessen die oben beschriebene Apparatur zur unmittelbaren Meßdrahteichung beseitigen einige Bedenken, die bisher wohl gegen Verwendung von Meßdrähten bei Präzisionsmessungen zu erheben waren.

Die Konstruktion, insbesondere die der Schleifkontakteinrichtung und des Ablesemittels, muß dann allerdings mit der Genauigkeit, die im übrigen dem Eichverfahren zukommt, in Einklang gebracht werden. Insbesondere soll die Bauart die Möglichkeit zur bequemen Abgleichung auf verschwindenden Endfehler mittels des kleinen Zusatzwiderstands bieten, der nach dem Vorschlag des Verfassers in den

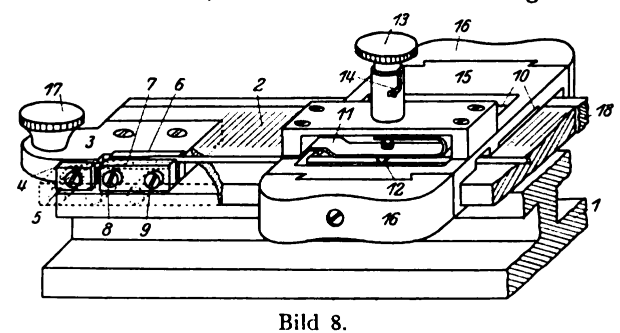


Bild 8.

Verbindungswiderstand des Kalibrierapparats eingeeicht wird. Da kaum eine in dieser Hinsicht befriedigende Konstruktion bekannt ist, dürfte in diesem Zusammenhang die Beschreibung einer Einspann- und Ablesevorrichtung am Platze sein, welche sich seit 17 Jahren im Laboratoriumsgebrauch bewährt hat. Die Ausführung, die ungefähr der Darstellung in Bild 8 entspricht, verdanke ich der Badischen Uhrmacherschule, jetzt Höhere Fachschule in Furtwangen durch Vermittlung ihres damaligen Direktors, Herrn Prof. Baumann.

Auf der oberen Fläche einer doppel-T-förmigen hölzernen Schiene 1 ist der Maßstab 2 und das messingene Einspannstück 3 aufgeschraubt. An letzterem wird mit der Klemmplatte 4 und der Schraube 5 das Drahtende festgespannt. Die das Meßdrahtende bestimmende Einspannung wird jedoch durch die in der Drahtrichtung etwas verschiebbaren, deshalb mit Schlitzlöchern versehenen Klemmplatten 6 und 7 gebildet, die durch die Schrauben 8 und 9 zusammengepreßt werden. Diese sind durch Löcher in der Holzskala zugänglich gemacht. Zwischen den Klemmstücken liegt, durch in 7 eingelassene Stifte geführt, ein nicht sichtbares Plättchen als Stütze für den Meßdraht. Es ist dünner als dieser und so geformt, daß der Meßdraht etwas nach unten durch die Spannvorrichtung hindurch gezogen werden kann, ohne daß er an der Eintrittsstelle zwischen den Klemmstücken einsinkt. Zur Aufhebung des Endfehlers werden die Klemmplatten 6 und 7 so lange verschoben und wieder angezogen, bis das dem Abgriffspunkt B, Bild 1 der vorangehenden Abhandlung, entsprechende Potential auf den richtigen Skalenstrich (beispielsweise 2 mm) fällt.

Ein nach diesem Verfahren vom Endfehler befreiter Meßdraht erreicht die relative Genauigkeit der üblichen Meßdrähte bei erheblich geringerer Länge. Um diese auszunutzen, wurde der dargestellte Schleifkontakt konstruiert, dessen Schieber der bekannten Rechenschieberkonstruktion nachgebildet ist und an seinem

Glasfenster 10 eine Noniusteilung trägt. Der Kontakt wird durch einen quer zu einer Blattfeder 11 gelöteten Draht 12 aus Platinoid gebildet. Auf dem Rahmen des Schiebers ist ein Druckknopf 13 mit Bajonettschlitz 14 zum Feststellen angebracht, durch den das Ende der Blattfeder zur Kontaktgabe niedergedrückt wird. Hierdurch wird nicht nur ein besonderer Galvanometerschalter entbehrlich gemacht, sondern auch der Abnützung des Schleifkontaktes vorgebeugt, indem der Druckknopf bei der Grobverschiebung gelöst bleibt. Der Messingschieber 15 mit den als Handgriffe dienenden Backen 16 aus Isolationsmaterial kann nach Abschrauben der Zuleitungsklemme 17 auf die Skala aufgeschoben werden. Eine seitlich an der Skala angebrachte Messingschiene 18 vermittelt die Stromzuleitung zum Schieber über eine nicht sichtbare Feder. Die Anschlußklemme zur Messingschiene liegt in der Drahtmitte.

Verfahren und Gerät zur Meßdrahteichung.

Von

H. Hausrath und **R. v. Freydorf.**

J. Guzmann[1] hat eine sehr zweckmäßige Vereinfachung des Eichverfahrens für Meßdrähte nach Strouhal und Barus angegeben. Bekanntlich besteht das Verfahren der beiden letzteren darin, daß in der zum Meßdraht parallelgeschalteten Reihe nominell gleich großer, in Quecksilbernäpfe einsetzbarer Widerstandsstücke ein Kalibrierstück schrittweise verschoben und jedesmal die ihm auf dem Meßdraht zugehörende Länge bestimmt wird.

Guzmann läßt nun die Stücke dauernd in einer Reihe geschaltet, nimmt eine Meßreihe auf, bei der das Kalibrierstück am Anfang der Meßreihe eingeschaltet ist, und eine zweite, bei der es am Ende liegt.

F. Raus[2] macht darauf aufmerksam, daß das Gerät für das Verfahren vereinfacht wird, wenn man die unangenehmen Quecksilberkontakte durch feste Lötungs- bzw. Klemmkontakte ersetzt[3].

Das Eichverfahren von Strouhal und Barus und mit ihm auch die angeführten Vereinfachungen enthalten eine grundsätzliche Fehlerquelle in der Bestimmung des Meßdrahtanfangs- und Endpotentials. Sie benötigen alle zwischen Meßdrahtanschlußklemme und Klemme der parallelliegenden Eichanordnung Verbindungsstücke, deren Leitungs- und Übergangswiderstände als unbestimmbare Fehler in die Eichung eingehen, da sie bewirken, daß die Potentiale der Anschlußklemmen des Meßdrahtes bei der Eichung nicht mit denen der Anschlußklemmen der Eichanordnung übereinstimmen.

Das gab dem einen von uns[4] Anlaß, das an sich so wertvolle Guzmannsche Verfahren sogleich nach seiner Veröffentlichung in einer abgeänderten Form in das elektrotechnische Praktikum einzuführen, die frei ist von diesem grundsätzlichen Fehler und dabei den Vorzug hat, mit den einfachsten Mitteln, wie sie in jedem Laboratorium zu finden sind, ausführbar zu sein. Die Leitungswiderstände haben dabei grundsätzlich keinen Einfluß, es bleiben lediglich Differenzen von Übergangswiderständen übrig, die leicht unter die Meßgenauigkeit herabgedrückt werden können.

[1] J. Guzmann, Zeitschr. f. Elektrochemie, **19**, S. 301, 1913.

[2] F. Raus, Zeitschr. f. Elektrochemie, **23**, S. 269, 1917.

[3] Der von F. Raus hier versuchte Beweis für die theoretische Übereinstimmung des Verfahrens von Strouhal und Barus und des Verfahrens von Guzmann ist verfehlt, da er die Fehlerfreiheit des Drahtes als Voraussetzung enthält. Übrigens müßte auch stehen: $a_1 = \frac{L}{W} R_1$ statt $a_1 = \frac{W}{L} R_1$.

[4] H. Hausrath, Beibl. Ann. d. Phys. 1918, S. 253.

Weiterhin ist durch den andern von uns das Verfahren so erweitert worden, daß mit wenig nennwertgleichen Widerständen (im äußersten Falle mit drei) beliebig viele Punkte des Meßdrahtes geeicht werden können.

Schließlich wurde von Hausrath noch die Maßnahme zugefügt, durch Widerstandsabgleichung der bei der verbesserten Apparatur angewandten Verbindungsdrähte auch die Möglichkeit zu schaffen, die Endfehler des Meßdrahtes für sich festzustellen oder sie von vornherein durch Abgleichung zu beseitigen.

Nachdem die Gefährlichkeit der offenen Quecksilberschalter erkannt ist und ihre Beseitigung in den Laboratorien erstrebt wird, dürfte eine Mitteilung darüber, wie das Eichverfahren mittels normaler Rheostaten und quecksilberfreier Verbindungsmittel einwandfrei durchführbar ist, nützlich sein.

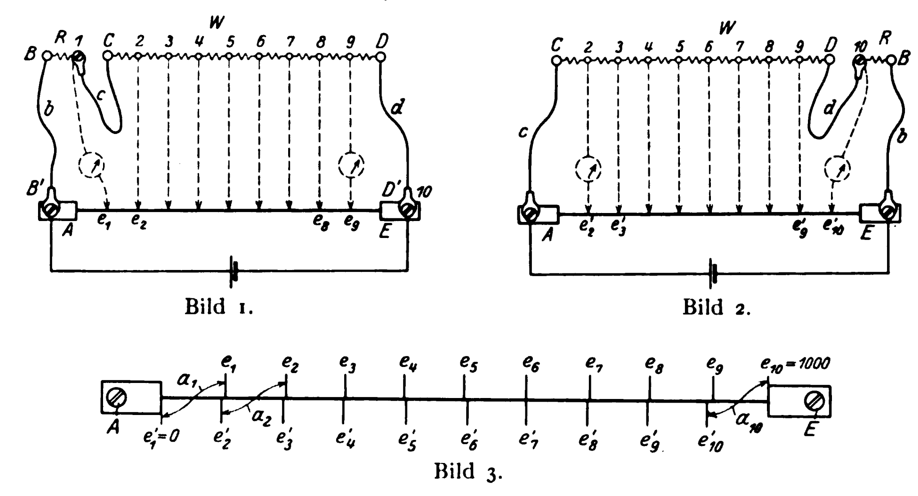


Bild 1. Bild 2.

Bild 3.

Im folgenden wird zuerst die Ausführung einer Kalibrierung in 10 Abschnitten des Meßdrahtes beschrieben. Der zu eichende Meßdraht A—E wird nach Bild 1 mit einem aus neun nennwertgleichen Stufen bestehenden Dekadenwiderstand und einem mit diesen Stufen nennwertgleichen Widerstand R zu einer Brückenanordnung vereinigt. Die Stromquelle liegt an den Anschlußklemmen A und E des Meßdrahtes. Mit dem ein Galvanometer enthaltenden Brückenzweig werden nun auf dem Meßdraht die Punkte e_1 bis e_9 festgestellt, die gleiches Potential wie die Abgriffspunkte 1 bis 9 des Widerstandsatzes besitzen. Dabei ist als Abgriffspunkt 1 die Endklemme des Widerstandes R zu nehmen. Es entsteht so z. B. eine Reihe von Skalenablesungspunkten wie die in Bild 3 über dem Meßdraht eingezeichnete.

Nun wird Schaltung Bild 1 in Schaltung Bild 2 umgewandelt durch Vertauschen der Reihenfolge der Widerstände R und W. Die Punkte gleichen Potentials werden wieder gesucht, wir erhalten eine Ablesungsreihe e_2' bis e_{10}' (in Bild 3 nach unten eingetragen). Als Abgriffspunkt 10 ist dabei die Anfangsklemme des Widerstandes R zu nehmen.

Das Anfangs- und Endpotential fällt natürlich jedesmal in die Anschlußklemmen A und E. An diesen sind die Stromzuleitungen und die Verbindungsleitungen b c d zu der Widerstandsreihe mit kräftigen Kabelschuhen eingeklemmt, so daß der Unterschied in den Übergangswiderständen, der beim Austausch der Verbindungsleitungen entsteht, vernachlässigbar ist. Sein Einfluß auf das Eichergebnis ist um so geringer, je größer der Widerstand R ist. Die Verbindungsleitungen b c d werden bei der Umschaltung nicht von den gleichnamigen Klemmen B C D abgelöst, so daß die Größe der Widerstandsstufen in beiden Fällen dieselbe ist, da immer Widerstand b in R, c in Stufe 1 bis 2, d in Stufe 9 bis 10 einbezogen bleibt.



Die beiden in Bild 3 dargestellten Teilungen aus Meßreihe nach Bild 1 und Bild 2 stimmen nun nicht überein, weil die einzelnen Stufen des Widerstandsatzes sowohl gegeneinander als gegen R abweichen. Durch die Umschaltung von 1 auf 2 ist jedoch bewirkt, daß alle mit gleichem Zahlenindex versehenen Skalenpunkte gegeneinander um eine Strecke (z. B. e_2 bis e_2') verschoben sind, deren Widerstand demselben Widerstand R entspricht. Diese Strecken (e_p bis e_p') seien mit a_p bezeichnet. Für die Endwerte e_1' und e_{10} setzen wir den Nennwert des Skalenanfangs- und Endpunktes selbst ein (z. B. 0 bzw. 1000), weil bei dem idealen Meßdraht ja das Potential der Skalenendpunkte mit dem der Anschlußklemmen zusammenfallen müßte. Soll der Meßdraht bis an die Einspannstelle heran geeicht werden, so muß das Potential auf dem Draht dort nach dem später angegebenen Verfahren noch besonders bestimmt werden.

Wären nun Meßdraht und Skala ganz gleichförmig und der Übergangswiderstand an der Einklemmung Null, so müßten alle Strecken a_p die gleiche Länge $a = \frac{\sum_1^{10} a_p}{10}$ haben. Die Abweichung einer Strecke a_p von dieser mittleren Länge a ist die Korrektion des Abschnittes a_p: $\delta_p = a - a_p$.

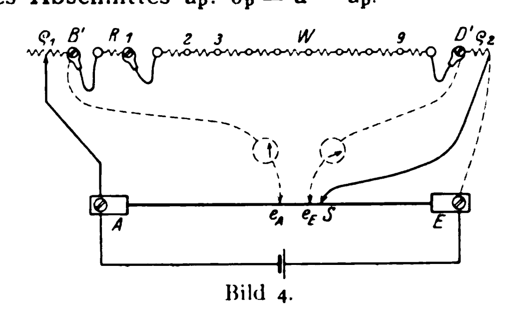


Bild 4.

Da die Länge a sehr nahe gleich dem zehnten Teil der ganzen Meßdrahtlänge ist, so ergibt sich die gesamte Korrektion, die am Ende des pten Abschnittes, also am Punkte e_p angebracht werden muß, als Summe der Korrektionen der Einzelabschnitte zu: $\Delta_p = \sum_0^p \delta_p$.

Die Fehler, die dabei dadurch entstehen, daß kleine Stückchen des Drahtes (z. B. e_3 bis e_4') ausgelassen oder doppelt gemessen werden, sind, wenn der Draht keine groben Ungleichförmigkeiten, z. B. Einkerbungen, an diesen Stellen aufweist, vernachlässigbar klein.

Zweckmäßig bedient man sich beim Errechnen der Korrektion folgender Tabelle: p e_p e_p' a_p δ_p Δ_p. Zur Probe auf richtiges Rechnen dient $\sum_1^{10} \delta_p = 0$.

Will man die Korrektionen auch für Punkte innerhalb der kalibrierten Abschnitte bestimmen, so legt man parallel zu dem zu eichenden Abschnitt des Meßdrahtes die bisher gebrauchte Widerstandskombination R + W (einschließlich der in die Endstufen eingeeichten, zwischen den Kabelschuhen B' und D' liegenden Verbindungswiderstände), die man zweckmäßig nach dem später erwähnten Verfahren geeicht hat. Um den Anfangspunkt B' der Widerstandsanordnung genau auf das Potential des früher geeichten Streckenanfangspunktes e_A und gleichzeitig D' auf das Potential des Streckenendpunktes e_E zu bringen, benutzt man die Schaltung nach Bild 4. Durch abwechselnde Regelung der Widerstände ϱ_1 und ϱ_2 nähert man sich dabei schrittweise der Übereinstimmung des Anfangs- und Endpotentials bei Meßdrahtabschnitt und Widerstand W*. Je kleiner einer der beiden

* Prinzipiell ist es nicht notwendig, die zu eichende Strecke genau zwischen zwei schon geeichte Punkte zu legen, doch wird die Bestimmung der Gesamtkorrektion dadurch wesentlich einfacher.



Widerstände ϱ im Vergleich zu dem der Widerstandsanordnung W ist, desto schneller geht die Annäherung vor sich. Man wird deshalb beim Arbeiten im Mittelteil des Meßdrahtes, wo beide Widerstände ϱ groß werden, den einen (z. B. ϱ_2) dadurch klein halten, daß man ihn nicht am Ende E des Meßdrahtes anlegt, sondern an einem möglichst nahe beim Streckenende e_E auf dem Meßdraht aufliegenden Kontakt S. Dieser Kontakt muß natürlich von e_E so weit abliegen, daß durch die Stromausbreitung keine Störung in dem Eichabschnitt entsteht. Verfügt man auf dem Meßdraht über einen einigermaßen zuverlässigen zweiten Schleifkontakt, so kann als ϱ_2 auch ein nicht veränderbarer Widerstand von geeigneter Größe Verwendung finden und durch Verschieben die gewünschte Einstellung bewirkt werden. Auch der zweite Widerstand ϱ_1 kann so ersetzt werden, doch bietet das keinen weiteren Vorteil für eine schnelle Annäherung.

Ändert sich während der Eichung der Übergangswiderstand des Kontaktes S, so findet eine Fehleichung statt. Doch wird diese sofort bemerkt, wenn zum Schluß die Endpotentiale nochmals geprüft werden. Wie die Erfahrung gezeigt hat, arbeitet selbst ein mäßig guter Schleifkontakt zuverlässig, natürlich um so mehr, je größer der Gesamtwiderstand des Zweiges mit R + W und ϱ ist.

Ist Potentialgleichheit der Anfangs- und Endpunkte erreicht, so kann man entweder durch Wiederholung des eingangs angewendeten Verfahrens die Korrektionskurve des eingeschlossenen Abschnittes bestimmen, oder, was viel einfacher und ausreichend genau ist, den Abschnitt mit der nach dem später angegebenen Verfahren geeichten Widerstandsanordnung R + W kalibrieren.

Stimmte der Anfangs- und Endpunkt der so geeichten Strecke genau mit zwei Punkten der vorhergegangenen Eichung der Hauptabschnitte überein, so findet man die Gesamtkorrektionen für die einzelnen Punkte dieser Unterabschnitte sehr einfach in folgender Weise: Man trägt die aus der Eichung der Hauptabschnitte erhaltenen Korrektionswerte als Funktion der Skalenteilung auf und verbindet sie geradlinig untereinander so, daß eine vorläufige Korrektionskurve entsteht. Zu den aus dieser Kurve entnommenen vorläufigen Korrektionen der Zwischenpunkte addiert man nun die aus der Eichung der Unterabschnitte gewonnenen Korrektionen und erhält die Gesamtkorrektionen für diese Punkte.

Um die bei der Kalibrierung verwendete Widerstandsanordnung R vor W zu eichen, bedarf es, wie schon oben erwähnt, keiner neuen Messung. Denn die an den Punkten e_p anzubringenden Korrektionen sind bekannt und damit auch das genaue Teilungsverhältnis eines Punktes e_p. Da dieser Punkt in Schaltung nach Bild 1 gleiches Potential hatte mit dem Abgriffspunkt vom Nennwert r_p, so muß gelten $\frac{r_p + \Delta r_p}{r} = \frac{e_p + \Delta_p}{e}$, worin e die gesamte Skalenlänge und r der Gesamtwiderstand des zum Meßdraht parallelgelegten Zweiges ist. Der dem Nennwert r_p zugehörende wahre Wert ist also $r_p + \Delta_{rp} = (e_p + \Delta_p) \cdot \frac{r}{e}$. Die Genauigkeit der so erhaltenen Eichung ist ebenso groß wie die der Meßdrahteichung. Für die Eichung kleiner Unterabschnitte des Meßdrahtes kann sie also unbedenklich verwendet werden, da die verursachten Fehler immer kleiner sein werden als die der ersten Eichung.

Selbstverständlich ist man bei Eichungen nach dem angegebenen Verfahren nicht an das Vorhandensein von 10 nennwertgleichen Stufen gebunden. Man kann mit jeder beliebigen Anzahl, im einfachsten Falle mit drei Stufen auskommen und dadurch, daß man die Abschnitte zwischen schon geeichten Punkten immer wieder kalibriert, für beliebig viele Meßdrahtpunkte die Korrektionen ermitteln.

Wenn auch die Kalibrierung mit 10 Meßdrahtabschnitten in vielen Fällen genügt, so ist es doch bei den Anwendungen, die eine Einstellung bis an die Meßdrahtenden verlangen, notwendig, die Endfehler, d. h. die Fehler infolge des



Zuleitungswiderstandes zwischen Anschlußklemme und Drahteinspannstelle und infolge des Übergangswiderstandes zum Draht für sich zu bestimmen, so daß ein geeichter Punkt wenigstens dicht an der Einspannstelle liegt. Die Stelle, von der ab die Stromlinien im Draht als gleichförmig anzunehmen sind, wird auch in dem Fall, daß man den Zuleitungswiderstand durch ein Verschieben der Einspannstelle über die Skalenendpunkte hinaus ausgleicht, selten um mehr als 1 mm vom Skalende entfernt liegen. Für einen Kalibrierungsabschnitt von 100 mm benötigt man also einen die Anfangsklemmen A anzulegenden Teilwiderstand von etwa 2% des Kalibrierwiderstandes R, um einen Punkt von gleichem Potential mit der Grenze des nicht erreichbaren Drahtendes zu erhalten.

Zu diesem Zweck wird in der zur bequemen Ausführung des beschriebenen Kalibrierverfahrens ausgebildeten Apparatur die Verbindungsleitung b (Bild 1) des Widerstandes R auf 2% des Gesamtbetrages abgeglichen und bei B eine Anschlußklemme angebracht. Mit dieser wird in der Schaltung nach Bild 2 auch der andere Endfehler bestimmt.

Der Transverter, ein Hochspannungs-Drehstrom-Gleichstrom-Umformer[1].

Von

Wolf Grüning, Heidelberg.

1. Allgemeines.

Im Engineering 1924, Heft 3044 ist eine Hochspannungs-Gleichstrommaschine „Transverter" für 100 kV und 20 Amp. beschrieben. Hier soll untersucht werden, ob eine derartige Maschine für Leistungen, wie sie bei der Großkraftübertragung gebraucht werden, einwandfrei zu bauen ist.

Die grundsätzliche Anordnung ist auch in der ETZ 1924, S. 659 beschrieben, so daß darauf nicht näher einzugehen ist. Sind danach auf den 3 Kernen eines Drehstromtransformators je 2 Spulen vorhanden und schaltet man diese geeignet in Reihe, dann erhält man eine Gleichstromwicklung. Auf einem zweiten Transformator mit primärer Zickzackschaltung und einer Verschiebung der Flüsse gegenüber denen des ersten um β^0 werden in den 6 sekundären Spulen Spannungen induziert, die ebenso gegenüber denen des ersten Transformators um den Winkel β verschoben sind und mit diesen zusammen eine 12-spulige Gleichstromwicklung ergeben usw. Soll der Zeitwinkel zwischen den Spannungen benachbarter Spulen gleich α sein und die Anzahl der Dreiphasentransformatoren gleich k_1, dann gilt für eine vollständige Wicklung:

$$k_1 \cdot \alpha = 60^0. \qquad (1)$$

Um die Gleichstromspannung abzunehmen, führt man die Spulenenden zu einem Kollektor, auf dem ein Bürstenpaar synchron mit der Spannung umläuft. Vervielfacht man die Sekundärspulenzahl mit k_2, führt die neuen Spulen wieder zu Kollektoren, die man hintereinander schaltet, dann ergibt sich die k_2-fache Klemmenspannung. Man könnte pro Kern und Kollektor mehrere Spulen k_3 hintereinander schalten. Diese wären für die Stromwendung ungleichwertig und deshalb bei sehr großen Ausführungen unverwendbar, so daß hier k_3 stets gleich eins ist. Bei l Sekundärwindungen pro Kern und n_0 Primärwindungen des Tranformators mit $\beta = 0$ und einer Drehstromphasenspannung E_d ist die Kollektorspannung:

[1] Gekürzter Abdruck der Dissertation des Verf. eingereicht an der Techn. Hochschule Hannover.



$$E_K = E_d \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2 n_0}. \qquad (2)$$

Die vorstehend beschriebene Anordnung ist für Gleichstromhochspannungsmaschinen großer Leistung aus folgenden Gründen besonders günstig: 1. Die Isolation der Wicklung ist gegenüber einer gewöhnlichen Nutenwicklung sehr einfach und betriebssicher durchzuführen. 2. Konstruktive Schwierigkeiten sind wesentlich geringer als bei Maschinenankern. 3. Abfuhr der Verlustwärme durch Ölkühlung ist sehr erleichtert. 4. Lamellen- und Reaktanzspannung sind unabhängiger als bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen, da die eine proportional dem Eisenquerschnitt, die andere proportional dem Umfang.

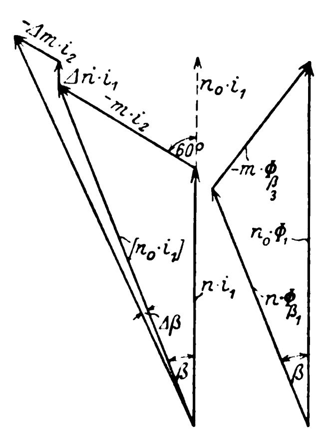


Bild 1. Zeichnung 1115. Bestimmung der drehstromseitigen Windungszahlen und des Fehlerwinkels.

Die erwähnte Flußverschiebung um einen Winkel β erreicht man durch Zickzackschaltung auf der Drehstromseite, wobei zu einer Phase Wicklungsteile mit n bzw. m Windungen auf den verschiedenen Kernen gehören. Man kann diese gleich- oder gegensinnig schalten. Bei der zweiten Anordnung spart man Kupfer, so daß diese allein in Frage kommt. Soll für alle Transformatoren die Induktion und der Magnetisierungsstrom gleich sein, dann gilt für die Teilwindungszahlen gemäß Bild 1a:

$$n = n_0 \cdot \frac{\sin(60 - \beta)}{\sin 60}; \quad m = n_0 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin 60}. \qquad (3)$$

Phase 1 liegt dabei auf Kern 1 und 3. Bild 1 zeigt, daß tatsächlich von den Flüssen in Phase 1 dieselbe Spannung nach Größe und Richtung induziert wird wie beim Transformator mit $\beta = 0$, da die Gesamtflußverkettung für beide Fälle dieselbe ist.

2. Belastungsströme.

a) Die Summe der Ampere-Windungen des Belastungsstromes ist gleichstromseitig nicht gleich Null und erzeugt deshalb bei primärer Sternschaltung einen Luftfluß, der sich von Joch zu Joch außen um die Wicklungen herum schließt. Bei primärer Dreieckschaltung wird dieser durch Ausgleichströme vernichtet für den Transformator mit $\beta = 0^0$, dagegen gar nicht beeinflußt bei $\beta = 30^0$. Da mit Rücksicht auf Stromwendung alle Wicklungen gleichwertig sein müssen, kommt nur Sternschaltung in Frage. Dies gilt auch unter Berücksichtigung der später aufgeführten Hilfswicklung, da auch dann noch ein wenn auch nur kleiner Luftstreufluß bleibt.

Der Kompensationsstrom ergibt sich daraus, daß die Summe der Ampere-Windungen für 2 Eisenkreise gleich Null und die Summe der 3 Phasenströme auch gleich Null sein muß. Bezeichnet man diese Ströme mit i_1, i_2, i_3, und die 3 Sekundärströme mit i_4, i_5, i_6, dann folgt nach einigen Umrechnungen:

$$i_1 = -\frac{1}{3 n_0^2}\left[i_4 (2n + m) - i_5 (n - m) - i_6 (2m + n)\right]. \qquad (4)^1$$

Der Stromverlauf einer Phase ist in Bild 2 für einen Transverter mit 4 dreiphasigen Transformatoren aufgetragen. Man erkennt, daß der Gesamtstrom im Außennetz fast rein sinusförmig ist.

[1] Wobei aus Bild 1 gemäß Cosinussatz Gleichung (5) folgt:

$$n^2 + m^2 - 2 m n \cos 120 = n^2 + n m + m^2 = n_0^2. \qquad (5)$$

b) Die Summe der Ampere-Windungen pro Kern ergibt sich auf Kern 1 zu:

$$n \cdot i_1 - m \cdot i_2 + l \cdot i_4 = -\frac{1}{3}(2 i_4 - i_5 - i_6 - 3 i_4) = \frac{1}{3}(i_4 + i_5 + i_6). \qquad (6)$$

Auf jedem Kern ist also unabhängig von der Größe von n und m ein Überschuß vorhanden, der gleich $^1/_3$ der sekundären Ampere-Windungen ist und den oben beschriebenen Luftfluß erzeugt. Wenn ein Sekundärstrom seine Richtung umkehrt, wechselt auch dieser Fluß das Vorzeichen, hat also die dreifache Frequenz

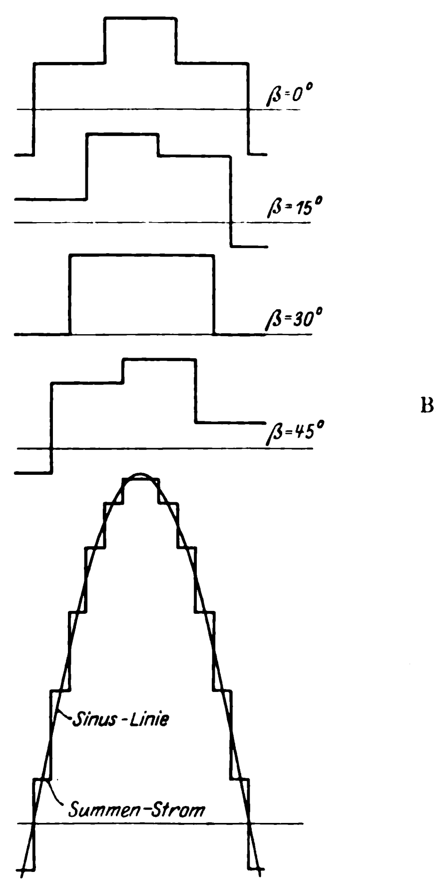


Bild 2. Zeichnung 1116. Addition der Ströme einer bestimmten Phase von sämtlichen Transformatoren eines Transverters. Summenstrom nahezu sinusförmig.

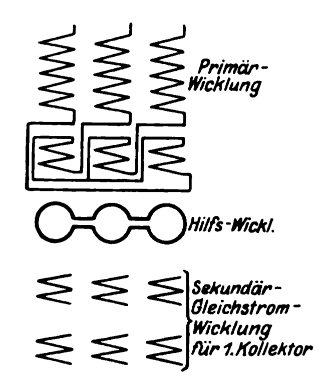


Bild 3. Zeichnung 1114. Schematische Anordnung der verschiedenen Wicklungen auf einem Transformator.

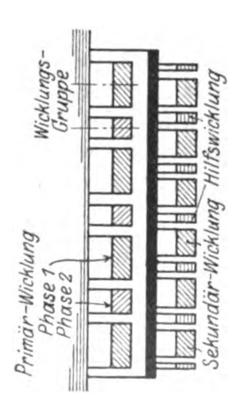


Bild 4. Zeichnung 1113. Anordnung der verschiedenen Wicklungen auf dem Kern eines Transformators.

des Drehstromnetzes. Bei der Stromwendung wird dadurch in den kurzgeschlossenen Spulen eine Spannung induziert, die dieselbe Richtung wie die vom Streufluß erzeugte hat und die Stromwendung beeinträchtigt. Da der Luftfluß wesentlich größer als der Streufluß werden kann, muß man ihn durch Einführung einer Hilfswicklung, die alle 3 Kerne gleichzeitig umfaßt und mit dem Fluß keines Kernes allein verkettet ist, unterdrücken. Schematisch ist diese Hilfswicklung in Bild 3 dargestellt. Man wird sie auf den einzelnen Transformatoren so anordnen, daß zu den Spulen jeden Kollektors eine solche Hilfswicklung gehört, die räumlich direkt neben den betreffenden Spulen liegt und auch nur nach Maßgabe der Kollektorspannung von diesen isoliert wird. Es ergibt sich damit die Anordnung nach Bild 4, bei der die Streuung zwischen Sekundärwicklung und Hilfswicklung sehr klein wird. Die Einführung der Hilfswicklung erhöht den Kupferverbrauch und die Stromwärmeverluste

der Wicklung insgesamt um rund $^1/_6$, muß aber mit Rücksicht auf den großen Vorteil, daß die bei der Wendung in den kurzgeschlossenen Spulen induzierten Spannungen wesentlich herabgesetzt werden, in Kauf genommen werden. Die Störungen des rein sinusförmigen Verlaufs der Flußkurve durch Eisensättigung und verschiedene magnetische Widerstände der 3 Kerne werden unterdrückt. Die Einführung dieser Hilfswicklung bedeutet also für den Transverter eine erhebliche Verbesserung.

Für die primären Ströme gelten nun wie bisher die aufgestellten Bedingungen und auch Gleichung 4. Bezeichnet man den Strom der Hilfswicklung mit i_h, deren Windungszahl pro Kern mit l', dann gilt, da die Ampere-Windungszahl pro Kern gleich Null sein muß:

$$i_h = -\frac{l}{3\,l'}(i_4 + i_5 + i_6). \tag{7}$$

Die Ampere-Windungszahl des Hilfsstromes pro Kern ist also wie nach Gleichung (6) zu erwarten gleich $^1/_3$ von der des Sekundärstromes und erfordert daher $^1/_3$ des sekundären Kupferquerschnittes.

c) Die einfache Addition der Primärströme aller Transformatoren zeigte bereits in Bild 2, daß deren Summe einen fast vollständig sinusförmigen Verlauf hat. Es läßt sich beweisen, daß dies allgemein gilt. Gleichung (4) ist auch für die einzelnen Sinusschwingungen, aus denen man den Belastungsgleichstrom zusammensetzen kann, gültig. Addiert man dann für alle Transformatoren die entsprechenden so entstandenen Wellen, dann erhält man den Anteil des Netzstromes an der betrachteten Schwingung. Da die Abweichungen des Stromverlaufs von der Geraden bei der Wendung nur gering sind, kann man im folgenden der Einfachheit halber geradlinige Stromwendung annehmen. Der Ausdruck für den Sekundärstrom enthält dann nur noch ungradzahlige Sinusglieder, da der Sekundärstrom eine Symmetrielinie besitzt. Infolge der Sternschaltung fallen weiter alle dritten Oberwellen weg. Der Ausdruck der p·Oberwelle für die 3 Sekundärströme eines beliebigen Transformators lautet, wenn man als Zeitnullpunkt immer den Durchgang des zu diesem gehörigen Stromes i_4 durch Null ansieht:

$$i_{p4} = a_p \cdot \sin p\, 2\pi v t; \quad i_{p5} = a_p \cdot \sin p\left(2\pi v t - \frac{2\pi}{3}\right); \quad i_{p6} = a_p \cdot \sin p\left(2\pi v t - \frac{4\pi}{3}\right). \tag{8}$$

Die Amplituden a_p sind für alle Kerne gleich, und so ergibt sich aus Gleichung (4) nach einigen Umrechnungen:

$$i_{p1} = \frac{l \cdot a_p}{3\,n_0^2}\left\{\begin{matrix} \sin p \cdot 2\pi v t\left[2n + m - (n-m)\cos p\frac{2\pi}{3} - (2m+n)\cos p\frac{4\pi}{3}\right] \\ + \cos p \cdot 2\pi v t\left[(n-m)\sin p\frac{2\pi}{3} + (2m+n)\sin p\frac{4\pi}{3}\right] \end{matrix}\right\}. \tag{9}$$

Nun wird $\cos p\frac{2\pi}{3}$ und $\cos p\frac{4\pi}{3}$ stets gleich $-\frac{1}{2}$ für p = 1, 5, 7, 11 usw. und damit die erste eckige Klammer zu $(3n + 1{,}5\,m)$. Der Ausdruck $\sin p\frac{2\pi}{3}$ wird zu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ für p = 1, 7, 13 usw. und zu $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ für p = 5, 11 usw. Der Ausdruck $\sin p\frac{4\pi}{3}$ wird zu $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ für p = 1, 7 usw. und zu $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ für p = 5, 11 usw. Damit ergibt sich für den zweiten eckigen Klammerausdruck $-3m\frac{\sqrt{3}}{2}$ für p = 1, 7 usw. und $+3m\frac{\sqrt{3}}{2}$ für p = 5, 11 usw., also wird aus Gleichung (9):

$$i_{p1} = -\frac{l \cdot a_p}{3\,n_0^2}\left[(3n + 1{,}5\,m)\sin p\, 2\pi v t \pm 3m\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos p\, 2\pi v t\right]. \tag{9a}$$

Da nun $(3\,n + 1{,}5\,m)^2 + \left(\pm 3\,m \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9\,n_0^2$, folgt, daß die Amplituden entsprechender Oberwellen für sämtliche Phasen gleich groß sind. Der Vektor i_p in Bild 5 stellt also die betrachtete Oberwelle dar. Dabei liegt i_p im Zeitnullpunkt für $p = 1, 7$ usw. im zweiten Quadranten, für $p = 5, 11$ usw. im dritten. Die Vektoren sind also gegen den Zeitnullpunkt ihres Transformators um den Winkel

$$\sin \varphi_1 = \frac{3\,m\sqrt{3}}{3\,n_0^2 \cdot 2} = \sin \beta \text{ und } \sin \varphi_2 = -\sin \beta \tag{10}$$

verschoben. Das heißt, Oberwellen gleicher Frequenz verschiedener Transformatoren sind bezogen auf den Zeitnullpunkt des betreffenden Transformators immer um $180 - \beta$ oder $\beta - 180$ verschoben. Diese Oberwellen heben sich im Außennetz vollständig auf, wenn die Vektoren ein geschlossenes Vieleck bilden.

Die Zeitnullpunkte aufeinanderfolgender Transformatoren sind gemäß Festlegung zu Gleichung (8) im Maßstab der Grundschwingung um den Winkel α gegeneinander verschoben, im Maßstab der betrachteten Oberwelle also um $p \cdot \alpha$. Die Vektoren einer bestimmten Frequenz sind gemäß Schluß des vorigen Abschnittes bei einem bestimmten Transformator um den Winkel $\pm \alpha$ weiter vom zugehörigen Zeitnullpunkt entfernt als beim vorhergehenden. Gegeneinander sind also die Oberwellen benachbarter Transformatoren verschoben um den Winkel

$$\psi = p \cdot \alpha \pm \alpha. \tag{11}$$

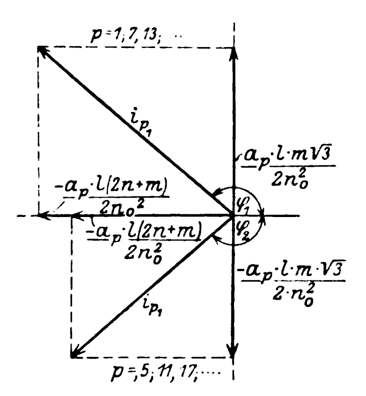


Bild 5. Zeichnung 1112. Diagramm der pten Oberwelle für einen Transformator mit beliebigem β.

Dabei gilt das positive Vorzeichen für die Reihe $p = 5, 11$ usw. das negative für die Reihe $p = 1, 7$ usw. Da nun die absolute Größe einer bestimmten Oberwelle für alle Transformatoren gleich ist, genügt, damit ihre Summe zu Null wird:

$$k_1 \cdot \psi = k_1 \cdot \alpha\,(p \pm 1) = U \cdot 360^0 = 60\,(p \pm 1). \tag{12}$$

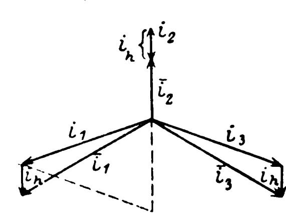
Hierin ist U eine ganze Zahl. Daraus folgt, daß die Oberwellen mit $p = 5, 7, 11, 13, 17, 19 \ldots 6\,x \pm 1$ im Außennetz gleich Null sind, denn gemäß obigem gehört zu den negativen Vorzeichen die Reihe $p = 1, 7$ usw., zu den positiven die Reihe $p = 5, 11$ usw. Hiervon bildet lediglich der Fall, daß $\psi = 360^0$ oder ein ganzes Vielfaches davon, eine Ausnahme. Dann liegen die Vektoren alle in einer Geraden und addieren sich arithmetisch. Dies ist allgemein der Fall bei $p = 6\,k_1 x \pm 1$. Nun sind aber die Amplituden dieser Schwingung, abgesehen von der Grundschwingung, sehr klein, so daß man praktisch sagen kann, daß sämtliche Oberwellen des Transverters im Außennetz verschwinden. Allerdings ist dabei die Anzahl der im Kurzschluß befindlichen Spulen stets gleich zu halten, da sich sonst doch Zacken ausbilden können, weil nämlich dann die Amplituden der nichtverschwindenden Oberwellen verhältnismäßig groß werden können, wie die zahlenmäßige Auswertung ergibt. In einem berechneten Beispiel betrug die Abweichung des Netzstromes vom sinusförmigen Verlauf sogar unter Berücksichtigung der tatsächlich ungradlinigen Stromwendung nur 0,25 %.

Da die Schwingungen der Reihe $6\,k_1 x \pm 1$ gleiche Phasenanlage und Größe haben, addieren sich die Grundwellen sämtlicher Transformatoren im Außennetz arithmetisch. Dies steht in Übereinstimmung damit, daß jeder Transformator unabhängig von seinem Winkel β die gleiche Leistung übertragen muß. Da auch der Magnetisierungsstrom für alle gleich, wäre eine primäre Reihenschaltung der Wicklungen aller Transformatoren zulässig. Mit Rücksicht auf die unterschiedlichen

Oberwellen auf den verschiedenen Kernen ist dann jedoch eine vollständige Kompensation des Belastungsgleichstromes nicht möglich. Dadurch würden sich wiederum erhebliche Streuspannungen ergeben, so daß diese Schaltung nur für sehr kleine Transverter, wie z. B. die in den englischen Berichten beschriebenen, möglich sein kann.

3. Spannungsabfälle.

Gegenüber der Berechnung bei gewöhnlichen Transformatoren ist die Bestimmung der Spannungsabfälle beim Transverter weniger einfach, weil die Stromänderung unstetig ist. Durch Reihenentwicklung könnte man wohl mit der gewöhnlichen Betrachtungsweise auskommen, doch ist es übersichtlicher, immer nur solche Zeitabschnitte zu betrachten, wo sich der Strom eines Tranformators nicht ändert, oder solche, wo er sekundär auf einem Kern seine Richtung umkehrt.


Bild 6. Zeichnung 1111. Magnetisierungsstrom der Grundfrequenz in der Hilfswicklung.

a) Durch den verschiedenen magnetischen Widerstand der drei Kerne eines Transformators und durch die Veränderlichkeit des Magnetisierungskoeffizienten überlagern sich der Grundschwingung der Phasenspannung andere Wellen und verzerren diese. Die in den kurzgeschlossenen Spulen vom Hauptfluß induzierte Spannung ist nur von dem Fluß des betreffenden Kernes abhängig, also möglicherweise für die Sekundärwicklungen auf den drei Kernen eines Transformators unterschiedlich. Die vom Streufluß induzierten Spannungen, denen die vom Hauptfluß induzierten das Gleichgewicht halten sollen, sind aber für alle Spulen gleich, so daß eine einwandfreie Stromwendung zunächst nicht erreicht wird. Die durch den veränderlichen Magnetisierungskoeffizienten hervorgerufene dritte Oberwelle ist unbedenklich, da sie für alle drei Kerne und damit für alle Spulen im gleichen Sinne wirkt. Der unterschiedliche magnetische Widerstand der drei Kerne bewirkt jedoch zunächst, daß der Hauptfluß des mittelsten Kernes größer als der der beiden äußeren ist, was störend wirkt, also unterdrückt werden muß.

Infolge der Hilfswicklung, die um alle drei Kerne gemeinsam kurz geschlossen ist, kann sich kein Fluß von Joch zu Joch durch die Luft schließen, abgesehen vom Streuraum. Die Summe der drei Flüsse in den Kern muß also stets gleich Null sein. Damit folgt, daß auch die Summe der drei Phasenspannungen stets gleich Null ist, und da die Netzspannungen ein gleichseitiges Dreieck bilden, müssen die Phasenspannungen gleich groß und um 120° gegeneinander verschoben sein, so daß der Einfluß des verschiedenen magnetischen Widerstandes und des Magnetisierungskoeffizienten unterdrückt wird.

Um die entsprechenden Flüsse zu erzeugen, sind bei ungleichem magnetischen Widerstand der drei Kerne die Erregerströme i erforderlich, gemäß Bild 6. Es können sich aber nur die eingetragenen Ströme i einstellen. Die Wicklung auf dem Kern mit dem kleineren magnetischen Widerstand würde also einen Teil der Erregung der beiden anderen Kerne mitliefern und gleichzeitig einen Fluß von Joch zu Joch durch die Luft treiben, der die Grundfrequenz hat. Dieser erzeugt wieder in der Hilfswicklung einen Strom i_h von der Grundfrequenz, der den Luftfluß praktisch vernichtet und gleichzeitig für jeden Kern die erforderliche Erregung schafft. Er ergibt mit den Phasenströmen zusammen die erforderlichen Ströme i. Daß auch die dritte Oberwelle der Phasenspannung beseitigt wird und daß in der Hilfswicklung ein Strom dreifacher Frequenz fließt, braucht nicht gezeigt zu werden, da dies für den Transverter bedeutungslos ist. Auch bei Belastung muß auf alle Fälle die Summe der von dem Hauptfluß induzierten Spannungen gleich Null sein und der zeitliche Verlauf für alle 3 Phasen gleich. Da auch die Summe der Ohmschen Abfälle und

der Streuspannungen gleich Null sein muß, liegt das Potential des Sternpunktes der Drehstromwicklung fest.

b) Da in den 3 Primärphasen der Reihe nach die gleichen Ströme fließen, ist die induzierte Spannung mit Berücksichtigung des Ohmschen primären Spannungsabfalles zwischen 2 Bürsten konstant und unabhängig davon, auf welchen Transformator eine Wicklung kurz geschlossen ist. Die bei Belastung in der Zeit, wo auf keinem Kern des betreffenden Transformators eine Stromwendung stattfindet, zu induzierende Spannung ergibt sich damit ohne weiteres aus der Klemmenspannung, vermindert um den Ohmschen Abfall.

c) Bei der Stromwendung auf einem Kern ändern sich die Ampere-Windungen sämtlicher Primärwicklungen und der Hilfswicklung des Transformators, sowie die der Sekundärwicklung eines Kernes. Die verschiedenen Streuflüsse, die nur mit einzelnen Wicklungen verkettet sind, ändern sich dabei und induzieren dadurch Streuspannungen, die nachstehend betrachtet werden sollen. Bei der in Bild 4 dargestellten Wicklungsanordnung kann man zunächst die beiden Primärwicklungen als eine Einheit auffassen, die von einem Grundstrom durchflossen wird, der so groß ist, daß die damit errechnete Summe der Ampere-Windungen gleich der tatsächlich vorhandenen ist. Ebenso kann man in der Sekundärwicklung einen Grundstrom annehmen, der dieselbe Ampere-Windungszahl ergibt wie deren tatsächlicher Strom und der der Hilfswicklung zusammen, und der vom Grundstrom der beiden Primärwicklungen kompensiert wird. Diesen beiden angenommenen Strömen entspricht der Hauptstreufluß, der nach bekannten Regeln für eine Zylinderwicklung berechnet werden kann, und der den Hauptanteil der bei der Stromwendung in den kurzgeschlossenen Spulen induzierten Streuspannung verursacht. Der angenommene Grundstrom der Primärwicklung wird nun durch je einen Zusatzstrom zum tatsächlichen ergänzt, und die Summe der Ampere-Windungen dieser Zusatzströme ist pro Kern gleich Null. Dabei ist der Zusatzstrom und der Grundstrom in den beiden Wicklungsteilen einer Phase mit n und m Windungen, also auf den verschiedenen Kernen, verschieden groß. Es stellt sich nun ein primärer Zusatzstreufluß ein, dessen erregende Ströme in einer Scheibenwicklung, nämlich den entsprechend angeordneten Teilen der beiden Primärwicklungen fließen. Somit läßt sich dieser Fluß nach bekannten Regeln ermitteln. Der Grundstrom der Sekundärwicklung wird ebenfalls durch einen zusätzlichen Strom zum tatsächlichen ergänzt, der durch den ganzen Strom der Hilfswicklung kompensiert wird. Diesen Strömen entspricht ein sekundärer Zusatzstreufluß, der wieder nach den Regeln für Scheibenwicklungen ermittelt werden kann. Hiermit sind alle Streuungen des Transverters beschrieben.

Aus der Gleichung (6) ergeben sich die erregenden Ampere-Windungen des Hauptstreuflusses auf den 3 Kernen. Man ersieht, daß dieser Streufluß im mittleren Drittel zwischen 2 Stromwendungen doppelt so groß wie im ersten und letzten ist. Außerdem ist er unabhängig vom Winkel des zugehörigen Transformators und die Summe ist für alle 3 Kerne zusammen stets gleich Null, so daß also die Hilfswicklung nicht beeinflußt wird. Der Hauptstreufluß mit dem Leitwert Λ in Volt. sec/Amp. Windungszahl² kann nun entweder mit der Primär- oder der Sekundärwicklung verkettet sein, die Sekundärspannung ist unabhängig davon. Die in den kurzgeschlossenen Spulen eines Kernes 1 insgesamt vom Hauptstreufluß induzierte Spannung ergibt sich dann zu:

$$e_r = -\frac{2}{3} \Lambda l^2 \frac{di_4}{dt}, \qquad (13)$$

während in den nicht kurzgeschlossenen Spulen auf den beiden anderen Kernen eine halb so große Spannung induziert wird, die in den beiden gleichgerichtet und der angeschriebenen entgegengesetzt gerichtet ist. Da nun während der Wendung in einer Spule die beiden in einem Ankerkreis liegenden Spulen auf den anderen Kernen

gegeneinander geschaltet sind, heben sich die durch die Hauptstreuung induzierten Spannungen im Außenkreis zwischen den Bürsten auf, und es tritt lediglich eine etwas ungleichmäßige Spannungsverteilung am Kollektor auf, die aber praktisch bedeutungslos klein ist.

Der primäre Grundstrom $i_{gr\,11}$ auf Kern 1 in Phase 1 ergibt sich aus Gleichung (6) zu:

$$i_{gr\,11} = -\frac{1}{3\,(n+m)}\,(2\,i_4 - i_5 - i_6) \qquad (14)$$

und ist negativ gleich dem Grundstrom auf Kern 1 in Phase 3. Der primäre Zusatzstrom auf Kern 1 in Phase 1 folgt dann zu

$$i_{z\,11} = -\frac{l\,m}{3\,n_0^2\,(n+m)}\,[i_4\,(n-m) + i_5\,(2\,m+n) - i_6\,(2\,n+m)]. \qquad (15)$$

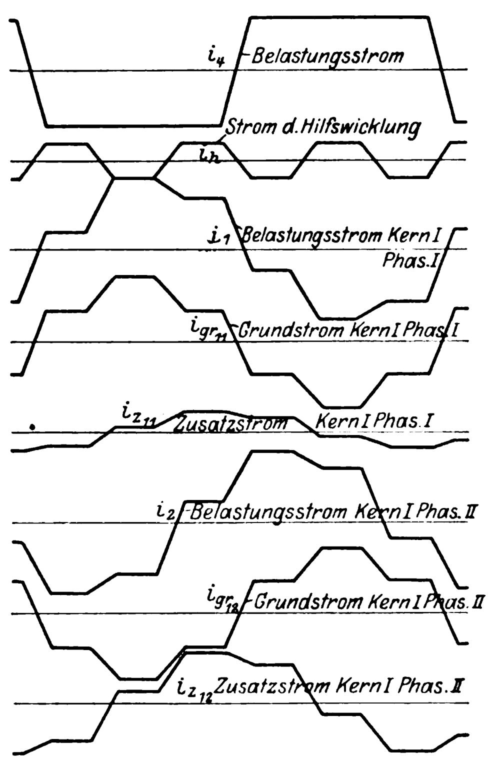


Bild 7. Zeichnung 1120. Zerlegung des Belastungsstromes in den Wicklungen eines Transformatorkernes in Grundstrom und Zusatzstrom.

Hieraus sieht man, daß der Zusatzstrom dem tatsächlichen Strom proportional aber gegen diesen zeitlich verschoben, wie es Bild 7 zeigt, in der die Stromzerlegung für $\beta = 15^0$ durchgeführt ist. Durch Änderung der zusätzlichen Ströme bei der Wendung eines Sekundärstromes werden Spannungen in den Wicklungsteilen mit n bezw. m Windungen induziert, da der primäre Zusatzstreufluß teils mit der einen, teils mit der anderen Wicklung verkettet ist. Seien Λ_n bezw. Λ_m die zugehörigen Leitwerte mit der Dimension Volt. sec/Amp. Windungszahl², dann werden in den Wicklungen der Phase 1 und 2 auf Kern 1 unter Berücksichtigung der Gleichung (15) bei Wendung auf Kern 1 die Spannungen induziert:

$$e_{rz\,11} = -n^2\,\Lambda_n\,\frac{d}{dt}\,(i_{z\,11}) = n^2\,\Lambda_n\,\frac{(n-m)\cdot l\cdot m}{3\,n_0^2\,(n+m)}\cdot\frac{d\,i_4}{dt} \qquad (16\,a)$$

$$e_{rz\,12} = +m^2\,\Lambda_m\,\frac{(n-m)\cdot l\cdot n}{3\,n_0^2\,(n+m)}\cdot\frac{d\,i_4}{dt}. \qquad (16\,b)$$

Sinngemäß folgen die Streuspannungen in den anderen Wicklungsteilen, wobei deren Summe für alle n bezw. m Wicklungen gleich Null ist.

Infolge der primären Zusatzstreuung wird nun eine geringe Spannungserniedrigung zwischen den Bürsten eintreten, da die zusätzlichen Streuspannungen in den zwei Phasen eines Transformators bei Stromwendung auf dem dritten Kern nicht entgegengesetzt gleich sind. Diese Erniedrigung ist Null, wenn die Stromwendung auf dem Transformator mit $m = 0$ vor sich geht, und ein Maximum, wenn sie auf dem Transformator mit $n = m$ stattfindet. Die Gleichspannung schwankt also mit der 3 fachen Frequenz des Drehstromes. Die Amplitude dieser Schwankung ist gering, weil die primäre Zusatzstreuung nur einen Teil der Hauptstreuung ausmacht und sich außerdem teilweise in den gegengeschalteten Wicklungen weghebt.

Der Zusatzstrom in der Sekundärwicklung jeden Kernes ist:

$$i_{z4} = i_{z5} = i_{z6} = -i_h \cdot \frac{l'}{l} = \frac{1}{3}\,(i_4 + i_5 + i_6), \tag{17}$$

während er für die Hilfswicklung direkt durch deren Strom i_h gegeben ist. Dieser Strom ist in Bild 7 dargestellt. Er hat wie der Zusatzstreufluß für alle Kerne gleiche Größe und Richtung. Sieht man von der Spannung ab, die den Ohmschen Abfall in der Hilfswicklung deckt, dann wird in dieser Wicklung keine Spannung induziert und sie umfaßt keinen Fluß. Der gesamte sekundäre Zusatzstreufluß kann also als mit der eigentlichen Sekundärwicklung mit dem Leitwert Λ_h verkettet angesehen werden. Dann wird in jeder Sekundärwicklung, wenn auf einem Kern die Wendung vor sich geht, folgende Spannung induziert:

$$e_{rh} = -l^2\, \Lambda_h \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dt}\,(i_4 + i_5 + i_6). \tag{18}$$

Ebenso wie durch die Hauptstreuung in den nicht kurzgeschlossenen Spulen induzierte Spannungen sich im Außenkreise wegheben, ist das auch hier der Fall, da die sekundären Zusatzstreuspannungen gleich groß und gleichgerichtet sind.

d) In sämtlichen l sekundären Windungen eines Kernes zusammen ergibt sich die induzierte Spannung aus der vom Hauptfluß des betreffenden Kernes induzierten, vermindert um die Hauptstreuspannung und um die sekundäre zusätzliche Streuspannung. Die vom Hauptfluß induzierte ist gegeben durch die Klemmenspannung unter Berücksichtigung des primären Ohmschen Spannungsabfalles und der primären Zusatzstreuung. Bezeichnet nun E_{10}, E_{20}, E_{30} die primären Phasenspannungen im Leerlauf, E_1, E_2, E_3, die bei Belastung von den Hauptflüssen Φ_1, Φ_2, Φ_3 zu induzierenden Gegenspannungen, dann gelten die Beziehungen:

$$n \cdot \Phi_1' - m\,\Phi_3' = -K\,E_1 = K\,(E_{10} - i_1 \cdot r_1 - e_{z11} - e_{z31}); \tag{19}$$

$$n \cdot \Phi_2' - m\,\Phi_1' = -K\,E_2 = K\,(E_{20} - i_2 \cdot r_1 - e_{z22} - e_{z12}); \tag{20}$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0; \tag{21}$$

Die in der Sekundärwicklung des Kernes 1 vom Hauptfluß induzierte Spannung E_4 ist gegeben durch:

$$E_4 = -\frac{l}{K}\,\Phi_1'. \tag{22}$$

Der Ohmsche Abfall pro Wicklung des ganzen Kerns sei $i_4 \cdot r_2$, dann ergibt sich für die sekundäre Klemmenspannung sämtlicher Windungen eines Kernes der Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} E_{4K} = &-\frac{l}{n_0^2}\,(n\,E_{10} - m\,E_{20}) - \frac{l^2}{n_0^2}\,r_1\,(2\,i_4 \quad i_5 - i_6) - i_4 \cdot r_2 - \\ &- i_4' \left[\frac{2}{3}\,l^2\,\Lambda + \frac{l^2}{3}\,\Lambda_h + \frac{l^2\,m\,n}{3\,n_0^2\,(n+m)}\,(n\,\Lambda_n + m\,\Lambda_m)\right] \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Der Hauptstreufluß und der sekundäre Zusatzstreufluß sind also in ihrer Wirkung unabhängig von den Werten n und m, so daß also in dieser Hinsicht alle Kerne des Transverters gleichwertig sind. Der Ohmsche Widerstand der Primärwicklung ist je nach Größe von n und m verschieden, da man für alle Primärwicklungen das gleiche Kupfer verwenden wird, doch ist der Einfluß für die Stromwendung bedeutungslos. Die zusätzliche primäre Streuung ist zwischen Null und einem Höchstwert veränderlich. Sie macht in einem durchgerechneten Beispiel maximal 4% von der Hauptstreuung für den Transverter mit $n = m$ aus. Der Unterschied ist größer als zwischen den einzelnen Wicklungen bei der Stromwendung zulässig, so daß durch je eine Drosselspule für jede Phase, die richtig eingestellt wird, Abhilfe geschaffen werden muß. In dem berechneten Beispiel erforderten diese Spulen noch nicht 0,4% des gesamten aktiven Materials, sind also vom wirtschaftlichen Standpunkte aus nebensächlich.

Gleichung (23) stellt, wenn man noch den Widerstand unter den Bürsten und in den Zuleitungen zum Kollektor berücksichtigt, die Grundgleichung für die Stromwendung dar. Sie unterscheidet sich durch nichts von der entsprechenden Gleichung normaler Maschinen, wenn man statt der vom Hauptfluß induzierten Spannung die sonst von den Wendepolen induzierte einsetzt. Ein Ohmscher Spannungsverbrauch tritt hier wie dort auf, und ebenso sind die hier betrachteten Streuspannungen gleichwertig den sonst Reaktanzspannungen genannten und auch nur abhängig von der Stromänderungsgeschwindigkeit in den kurzgeschlossenen Spulen. Man kann also die Ergebnisse normaler Gleichstrommaschinen ohne weiteres übernehmen, soweit nicht noch zu betrachtende Besonderheiten des Transverters Abweichungen bedingen.

4. Stromwendung.

a) Da ein dem Strom proportionales Wendefeld hier zunächst nicht zur Verfügung steht, muß man die Wendung dadurch bewerkstelligen, daß man immer diejenigen Lamellen kurz schließt, in denen der Hauptfluß die Spannung induziert,

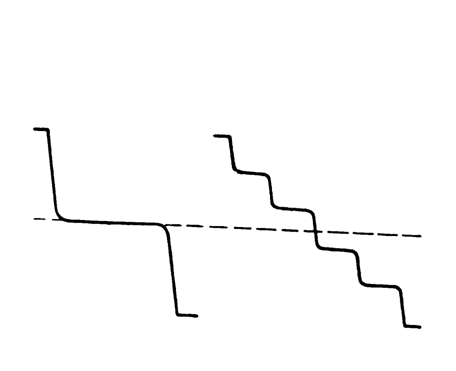


Bild 8. Zeichnung 1110. Stromwendung in Spulen ohne Selbstinduktion bei hohem Zuleitungswiderstand. Eine bzw. vier Spulen im Kurzschluß.

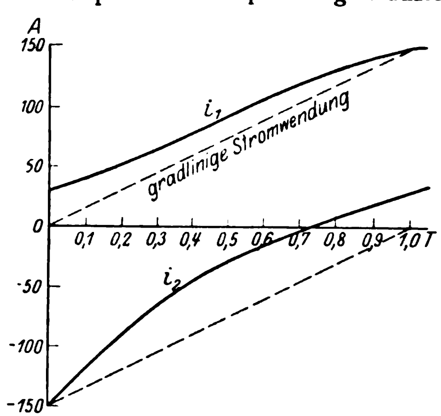


Bild 9. Zeichnung 1109. Stromverlauf in den kurzgeschlossenen Spulen während einer Lamellenperiode. Umformung von Drehstrom in Gleichstrom.

die während der Kurzschlußzeit gerade ausreicht, den Strom umzukehren. Diese Spannung ist selbstverständlich während der Kurzschlußzeit nicht konstant, so daß also die Stromwendung zunächst nicht geradlinig vor sich gehen kann. Bei der Umformung von Drehstrom in Gleichstrom haben Gleichstrom und induzierte Spannung in der Sekundärwicklung dieselbe Richtung, so daß die Wendung nur nach dem Durchgang der Spannung durch Null, also unter dem Einfluß einer zunehmenden Wendespannung stattfinden kann. Es würde in diesem Falle, wenn der Zuleitungswiderstand zum Kollektor klein wäre, Unterkommutierung, d. h. anfangs verringerte, nachher erhöhte Stromänderungs-Geschwindigkeit vorliegen. Ebenso würde sich bei der Umformung von Gleichstrom in Drehstrom, die nach dem Durchgang der induzierten Spannung durch Null erfolgt, Überkommutierung einstellen.

Der geschilderte Stromverlauf wird noch wesentlich durch den erheblichen Zuleitungswiderstand zwischen Wicklung und Kollektor beeinflußt, da man diesen Zuleitungen einen möglichst kleinen Querschnitt gibt, um an Kupfer zu sparen. Wenn man einmal annimmt, die Spule selbst hätte keinen Widerstand und keine Selbstinduktion, und es wäre nur der Zuleitungswiderstand vorhanden, der gegenüber dem Bürstenübergangswiderstand groß sei, dann wird der Strom der kurzgeschlossenen Spule sehr schnell auf Null sinken, da der Strom in beiden Zuleitungen gleich groß sein muß. Erst ganz gegen Beendigung des Kurzschlusses

wird der Bürstenübergangswiderstand so groß, daß die Spule den Endwert des Stromes erreicht. Der Stromverlauf entspricht dann dem Bild 8. Sind mehrere Spulen gleichzeitig im Kurzschluß, dann wird sich der Strom gleichmäßig auf alle Zuleitungen verteilen, so daß der Stromverlauf treppenförmig entsprechend Bild 8 wird. Durch die tatsächlich vorhandene Selbstinduktion und den Widerstand der Spule wird der Vorgang verwischt, und der Stromverlauf geht je nach dem Überwiegen von Selbstinduktion oder Zuleitungswiderstand anders vor sich. Bei der Umformung von Drehstrom in Gleichstrom wird also die Unterkommutierung auf alle Fälle schwächer oder sogar in Überkommutierung umgewandelt. Bild 9 zeigt den Stromverlauf in einer Spule für den angegebenen Fall und für ein zahlenmäßig berechnetes Transverterbeispiel bei Vollast. Es handelt sich also nicht um einen angenommenen Stromverlauf, sondern um einen mit ausführbaren Werten von Selbstinduktion und Widerstand errechneten. Durch die erreichte Überkommutierung wird der Strom der ablaufenden Bürstenkante verringert und damit die Stromwendung verbessert. Bei der Umformung von Gleichstrom in Drehstrom ist die ablaufende Bürstenkante sowieso schon vom Strom entlastet, so daß die Erscheinung dort nicht so wesentlich ist. Andererseits wird dabei die Stromwendung zu Anfang, wo sie an sich schon wegen der hohen induzierten Spannung schnell vor sich geht, weiter beschleunigt, so daß dann leicht eine Überlastung der auflaufenden Bürstenkante eintrittt. Diesem Nachteil kann durch größere Breite der auflaufenden Bürstenkante und damit vergrößerte Kollektorfläche abgeholfen werden.

b) Wie bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen lassen sich auch hier Schleifen- und Wellenwicklungen ausführen. Bei Schleifenwicklung werden die Enden einer Spule zu benachbarten Lamellen geführt, bei Wellenwicklung zu Lamellen, die um rund eine doppelte Polteilung voneinander entfernt sind. Je nach Wahl der Wicklung wird die Stromwendung in Einzelheiten anders verlaufen. Zunächst soll eine Schleifenwicklung mit mehreren Spulen hintereinander pro Kern und Kollektor betrachtet werden. In diesem Falle sind die Enden der ersten Spule eines Kernes zur ersten und zweiten Lamelle geführt, die Enden der zweiten Spule des gleichen Kerns zur zweiten und dritten Lamelle usw. Die Spulen des zweiten und dritten Kernes usw. folgen darauf in gleichem Sinne und ergeben zusammen einen geschlossenen Kreis. Die zu einem Kern und Kollektor gehörige Spulen liegen dabei so dicht nebeneinander, daß ihre gegenseitige Streuung im Vergleich zur Hauptstreuung vernachlässigt werden kann. Bei richtiger Einstellung des mittleren Wendefeldes geht in dem entsprechenden Fall bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen die Stromwendung auch bei ungleichförmigem Wendefeld unter Berücksichtigung der gegenseitigen Dämpfung der kurzgeschlossenen Spulen und des veränderlichen Übergangswiderstandes der ablaufenden Bürsten noch einwandfrei vor sich. Da aber beim Transverter zwischen der eigentlichen Wicklung und dem Kollektor noch die Zuleitungen liegen, die eine Länge von mehreren Metern haben und, um Kupfer zu sparen, geringen Querschnitt also sehr großen Widerstand besitzen, macht sich der veränderliche Übergangswiderstand unter den Bürsten erst ganz gegen Ende des Ablaufs bemerkbar. Hier tritt also trotz der gegenseitigen Dämpfung der gleichzeitig kurzgeschlossenen Spulen eine unzulässig hohe Stromdichte auf, die einen Dauerbetrieb unmöglich macht. Diese Wicklungsanordnung ist also für große Transverter unbrauchbar.

Läßt man bei einer Wellenwicklung alle Bürstenstifte stehen, dann treten die einzelnen Spulen eines Kernes nacheinander aus dem Kurzschluß aus. Genau wie im vorigen Absatz kann dann die Stromwendung nicht einwandfrei vor sich gehen. Läßt man nur zwei Bürstenstifte stehen, dann liegen zwischen zwei kurzgeschlossenen Lamellen einmal Spulen, die sich alle auf einem Kern befinden, dann wieder Spulen, die sich auf verschiedenen Kernen befinden. Die induzierte Wendespannung ist



davon unabhängig. Die Streuspannung, der diese das Gleichgewicht halten soll, ist einmal durch Selbstinduktion und Gegeninduktion der wendenden Spulen zusammen bestimmt, das andere Mal durch Selbstinduktion allein. Die gesamte Streuspannung kann also erhebliche Unterschiede aufweisen und eine richtige Wendespannung läßt sich daher nicht erreichen, so daß die Wellenwicklung überhaupt ungeeignet ist.

Soll also eine Maschine größter Leistung gebaut werden, dann muß man davon Abstand nehmen, mehrere Spulen pro Kern und Kollektor hintereinander zu schalten. Bei ganz kleinen Transvertern, wie sie in England zur Ausführung kamen, mögen sich die gezeigten Nachteile nicht so störend bemerkbar machen. Bei großen dagegen kann man nur dann mit Sicherheit auf einwandfreien Betrieb rechnen, wenn die Stromwendung möglichst weitgehend von der Beschaffenheit und Wirkung der stromwendenden Kohle unabhängig ist. Wenn also die bis jetzt ausgeführten Transverter mit 18 Kernen mit je 4 Spulen pro Kern und Kreis hintereinander auskamen, dann muß man bei großen Ausführungen, um die gleiche Spulenzahl zu erreichen, zu 72 Kernen übergehen. Wider Erwarten ist eine erhebliche Verteuerung des Transverters damit nicht verbunden. Sie beträgt schätzungsweise nur einige Prozente und ist deshalb zunächst bedeutungslos. Für die angenommene Anwendung im praktischen Betrieb wird dadurch lediglich der Punkt, wo die Gleichstromübertragung wirtschaftlich wird, verschoben, nicht aber die Wirtschaftlichkeit an sich in Frage gestellt. Wie man nämlich durch den Übergang von zwei Dreiphasen- zu einem Sechsphasentransformator das Eisen von rund $1^1/_2$ Jochen bei gleicher Induktion sparen kann, wird aus einem Sechsphasentransformator ein 12- oder 24phasiger, indem man die Kerne entsprechend oft teilt und neue Hilfsjoche einlegt. Dabei erhöht sich das Eisengewicht lediglich um die der größeren Phasenzahl entsprechende höhere Anzahl von Endabständen. Für die Hilfsjoche bleibt der Materialverbrauch konstant, denn mit deren Vermehrung sinkt im gleichen Maß der von ihnen zu führende Fluß und damit der Querschnitt. Der Kupferaufwand in den Zuleitungen wird außerdem verringert, da stets eine größere Anzahl von ihnen an der Stromwendung beteiligt sind und ihr Querschnitt deshalb verringert werden kann, wodurch der angegebene geringe Mehrpreis erklärlich wird.

Ein großer Vorteil der Wellenwicklung ist es, daß der Bürstensatz nicht mit der normalen Drehzahl von 3000/Min. umlaufen muß, sondern daß diese durch zweckmäßige Wahl der Polzahl beliebig festgesetzt werden kann. Man verringert dadurch die Zentrifugalkräfte und erhält bequemere Bürstenabmessungen. Bei Schleifenwicklung läßt sich das ebenfalls erreichen, wenn man Lamellenzahl und Bürstenzahl auf das Vielfache erhöht, entsprechende um die doppelte Polteilung versetzte Lamellen parallel schaltet und die ebenfalls parallel geschalteten Bürsten mit entsprechend verringerter Drehzahl umlaufen läßt. Damit ist die Ausführungsform der Wicklung in den wesentlichen Zügen endgültig festgelegt.

c) Es soll nun festgestellt werden, wie der Strom in den kurzgeschlossenen Spulen tatsächlich verläuft. Dabei ist wie im Anfang dieses Abschnittes gefordert, angenommen, daß stets diejenigen Lamellen kurz geschlossen werden, in denen gerade die vom Hauptfluß induzierte Wendespannung die verlangte Größe hat. Eine Schätzung der Genauigkeit, mit welcher dies erreicht werden kann, zeigt, daß die Abweichungen so g ring sind, daß man die theoretisch erforderliche Wendespannung zunächst als vorhanden ansehen kann. Die genaue Berechnung des Stromverlaufes in den kurzgeschlossenen Spulen ist nun beim Transverter absolut zulässig im Gegensatz zu normalen Gleichstrommaschinen, weil bei diesen die Rechnungsunterlagen sehr ungenau, beim Transverter aber genau bekannt sind. Die Selbstinduktion läßt sich beim Transverter mit großer Sicherheit bestimmen, bei der Gleichstrommaschine ist sie nicht einmal konstant je nach Lage der Spule zum Wendepol. Bei Gleichstrommaschinen macht sich die Koppelung mit anderen wendenden Spulen störend bemerkbar und ist nicht genau zu berechnen, beim Transverter fehlt sie ganz. Bei



Gleichstrommaschinen hat der mit der Stromdichte veränderliche Bürstenübergangswiderstand einen bedeutenden Einfluß, kann aber rechnerisch nicht genau erfaßt werden, da die Beziehungen zwischen Stromdichte und Spannungsabfall nicht festliegen. Beim Transverter verringert der konstante Widerstand der Zuleitungen, der ein Vielfaches des Bürstenübergangswiderstands ausmacht, diese Unsicherheit, so daß insgesamt mit konstantem Widerstand zwischen Wicklung und Kohle gerechnet werden kann. Bei einer Gleichstrommaschine ist das Wendefeld infolge der Streuung, der Gegenamperewindungen des Ankers und der Oberwellen durch Nuten nie genau bekannt. Beim Transverter kann man es mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Oberwellen des Hauptfeldes induzieren bei Gleichstrommaschinen in den kurzgeschlossenen Spulen unberechenbare Spannungen, beim Transverter fehlen diese. Bei Gleichstrommaschinen sind also sämtliche für die Berechnung des Stromverlaufs in einer kurzgeschlossenen Spule erforderlichen Werte ganz unsicher zu ermitteln, beim Transverter lassen sie sich genügend genau erfassen. Die Ermittlung des Stromverlaufs in der kurzgeschlossenen Spule besitzt also hier große Berechtigung und darf wohl zur Grundlage für die Kritik der gesamten Stromwendung und damit der Ausführbarkeit des Transverters gemacht werden.

Zunächst ist nun beim Transverter die Kurzschlußdauer fest bestimmt. Die Stromwendung soll so gestaltet werden, daß zwischen der ablaufenden Bürstenkante und Lamelle im Augenblick der Beendigung des Kurzschlusses eine möglichst geringe Spannung auftritt. Daß dies hier die grundlegende Bedingung ist, wird später erläutert. Dementsprechend wird man den Kurzschluß möglichst früh beginnen lassen, z. B. bei Vollast bei der Umformung in Gleichstrom ungefähr, wenn die induzierte Spannung durch Null geht. Der Zeitpunkt des Austrittes ergibt sich aus der höchst zulässigen Spannung. Damit ist die Kurzschlußdauer und dementsprechend die Bürstenbreite durch die maximale Lamellenspannung festgelegt. Wenn diese heruntergeht, steigt die Bürstenbreite im gleichen Verhältnis mit der dann zulässigen größeren Kurzschlußdauer. Wird die zulässige Spannung bei Bürstenablauf erhöht, dann steigt die Bürstenbreite ebenso, ist aber in jedem Fall eindeutig festgelegt. Hierin liegt ein erheblicher Unterschied gegenüber Gleichstrommaschinen mit Wendepolen, wo die Bürstenbreite keineswegs festliegt.

Die Änderungen des Stromes der kurzgeschlossenen Spulen hängen von der Anzahl der gleichzeitig im Kurzschluß befindlichen Spulen lediglich insofern ab, als der Stromverlauf durch die gemeinsamen Zuleitungen zwischen Wicklung und Kollektor ebensoviel Stufen aufweist, wie Spulen gleichzeitig im Kurzschluß sind. Da nun die davon abhängigen Unterschiede nicht wesentlich sind, genügt es, den Fall mit stets zwei Spulen im Kurzschluß zu betrachten. Bei einer größeren Spulenzahl im Kurzschluß ist die Lösung nur durch punktweise Integration möglich, woraus nicht viel Allgemeines zu entnehmen ist. Es wurde in Gleichung (23) gezeigt, daß man für die rechnerische Behandlung der Stromwendung den primären und sekundären Ohmschen Spannungsabfall zusammen durch einen Ausdruck $r_0 \cdot i$ berücksichtigen kann, wobei i der Strom der wendenden Spule und r_0 der nach Gleichung (23) für eine Spule umgerechnete Widerstand ist. Ebenso lassen sich die primären und sekundären Streuspannungen durch einen Ausdruck $L \cdot \frac{di}{dt}$ erfassen. Statt des veränderlichen Übergangswiderstandes unter den Bürsten mit dem Zuleitungswiderstand zusammen soll ein konstanter Widerstand r' eingesetzt werden, was mit Rücksicht auf das oben Gesagte zulässig ist. Während des Kurzschlusses ist die sekundäre Spannung $E_{4K} = O$. Für die Leerlaufsspannung $n \cdot E_{10} - m \cdot E_{20}$ kann man, da diese zur Kurzschlußzeit gradlinig durch Null geht, einen Ausdruck $a + b \cdot t$ einsetzen mit den Indizes 1, 2, . . . für die verschiedenen Spulen. Die zuerst kurzgeschlossene Spule führe den Strom i_1, die zweite den Strom i_2, die natürlich nicht mit den früheren

primären Phasenströmen zu verwechseln sind. Der Ordnung halber sei nochmals darauf hingewiesen, daß den folgenden Untersuchungen stets die richtige Wendespannung zugrunde gelegt ist. Dann gilt:

$$L \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 (r_0 + 2r') - (J + i_2) r' = a_1 + bt; \tag{24}$$

$$L \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 (r_0 + 2r') - (i_1 - J) r' = a_2 + bt; \tag{25}$$

Daraus folgt durch einfache Umrechnung:

$$2i_1 = K_1 \cdot e^{-\frac{r_0 + r'}{L} t} + K_2 \cdot e^{-\frac{r_0 + 3r'}{L} t} + \frac{2bt}{r_0 + r'} - \frac{2bL}{(r_0 + r')^2} + \frac{a_1 + a_2}{r_0 + r'} + \frac{a_1 - a_2 + 2Jr'}{r_0 + 3r'}; \tag{26}$$

$$2i_2 = K_1 \cdot e^{-\frac{r_0 + r'}{L} t} - K_2 \cdot e^{-\frac{r_0 + 3r'}{L} t} + \frac{2bt}{r_0 + r'} - \frac{2bL}{(r_0 + r')^2} + \frac{a_1 + a_2}{r_0 + r'} - \frac{a_1 - a_2 + 2Jr'}{r_0 + 3r'}. \tag{27}$$

Bei stets 2 Spulen im Kurzschluß ergeben sich die 3 Unbekannten K_1, K_2 und a_1 aus den Bedingungen: $t = 0$; $i_1 = i_x$; $i_2 = -I$ und $t = T$; $i_1 = +I$; $i_2 = i_x$; weiter sei zur Vereinfachung in den späteren Rechnungen gesetzt: $\frac{r_0 + r'}{L} = \delta_1$; $\frac{r_0 + 3r'}{L} = \delta_2$.
Es hat keinen Zweck, die endgültige Lösung der Gleichung (26) und (27) anzuschreiben, da diese zu umständlich sind und nichts Neues sagen. Die beiden zeigen bereits folgendes: Der Strom steigt in beiden Spulen mit gleicher Geschwindigkeit $\frac{2bt}{r_0 + r'}$, an. Darüber lagert sich eine abklingende, in beiden Spulen gleichgerichtete Exponentialfunktion. Dann überlagert sich in beiden Spulen eine weitere Exponentialfunktion, die in beiden von entgegengesetzter Richtung ist und erheblich schneller abklingt. Deren Konstante hat, wie die Ausrechnung zeigt, stets entgegengesetztes Vorzeichen wie die der ersten, so daß sich die beiden in der austretenden Spule entgegenwirken, in der eintretenden dagegen gleichsinnig verlaufen. Darin kommt zum Ausdruck, daß die Ströme der beiden Spulen sich infolge der Ohmschen Koppelung einander auf ein bestimmtes Maß nähern müssen und daß je nach dem Überwiegen von Selbstinduktion oder Ohmschem Widerstand die Stromwendung mit Über- oder Unterkommutierung vor sich geht. Der zahlenmäßig berechnete Transverter gibt den Stromverlauf gemäß Bild 9 bei Umformung von Drehstrom in Gleichstrom. Aus dem Bild läßt sich die Stromdichte unter den Bürsten ablesen. Infolge der Ohmschen Koppelung wird die Änderungsgeschwindigkeit des Stromes in einer Spule während der ersten Periode des Kurzschlusses vergrößert, während der zweiten verringert. Ferner wird im Leerlauf ebenfalls ein Strom in den kurzgeschlossenen Spulen induziert, der sich primär als Blindstrom darstellt. Es treten dadurch zusätzliche Verluste auf, die bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen mit Wendepolen nicht vorhanden sind. Bild 10 stellt diesen Leerlaufskurzschlußstrom dar, der wieder mit den Werten eines berechneten Transverters ermittelt ist und hier maximal die Größenordnung von 25% des Vollaststromes hat. Ein ähnlicher Wert wird stets erreicht werden, denn bei Leerlauf wirkt während der halben Zeit die halbe Wendespannung wie bei Vollast in der einen Richtung und nachher in der entgegengesetzten. Diese reicht also aus, um bei kleinem Ohmschen Widerstand des Kurzschlußkreises ein Viertel der gesamten Vollast Stromänderung hervorzubringen, d. h. $^1/_2$ des Vollaststromes. Da der Ohmsche Widerstand jedoch ziemlich groß ist, wird immer nur ein Teilbetrag erreicht. Die mittlere Leerlaufs-Wendespannung muß so groß sein, daß die der Spule zugeführte Leistung die Stromwärmeverluste deckt. Bild 11 stellt nun den Stromverlauf bei Vollast für Umformung von Gleichstrom in Drehstrom dar. Es stellt sich tatsächlich der äußerst steile Abfall des Stromes zu Anfang des Kurzschlusses ein und der sehr flache Verlauf unter der ablaufenden Bürstenkante.



Der Wert a_1 ist ein Maß für die Verschiebung der Bürsten aus der Null-Lage und gibt an, welche Spannung in der ersten kurzgeschlossenen Spule zu Beginn der betrachteten Periode induziert wurde. Es ist damit zugleich der Mittelwert der Wendespannung. Aus Gleichung (26) ergibt sich hierfür nach Einsetzen der Konstanten und einigen Umrechnungen, wobei $(a_1 - a_2) = b \cdot T$:

$$\frac{2\,a_1}{r_0 + r'} = \left(J - \frac{b\,T}{r_0 + r'}\right)\left[\frac{1 + e^{-\delta_1 T}}{1 - e^{-\delta_1 T}} + \frac{r_0 + r'}{r_0 + 3\,r'} \cdot \frac{1 - e^{-\delta_1 T}}{1 + e^{-\delta_1 T}}\right] + \frac{2\,b\,L}{(r_0 + r')^2}. \qquad (28)$$

Der Winkel γ, um den der Bürstensatz aus der Nullage verschoben werden muß, damit in den kurzgeschlossenen Spulen die richtige Wendespannung induziert wird, folgt aus (28), da $b \cdot \frac{T}{E_d}$ unabhängig von Spannung und Frequenz und $\frac{b}{E_d}$ proportional der Frequenz zu:

$$\gamma = \frac{a_1 \cdot K_3}{E_d} = \left[\left(J - \frac{b\,T}{r_0 + r'}\right) f_1(v) + \frac{2\,b\,L}{(r_0 + r')^2}\right] \frac{r_0 + r'}{2\,E_d} \cdot K_3 = \frac{J}{E_d} \cdot f_2(v) + f_3(v). \qquad (29)$$

Der Winkel der Bürstenverschiebung eines gegebenen Transverters ist also bestimmt durch das Verhältnis Belastungsstrom zu Klemmenspannung, multipliziert mit einer

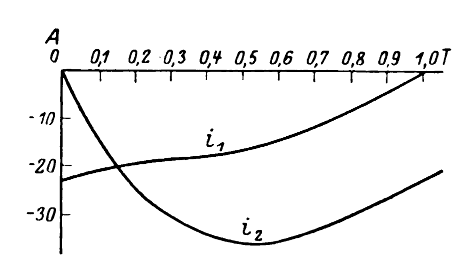


Bild 10. Zeichnung 1108. Kurzschlußstrom bei Leerlauf während einer Lamellenperiode.

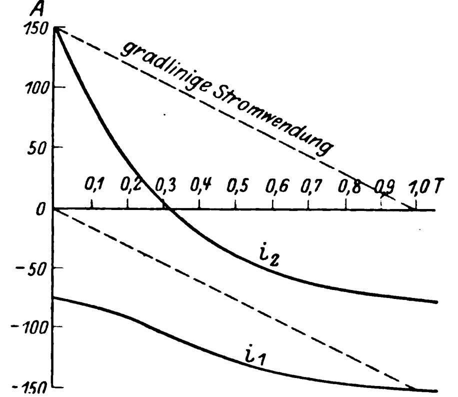


Bild 11. Zeichnung 1107. Stromverlauf in den kurzgeschlossenen Spulen während einer Lamellenperiode. Umformung von Gleichstrom in Drehstrom.

Funktion der Frequenz, wo hinzu noch ein weiterer frequenzabhängiger Ausdruck zu addieren ist. Diese Gleichung bildet später die Grundlage für die Schätzung der Genauigkeit, mit der die erforderliche Wendespannung eingestellt werden kann.

d) Unter Einwirkung der veränderlichen Bürstenauflageflächen und damit des veränderlichen Bürstenübergangswiderstandes kann die Stromwendung nur verbessert werden. Bei Unterkommutierung beschleunigt der erhöhte Übergangswiderstand die Wendung, bei Überkommutierung verzögert er sie. Der tatsächliche Stromverlauf weicht also um kleine Beträge von dem bisher ermittelten ab, doch ist es überflüssig darauf einzugehen, da der Unterschied bedeutungslos sein wird. Handelt es sich nun darum, einen Transverter zu entwerfen, welcher nur für Umformung von Gleichstrom in Drehstrom bestimmt ist, dann kann man die ablaufende Bürstenkante ganz wesentlich kürzer machen als die auflaufende, z. B. durch dreieckige Kohlen oder dergleichen, da die ablaufende Bürstenkante in diesem Falle nur einen geringen Strom führt. Der Bürstenübergangswiderstand wird dann gegen Ende des Kurzschlusses wesentlich stärker erhöht, als im Normalfalle möglich wäre. Bei einem derartigen Transverter ist also die Stromwendung noch mehr verbessert. Da die rechnerischen Unterlagen über den Übergangswiderstand von Kohlenbürsten zu ungenau sind, hat es keinen Zweck, diese Erscheinung rechnungsmäßig zu verfolgen.

Tatsächlich ist das bisher angenommene theoretisch richtige Hauptfeld nicht immer vorhanden. Der hohe Zuleitungswiderstand bewirkt nun unabhängig von der Anzahl der gleichzeitig kurzgeschlossenen Spulen, daß ein fehlerhaftes Wendefeld einer

Spule teilweise ausgeglichen wird. Im letzten Zeitraum des Kurzschlusses muß die Wendespannung den Ohmschen Abfall in der einen Zuleitung ausgleichen, da in der anderen, die nahezu stromlos bereits, keiner auftritt. Ist die Wendung zurückgeblieben, dann drängt der trotzdem in der austretenden Zuleitung auftretende Spannungsabfall auf Beschleunigung der Wendung. Er gleicht den Abfall in der anderen Zuleitung aus, so daß die Wendespannung voll für die Stromwendung zur Verfügung steht. Ist die Wendung weiter fortgeschritten als erforderlich, dann bewirkt der vergrößerte Spannungsabfall eine Verzögerung, da nur ein entsprechend kleinerer Teil der Wendespannung für die Umkehr der Stromrichtung verfügbar ist. Infolge der Ohmschen Koppelung wird hierbei der Strom in den anderen Spulen teilweise entgegengesetzt beeinflußt. Es können also Ungleichheiten der verschiedenen Spulen bzw. der Wendespannung ausgeglichen werden, wie das bei anderen Gleichstrommaschinen durch den Bürstenübergangswiderstand und die Dämpfung der übrigen kurzgeschlossenen Spulen möglich ist. Die Ohmsche Koppelung bewirkt jedoch von selbst eine Korrektur, während die Dämpfung diese nur ermöglicht. Da weiter der Spannungsabfall in den Zuleitungen der Größenordnung nach ein Mehrfaches des Spannungsabfalles unter den Bürsten ausmacht, ist die Ausgleichswirkung erheblich energischer und wird auch eine für alle Spulen falsche Wendespannung teilweise ausgleichen können. Damit verbunden ist die Erscheinung, daß die Wendung beim Eintritt einer Spule in den Kurzschluß stets steiler verläuft als der Wendespannung und Selbstinduktion entspricht, beim Austritt dagegen flacher, wodurch in jedem Fall die ablaufende Bürstenkante geschont wird. Die Zuleitungen zwischen Wicklung und Kollektor begünstigen also in mehrfacher Hinsicht die Stromwendung des Transverters.

5. Abweichung der Wendespannung vom Sollwert.

Wie schon gesagt, ist die tatsächlich vorhandene Wendespannung nicht genau gleich der verlangten. Die nachfolgende zahlenmäßige Bestimmung der Fehlergröße hat natürlich keine allgemeine Bedeutung. Es ergibt sich daraus nur, daß im betrachteten Gebiete der Transvertergröße dieser Fehler kein Hindernis für die technische Verwendbarkeit bildet.

a) Wenn die induzierte Wendespannung in allen Spulen während des Kurzschlusses gleich sein soll, müssen die Flüsse aller Kerne von genau gleicher Größe und stets um denselben Winkel α gegeneinander verschoben sein. Die Werte n und m müssen dann bestimmte teilweise gebrochene Zahlen sein, können aber praktisch nur ganze sein. Daraus folgt, daß die Flüße sowohl der Größe wie der Richtung nach in einzelnen Kernen vom Sollwert abweichen. Ein Fehler in der absoluten Größe ist unbedenklich. Dann weicht die induzierte Wendespannung für alle Belastungen um gleiche prozentuale Anteile vom Sollwert ab. Die bereits eingeführte Drosselspule je Phase kann nun nach Belieben auf eine veränderte Reaktanzspannung eingestellt werden, so daß diese und die tatsächliche vorhandene Wendespannung sich vollkommen das Gleichgewicht halten. Der Einfluß der unterschiedlichen Größe der Windungsspannung kann also gleich Null gesetzt werden.

Wenn dagegen die Winkellage unrichtig ist, dann ist die induzierte Wendespannung unabhängig von der Belastung, während der ganzen Kurzschlußzeit um einen bestimmten Betrag zu hoch oder zu niedrig. Dementsprechend ist es nicht möglich, sie durch eine zusätzliche Induktion für alle Belastungen richtig auszugleichen. Seien nun Δn und Δm die Abweichungen von den Sollwerten n und m, dann ergibt sich aus Bild 1 der Fehlerwinkel zu:

$$\Delta\beta = \frac{\Delta n \cdot \sin\beta - \Delta m \sin(60 - \beta)}{n_0}. \qquad (30)$$

Man muß also für kleine Verschiebungswinkel den Wert Δm klein machen, für

große ebenso den Wert Δn. Bei kleinen Winkeln β ist also auch theoretisch m als ganze Zahl zu wählen, bei großen dagegen n. Da der Sinus des Vielfachen eines kleinen Winkels gleich dem Vielfachen des Sinus dieses Winkels ist, wird die verlangte Bedingung für eine ganze Reihe von Transformatoren erfüllt. Es bleibt dann nur im Gebiet mittlerer Verschiebungswinkel jeweils ein kleiner Fehler übrig, der sich unter Umständen durch Vergrößerung oder Verkleinerung von n und m um je 1 verringern läßt. Aus vorstehendem folgt, daß für die gesamte Windungszahl, die Lamellenspannung und den Kernquerschnitt im Gegensatz zu normalen Transformatoren nur einzelne bestimmte Werte möglich sind, sofern man die Abweichungen der Wendespannung vom Sollwert klein halten will. In einem berechneten Beispiel ist die Windungszahl der kleinsten Gruppe bei einer Netzspannung von 6600 Volt mit 3 angenommen. Dann ergibt sich bei 72 Kernen die maximale Abweichung von der mittleren Wendespannung zu $\pm$ 0,061 Volt, das sind bezogen auf den Sollwert der mittleren Wendespannung von 5 Volt etwa $\pm$ 1,25 %. Je größer man die Windungszahl primär wählt, desto genauer kann man die theoretisch erforderlichen Werte von n und m erreichen. Demnach wird es bei Vergrößerung der Primärspannung leichter sein, die richtige Wendespannung einzuhalten.

b) Ein weiterer Fehler ergibt sich durch falsche Lamellenteilung und Bürstenbau. Beide lassen sich nur ungefähr schätzen. Ordnet man z. B. die Lamellen auf kräftigen Isolierplatten an und bestimmt ihre Lage nach sorgfältig gearbeiteten Schablonen, dann gelingt es vielleicht, die Abweichungen einzelner Lamellen der Lage nach vom Sollwert auf $\pm$0,1 mm zu beschränken. Die Bürstenhalter können z. B. auf der gemeinsamen Welle auf isolierten und absolut starren Trägern in der Bewegungsrichtung verstellbar angeordnet werden. Dann lassen sie sich ebenfalls mit einer Genauigkeit von $\pm$0,1 mm an eine gewünschte Stelle bringen. Das Spiel der Kohlen in den Haltern läßt sich bei bester Wertung auf $\pm$0,05 mm herunterdrücken. Die Relativlage zwischen Kohle und Lamelle kann also durch Werkstattungenauigkeiten im ganzen um rund $\pm$0,25 mm falsch sein. Je größer die Lamellenteilung, desto kleiner wird der prozentuale Fehler. In dem erwähnten Beispiel mit einer Lamellenteilung von 14,3 mm entspricht dem eine Spannung von 0,069 Volt, da der Unterschied benachbarter Lamellenspannungen beim Durchgang durch Null 3,92 Volt beträgt. Der Fehler macht dann $\pm$ 1,4% der mittleren Wendespannung aus. Wird die Lamellenspannung verringert, bei gleichbleibender Wendespannnung, dann sinkt natürlich der Fehler.

c) Die Sollage des Bürstensatzes ist nach Gleichung (29) von 3 Veränderlichen, Belastungsstrom, Drehstromspannung und Frequenz, abhängig. Als ein vierter Gesichtspunkt kommt die veränderliche Reibung des Bürstensatzes hinzu. Durch diese ändert der Läufer des Bürsten-Antriebsmotors seine Lage relativ zum Drehfeld des Ständers und schließt damit andere Lamellen kurz als gewünscht. Selbstverständlich ist es entgegen den vorliegenden englischen Ausführungen viel einfacher, die Lage des Läufers zu steuern als die des Ständers. Außerdem arbeitet das so gebildete System praktisch reibungsfrei, weil keinerlei ruhende Reibungskräfte zu überwinden sind. Will man die Genauigkeit schätzen, mit der die Bürstenverstellung sich den angeführten Änderungen anpassen kann, dann muß man einen Reguliermechanismus festlegen, womit nicht gesagt sein soll, daß nicht andere noch günstigere möglich seien. Die Betrachtung soll nur den Beweis erbringen, daß der Fehler in der Bürsteneinstellung einen bestimmten Betrag nicht überschreiten braucht. Eine Verschiebung des Läufers gegenüber der Normallage ist mittels einer zweiten veränderlichen Hilfserregung auf dem Läufer, deren Achse senkrecht zur konstanten Haupterregung steht, durchführbar. Wenn diese klein gegen die Haupterregung, verschiebt sich das Polrad proportional damit aus seiner Normallage. Bei konstanter Spannung, Frequenz und Bürstenreibung muß die Bürstenverschiebung gemäß



Gleichung (29) proportional dem Belastungsstrom sein. Erregt man die Hilfswicklung direkt durch diesen, dann stellen sich bei richtig bemessener Windungszahl bei jeder Belastung die Bürsten genau in die Sollage ein. Hiermit sind gewissermaßen Wendepole für den Transverter geschaffen, denn genau wie bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen wird auch hier durch vollkommen selbsttätige Änderung der Erregung durch den Belastungsstrom dafür gesorgt, daß in den kurzgeschlossenen Spulen stets die richtige Wendespannung induziert wird. Da hierzu keine mechanischen Regler nötig sind, ist ein Versagen praktisch ausgeschlossen, die erforderliche Wendespannung für alle Fälle sichergestellt und damit die einwandfreie Stromwendung überhaupt erst wahrscheinlich gemacht. Die durch Änderung von Spannung, Frequenz und Reibung erforderlichen Verschiebungen des Läufers machen nur einen Teil der durch die Belastung bedingten aus. Man kann diese durch zusätzliche Beeinflussung der Hilfswicklung oder durch Regelung einer zweiten Hilfswicklung, deren Achse mit der der ersten parallel liegt, erreichen.

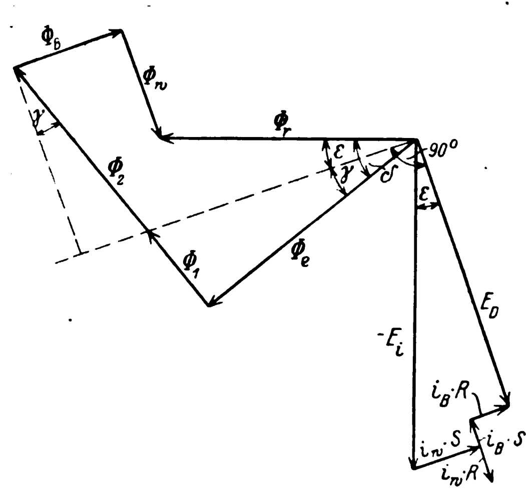


Bild 12. Zeichnung 1119.
Diagramm der Flußverkettungen und Spannungen des Bürstenantriebsmotors.

Im Diagramm Bild 12 für den Synchronbürstenantriebsmotor stellt der Vektor E_i den vom Hauptfeld Φ_r zu kompensierenden Anteil der Netzspannung E_d nach Abzug des Ohmschen und induktiven Abfalles von Wirkstrom i_w und Blindstrom i_b dar. R und S seien Ohmscher und induktiver Widerstand der Ständerwicklung einschließlich Ankerrückwirkung. Φ_r ergibt sich durch geometrische Addition der Flüsse der Haupterregung Φ_e, der Hilfserregungen $\Phi_{1,2}$, sowie der Erregungen durch Wirk- und Blindstrom Φ_w und Φ_b, wobei, um einfache Verhältnisse zu schaffen, der Läufer ein Trommelanker sei. Die Bürsten sind relativ zu Φ_e fest und müssen eine bestimmte Lage zum Vektor der Netzspannung E_d einnehmen. Der Winkel δ zwischen Φ_r und Φ_e ist nach Gleichung (29) gegeben durch:

$$\delta = \gamma + \varepsilon = \frac{J}{E_d} \cdot f_2(v) + f_3(v) + \frac{i_w \cdot S + i_b \cdot R}{E_i}. \tag{31}$$

Man kann hieraus folgende Bedingungen entnehmen:

$$\Phi_1 = \Phi_e \cdot \operatorname{tg} \gamma = \Phi_e \left(\gamma + \frac{\gamma^3}{3} + \ldots\right) = \Phi_e \left[\frac{J}{E_d} \cdot f_2(v) + f_3(v)\right), \tag{32}$$

$$(\Phi_2 \cdot \cos \gamma - \Phi_w) \frac{1}{\Phi_r} = \varepsilon = \frac{i_w \cdot S + i_b \cdot R}{E_i}. \tag{33}$$

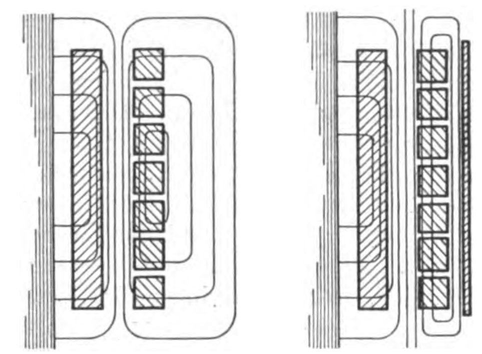
Wenn diese beiden Gleichungen erfüllt sind, ist die Bürstenstellung absolut richtig. Die Vernachlässigung von γ in Gleichung (32) ergibt bei $\gamma = 0{,}05$ einen Fehler von 0,08 %. Die Hilfserregung Φ_1 wird nun gemäß der Beschreibung automatisch proportional der Gleichstrombelastung eingestellt. Weiterhin werde sie durch Parallel- bzw. Vorschaltwiderstände, die gemäß Spannung und Frequenz geregelt werden, nach Gleichung (32) gesteuert. Nun ändert sich die Netzspannung praktisch um ± 5 %. Ein dadurch beeinflußter Regler arbeitet auf ± 1 % genau, so daß die Bürstenlage höchstens um ± 0,05 % vom Sollwert abweichen kann. Die Frequenz schwankt um ± 2 %, ihr Einfluß auf Φ_1 ist prozentual ungefähr ebenso groß und wird durch einen Regler wie bei der Spannungsregulierung mit einem

Fehler vom äußersten $\pm 0{,}02\%$ ausgeglichen werden können. Da die Änderung von E_d und v beide klein sind, ist der Fehler, der dadurch entsteht, daß man die Änderungen für sich korrigiert, vernachlässigbar klein.

In Gleichung (33) ist $\Phi_r \cdot v$ proportional E_d, so daß man beide nach Einsetzen von K_4/v weglassen kann. $\cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$ weicht, da γ bei 5 Volt mittlerer Wendespannung im zugrundegelegten Beispiel $3{,}18^0$ gleich $5{,}5\%$ entspricht, um $0{,}15\%$ von 1 ab. Wenn man den Winkel $\varepsilon = 5\%$ und den Fluß des Wirkstroms $\Phi_w = 10\%$ von der resultierenden Erregung macht, was bei geeigneter Motorbemessung ohne Schwierigkeiten erreichbar, dann entsteht insgesamt ein Fehler von etwa $0{,}45\%$, bezogen auf die mittlere Wendespannung, wenn man $\cos\gamma = 1$ setzt. Φ_w ist $K_5 \cdot i_w$ und damit geht Gleichung (33) über in:

$$\Phi_2 = (i_w \cdot S + i_b \cdot R)\frac{K_4}{v} + K_5 \cdot i_w; \qquad (34)$$

i_w kann sich um etwa 20% ändern, i_b um etwa 10% je nach der Größe von Φ_e und Φ_r. Bei einer Genauigkeit der auf diese Ströme ansprechenden Regler von $\pm 1\%$ ergibt sich somit ein Fehler von weniger als $\pm 0{,}2\%$ von Φ_2 und der Winkel ε kann somit um etwa $\pm 0{,}6\%$, bezogen auf die mittlere Wendespannung, falsch werden. Ändert sich dann v bei konstanten Strömen um $\pm 2\%$, dann wird gemäß früheren Φ_2 mit einer Genauigkeit von mindestens $\pm 0{,}02\%$ auf den Sollwert gebracht werden können. Bezogen auf γ ergibt sich damit ein Fehler von $\pm 0{,}06\%$. Insgesamt kann also im betrachteten Sonderfall der Fehler in der Bürsteneinstellung äußerstenfalls $\pm 1{,}26\%$ werden, womit gezeigt ist, daß jedenfalls eine einwandfreie Bürsteneinstellung mit genügender Genauigkeit zu erzwingen ist.


Bild 13. Zeichnung 1117. Unterschied in der Streuflußverkettung der Sekundärspulen und Abhilfe durch Schirmbleche.

d) Die unterschiedliche Streuung der einzelnen Gleichstromspulen je nach ihrer Lage auf dem Kern, d. h. ob mehr in der Mitte oder mehr nach den Jochen zu, ist rechnerisch nicht zu erfassen, aber so groß, daß eine einwandfreie Stromwendung zunächst sicher unmöglich ist. Die Spulen in der Mitte der Wicklung umfassen einen größeren Streufluß als die nach den Jochen zu liegenden. Um nun die Streuung gleichmäßig zu gestalten, müssen die Streulinien in der Nähe der Gleichstromwicklung völlig parallel zur Kernachse geführt werden. Der Verlauf der Streulinie, die die Drehstromwicklung umfassen, ist hier nebensächlich, denn diese bringen keine Unterschiede in den einzelnen Spulen der Gleichstromwicklung hervor. Schirmbleche aus Kupfer, welche so dicht wie möglich auf der Gleichstromwicklung aufsitzen, aber natürlich nicht um die Kerne herum geschlossen sind, unterdrücken die unterschiedliche Streuung. Jeder in den äußeren Luftraum austretende Streufluß muß solche Bleche schneiden und wird hier Ausgleichsströme induzieren, die den auftretenden Fluß weitgehend unterdrücken. Ein Streufluß ist dann nur noch in dem Raum zwischen Gleichstromwicklung und Schirmblech gemäß Bild 13 möglich. Der pro Zentimeter des Hauptstreuweges zwischen Primär- und Sekundärwicklung auftretende magnetische Spannungsüberschuß wird hier pro Zentimeter Streuweg zwischen Sekundärwicklung und Schirmblech aufgebraucht. Der Streufluß ist dann in diesem Raum unabhängig vom Abstand von der Kernmittelebene,

d. h. alle Sekundärspulen umfassen genau den gleichen Hauptstreufluß. Der sekundäre Zusatzstreufluß wird für alle Spulen genau gleich sein, da es sich hier um eine Scheibenwicklung handelt, bei der unter Berücksichtigung der zweckmäßig angeordneten Hilfswicklung alle Spulen gleichwertig sind. Es wird nach dem Gesagten sicher möglich sein, die Unterschiede der Streuung der einzelnen Spulen auf vielleicht $\pm 2,5\%$ der Gesamtstreuung herunterzudrücken. Die früher eingeführte Hilfswicklung ist in der Lage, die verschiedene Verteilung des Streuflusses zu unterdrücken, wenn man jeder Hilfsspule auf den 3 Kernen verschiedenen Abstand von der Mittelebene gibt, was aber wegen der damit verbundenen Isolationsschwierigkeiten unmöglich ist. Die Komplikationen, die sich durch die Schutzbleche bezüglich Konstruktion und Preis ergeben, müssen also mit Rücksicht auf eine einwandfreie Stromwendung in Kauf genommen werden.

e) Die Regeleinrichtung eines Transverters gibt zu Pendelungen Anlaß, die den Betrieb ernstlich gefährden. Dabei unterscheiden sich die Umformer je nach der Art des erzeugten Stromes wesentlich. Es werde z. B. bei einem Umformer von Drehstrom in Gleichstrom die Belastung plötzlich stark erhöht. Dann wird der Läufer des Bürstenantriebsmotors relativ zum Drehfeld nach vorne bewegt, damit in den kurzgeschlossenen Spulen die richtige jetzt höhere Wendespannung induziert wird. Er erreicht die Sollage, läuft aber infolge der Trägheit über diese hinaus, da in diesem Augenblick seine Geschwindigkeit größer ist als die synchrone. Damit sinkt dann die Klemmenspannung auf der Gleichstromseite und entsprechend auch der Strom. Die nach Erreichung des größten Ausschlages an sich schon einsetzende rückläufige Bewegung wird nun noch dadurch vergrößert, daß infolge der beschriebenen Stromverringerung die neue Sollage noch weiter nach rückwärts verschoben ist. Der Anker läuft dann wieder über diese hinaus, womit die Klemmenspannung und der Strom wieder ansteigen, so daß das Spiel von neuem beginnt. Diese Schwingungen lassen sich durch Anordnung eines Dämpferkäfigs beseitigen, womit allerdings die Bürsteneinstellung verzögert wird.

Wenn nun bei einem Umformer von Gleichstrom in Drehstrom die Belastung plötzlich steigt, z. B. unter der Annahme konstanter Drehstromspannung und steigender Gleichspannung, dann wird der Läufer rückwärts gegen das Drehfeld verschoben, und die der Klemmenspannung gleichstromseitig entgegenwirkende induzierte Spannung wird verringert. Der Strom steigt also weiterhin stark an, die Bürsten bleiben noch weiter zurück, und das geht so fort bis zum Kurzschluß, wenn nicht der Ohmsche Spannungsabfall den Stromanstieg begrenzt. Oberhalb einer gewissen Belastung nimmt dieser Spannungsabfall langsamer zu als die Verminderung der induzierten Gegenspannung, und in diesem Punkt der „Kipplast" setzt unbedingt der Stromanstieg zum Kurzschluß ein. Es wird später hierauf noch rechnerisch eingegangen. Auch diese beiden Erscheinungen beeinträchtigen natürlich die Stromwendung erheblich und bewirken, daß der Transverter auf plötzliche Laständerungen sehr ungünstig reagiert. Auch hier handelt es sich um Abweichungen der Wendespannung vom Sollwert, doch nicht um dauernde, auch ist die Größe der Abweichung nicht zahlenmäßig zu schätzen.

Die tatsächlich vorhandene Wendespannung kann also bei normalem Betrieb infolge der Abweichungen in den Drehstromwindungszahlen um etwa $\pm 1,25\%$, durch Abweichungen im genauen Kollektoraufbau um etwa $\pm 1,4\%$, durch Abweichungen in der richtigen Bürsteneinstellung infolge der ungenauen Regeleinrichtung um $\pm 1,26\%$ und durch die Unterschiede in den Streuungen verschiedener Spulen um etwa $\pm 2,5\%$ von der theoretisch erforderlichen abweichen, zusammen also um etwa $6,4\%$ im ungünstigsten Falle. Natürlich gelten die Untersuchungen, soweit rein zahlenmäßig, nur für das verschiedentlich angeführte Beispiel. Immerhin besitzen die Ergebnisse insofern allgemeine Bedeutung, als daraus gefolgert werden



kann, daß auch bei anderen Ausführungen und zweckmäßiger Bemessung die Abweichungen vom Sollwert in einer ähnlichen Größe gehalten werden können, daß also die erforderliche Wendespannung auch praktisch mit genügender Genauigkeit eingestellt werden kann. Der errechnete Fehler hat die gleiche Größenordnung, wie er auch bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen vorkommt. Dabei ist aber noch zu berücksichtigen, daß der Transverter durch verschiedene Eigenschaften in der Wendung wesentlich günstiger ist als eine Gleichstrommaschine. Deshalb muß die ermittelte Abweichung vom Sollwert zulässig sein.

6. Zulässige Beanspruchungen.

a) Bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen kann man den Stromverlauf in den kurzgeschlossenen Spulen bei veränderlicher Wendespannung nicht genau berechnen, so daß sich leicht eine ungradlinige Kommutierung und damit unzulässige Stromdichten unter den Bürsten einstellen. Beim Transverter ist die Berechnung genau möglich und die Stromdichte unter den Bürsten kann im zeitlichen und örtlichen Verlauf ermittelt werden. Wenn man nun durch entsprechende Bürstenlänge dafür sorgt, daß diese Stromdichte nirgends eine unzulässige Höhe erreicht, ist kein Grund vorhanden, warum man eine beliebig veränderliche Wendespannung und damit einen beliebigen kurvenförmigen Verlauf des Stromes in der kurzgeschlossenen Spule nicht zulassen sollte. Die ansteigende oder abfallende Wendespannung bedeutet also für den Transverter keinen Nachteil. Dies steht im Gegensatz zu den bei Gleichstrommaschinen gemachten Erfahrungen und ist darin begründet, daß Gefahren durch Überlastung der Bürsten beim Transverter sicher zu vermeiden sind.

Im Augenblick der Beendigung des Kurzschlusses tritt die volle induzierte Wendespannung zwischen Lamelle und Bürste auf, denn die Reaktanzspannung bzw. Streuspannung ist dann zu Null geworden. Es sei nun bei Umformung in Gleichstrom durch falsche Wendespannung der Strom zu weit kommutiert, daß er in der austretenden Zuleitung seine Richtung umgekehrt habe. Dann wirken bei Beendigung des Kurzschlusses Streuspannung und Wendespannung in gleicher Richtung, um den bestehenden Strom aufrecht zu erhalten. Dies gelingt natürlich um so eher, je höher die induzierte Wendespannung ist. Deren Größe im Augenblick der Kurzschlußbeendigung ist also ein Maß für die Sicherheit der Stromwendung. Bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen entspricht die betrachtete Spannung ungefähr der mittleren Wendespannung. Was dafür dort zulässig ist, muß also für den Transverter als Spannung zwischen ablaufender Bürstenkante und Lamelle zulässig sein. Die in diesem Augenblick induzierte Wendespannung darf an sich noch etwas größer sein, denn der bereits mehrfach erwähnte Ohmsche Abfall in der noch stromführenden Zuleitung der Spule verringert die tatsächlich auftretende Spannung erheblich. Weiterhin fallen die Oberschwingungen in der Wendespannung weg, eine Verzerrung der Wendespannung (des Wendefeldes bei Gleichstrommaschinen) durch den Ankerstrom findet nicht statt. Induktive Beeinflussung durch andere kurzgeschlossenen Spulen bzw. durch Schwingungen des Hauptfeldes fehlen. Es muß also möglich sein, mit der zulässigen Spannung bei Beendigung des Kurzschlusses ziemlich hoch zu gehen. Professor Richter gibt an, daß bei besonders günstigen Ausführungen mittlere Wendespannungen bis zu 25 Volt möglich sind. Dabei müssen natürlich sämtliche Spulen völlig gleichwertig sein. Um sicher zu gehen, wurde in dem den verschiedenen Zahlenangaben zugrunde liegenden Beispiel mit 10 Volt gerechnet. Da nun beim Eintritt einer Spule in den Kurzschluß die Wendespannung unbedenklich höher als 10 Volt sein darf, ist ein Umformer für die Erzeugung von Drehstrom aus Gleichstrom wesentlich einfacher zu bauen, da die Wendespannung im Verlauf des Kurzschlusses abnimmt und deshalb im Mittel höher sein kann als bei Umformung in der anderen Richtung, wo die Wendespannung im Verlauf des Kurzschlusses zunimmt.



Je größer der bekannte Wert $A = R \cdot T/L$, d. h. Widerstand unter einer Lamelle mal Ablaufzeit dieser Lamelle von der Bürste geteilt durch Selbstinduktion der austretenden Spule, desto besser geht die Stromwendung vor sich. In dem Buch von Richter ist angegeben, daß dieser Wert unter Umständen noch bis herunter auf 0,1 brauchbare Maschinen liefert, natürlich auch nur, wenn die Stromwendung sonst einwandfrei ist. Es wurde daraufhin in dem Zahlenbeispiel mit 0,25 gerechnet. Auch hier ist der Transverter für Umformung von Gleich- in Drehstrom im Vorteil. Wenn die eine Lamelle der kurzgeschlossenen Spule beginnt, aus dem Kurzschluß auszutreten, ist die Stromwendung zum größten Teil vollendet, die austretende Lamelle hat also nur einen geringen Teilstrom zu führen. Man kann daher die Bürstenabmessung in Richtung der Lamellenisolation an der ablaufenden Kante auf einen Bruchteil herabsetzen, ohne die Stromdichte über das normale Maß zu erhöhen. Dadurch steigt der betrachtete Wert A ganz erheblich, womit die Stromwendung verbessert wird. Bei Umformung von Drehstrom in Gleichstrom geht die Wendung mit schwacher Über- oder Unterkommutierung vor sich, die ablaufende Bürstenkante darf daher nicht verkürzt werden, wenn man eine übermäßige Stromdichte vermeiden will.

b) Die maximale Lamellenspannung ist bei den bereits ausgeführten Transvertern zu 218 bzw. 270 Volt gewählt worden. Bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen geht man damit nach Arnold auf allerhöchstens 50 Volt unter Berücksichtigung der Feldverzerrung durch die Belastung. Normal liegt die Lamellenspannung ganz wesentlich niedriger. Dies ist notwendig, weil sich Kohlenstäubchen zwischen den Lamellen festsetzen, die Isolation überbrücken und so einen Überschlag einleiten, der dann zum Kollektorüberschlag führt. Dieser tritt natürlich um so leichter ein, je näher die Lamellenspannung der Lichtbogenspannung liegt. Bei Arnold Band I, Seite 211 ist angegeben, daß die Lamellenspannung um so höher sein darf, je größer der Widerstand des Ankers zwischen zwei Lamellen, je größer die Kollektorgeschwindigkeit und je kleiner die Maschinenleistung d. h. der Strom. In allen drei Gesichtspunkten ist der Transverter also sehr günstig daran. Trotzdem ist die geschilderte Gefahr vorhanden, und es ist deshalb ausgeschlossen, ohne besondere Vorkehrung mit der Lamellenspannung wesentlich höher zu gehen als bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen unter Berücksichtigung der Feldverzerrung. Eine geringe Lamellenspannung verlangt großen Materialaufwand in den Zuleitungen und am Kollektor und ist deshalb möglichst zu vermeiden. Da nun die Überschlagsgefahr und die zulässige Lamellenspannung vor allem von der Lichtbogenspannung abhängig sind, kann man sie bedeutend höher wählen, wenn man die Lichtbogenspannung heraufsetzt. Dies gelingt, indem man den Kollektor in Druckluft arbeiten läßt, was bei der vorliegenden Sonderausführung des Kollektors keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bieten wird. Die Lichtbogenspannung steigt dann unter sonst gleichen Verhältnissen proportional mit dem Druck. Diedie Isolation überbrückenden Kohlenteilchen werden dann auch in einem Funken verbrennen, doch wird der entstehende Lichtbogen sofort verlöschen. Es scheint somit vielleicht möglich, die Lamellenspannung beim Transverter gegenüber Normalausführungen von Gleichstrommaschinen wesentlich zu erhöhen. Wählt man diese jedoch zu hoch, dann sinkt die Kurzschlußzeit unter Berücksichtigung der maximalen zulässigen Wendespannung und damit ist nur die Wendung eines wesentlich kleineren Stromes möglich. Bei gleich angenommener Selbstinduktion müssen also dann wieder andere Abmessungen geändert werden und so ergab sich, daß z. B. bei etwa 35000 kW Leistung eine Lamellenspannung von rund 45 Volt maximal die zweckmäßigste Ausführung ergab. (Die sonst angegebenen Zahlenwerte gelten bei 90 Volt Lamellenspannung.) Es genügt also auch bei sehr großen Ausführungen voraussichtlich ein ganz mäßiger Überdruck, um die Überschlagsgefahr zu vermeiden. Wie sich der Stromübergang zwischen Kohle und Kollektor hierbei gestaltet, ist noch durch Versuche zu klären.



Im Gegensatz zu dem anfänglich Gesagten kommt also nun doch wieder durch Vorstehendes eine gewisse Abhängigkeit zwischen Wendespannung und Lamellenspannung zustande.

c) Je kleiner die Selbstinduktion der kurzgeschlossenen Spulen, desto größeren Strom können sie, ohne die zulässige Wendespannung zu überschreiten, führen. Bezogen auf gleiches Eisengewicht steigt damit die Leistung des Transverters, und der Materialverbrauch pro kW sinkt. Die Selbstinduktion ist zu über 90% durch den Hauptstreufluß gegeben, der zwischen Primär- und Sekundärwicklung auftritt. Dieser wieder ist, abgesehen von der Windungszahl, wesentlich bestimmt durch den Abstand der beiden Wicklungen. Um günstigste Materialausnützung zu erlangen, muß dieser Abstand so weit als möglich heruntergedrückt werden. Während für Wechselstrombeanspruchungen der praktisch verwendbaren Isolierstoffe zahlreiche Versuchswerte vorliegen, so daß man in jedem Fall ein günstiges Material aussuchen kann, ist für Gleichspannung nur weniges bekannt. Verglichen mit Wechselstrom unterscheiden sich dabei feste und flüssige Isolatoren ganz wesentlich. Nach Versuchen von Kock ist die Durchschlagsfestigkeit der zweiten Gruppe bei Gleichstrom wesentlich niedriger als bei Wechselstrom. Nach Prof. Günther-Schulze erlangen bei genügender Feldstärke vorhandene Ionen so große Geschwindigkeiten, daß sie durch Reibungswärme Dämpfe erzeugen und in diesen Dampfbahnen geht nun durch Stoßionisierung entsprechend der Townsendschen Theorie der Durchschlag vor sich. Also ist Ölisolation hier zwischen den Wicklungen durchaus ungeeignet. Zwischen Gleichstromwicklung und Kasten, wo der Raum keine Rolle spielt, ist es natürlich vor allem zur Abfuhr der Verlustwärme am Platze.

Bei der Beanspruchung fester Dielektrika mit Wechselstrom ist der Durchschlag vor allem durch das Wärmegleichgewicht zwischen den Verlusten in der Isolation und der abgegebenen Wärmemenge bestimmt. Bei Gleichstrom fallen die dielektrischen Verluste ganz fort, die den größten Teil der Wechselstromverluste ausmachen und es bleibt nur der Leitungsverlust, der nach Berger einige Prozente der dielektrischen beträgt. Das Isoliermaterial wird sich also bei gleicher Beanspruchung nur ganz unbedeutend erwärmen, weshalb ein Vielfaches der bei Wechselstrom zulässigen Beanspruchungen möglich sein müßte. Tatsächlich wird jedoch das Material weit vorher zerstört, doch lassen immerhin die Versuche darauf schließen, daß man zum mindesten bei Gleichstrom die Beanspruchung im Verhältnis von Scheitel zu Effektivwert höher wählen darf als bei Wechselstrom, wenn es sich um dünne Platten handelt. Bedingt durch das Wärmegleichgewicht sinkt die zulässige Beanspruchung bei Wechselstrom mit der Plattendicke. Bei Gleichstrom kann das Wärmegleichgewicht mit zunehmender Plattendicke sobald noch nicht gestört werden, da die Verluste äußerst klein sind. Es muß also zunächst auch für große Plattendicke dieselbe spezifische Beanspruchung zulässig sein wie für geringe. Tatsächlich haben auch Versuche von Grünwald gezeigt, daß diese Proportionalität zwischen Spannung und Plattendicke noch in Stärken besteht, wo bereits eine wesentliche Verringerung der zulässigen Wechselstrombeanspruchung auftritt. Andererseits liegen über mögliche elektrolytische Zerstörungen des Isoliermaterials bei Gleichstrom bei Dauerbeanspruchung noch keine Versuche vor, so daß es also nicht möglich ist anzugeben, welche Isolationsstärke erforderlich ist. Man kann lediglich vermuten, daß eine höhere Beanspruchung als bei Wechselstrom zulässig sein wird.

Nach dem Bisherigen ist zwischen den beiden Wicklungen ein fester Isolator, z. B. Hartpapier, anzuordnen. Eine unzulässige Erwärmung dieses Isolator, der ungekühlt zwischen beiden Wicklungen liegt, ist dabei nicht zu befürchten. Die Wicklung selbst ist mit Rücksicht auf geringe Selbstinduktion einlagig, also radial nicht unterteilt, so daß sich der Wärmeabgabe in dieser Richtung keine Schwierigkeiten



entgegenstellen, und die Temperatur des Isolators also die Temperatur des Kühlmittels nicht stark übersteigen kann. Dabei ist auch noch zu beachten, daß die spezifische Kühlfläche allgemein sehr groß sein wird, eben weil die Selbstinduktion klein gehalten werden soll. In dem angezogenen Zahlenbeispiel war z. B. bei Vollast die Kühlfläche außen 9,6 cm^2/Watt und innen 14,5 cm^2/Watt. Die Wicklungstemperatur und damit auch die Temperatur des Isolators werden also bei künstlichem Ölumlauf sehr niedrig sein.

Nach dem Aufsatz von Rachel, ETZ 1926, S. 333, soll die Prüfspannung bei Wechselstrom so hoch gewählt werden, daß auf alle Fälle mehr als die zweifache Sicherheit gegenüber der betriebsmäßig normalen höchsten Spannung vorhanden ist. Überspannungen wesentlicher Höhe verträgt der Kollektor des Transverters unter keinen Umständen. Er kann also nur Verwendung finden, wo diese unbedingt sicher vermieden sind, so daß praktisch beim Transverter mit mehr als 10% über der normalen Betriebsspannung nicht zu rechnen ist. Daher ergibt sich die Prüfspannung zum 2,2fachen der Betriebsspannung. Alle übrigen Beanspruchungen elektrischer und mechanischer Art sind beim Transverter nicht anders zu behandeln, als bei gewöhnlichen Gleichstrommaschinen bzw. Transformatoren, so daß darüber hier nichts Besonderes zu sagen ist.

7. Umformung von Gleichstrom in Drehstrom.

a) Nach den englischen Berichten ist der Transverter in seiner Betriebsweise vollkommen umkehrbar. Er muß also an eine Gleichspannung gelegt bei rotierenden Bürsten ohne weiteres Drehstrom abgeben, ebenso wie er an ein Drehstromnetz gelegt Gleichstrom abgibt. Tatsächlich ist das nicht der Fall. Bei der Umformung von Gleichstrom in Drehstrom muß in der Gleichstromwicklung wie in jedem gewöhnlichen Gleichstrommotor eine Gegenspannung induziert werden, die der Klemmenspannung, abgesehen vom Ohmschen Spannungsabfall, das Gleichgewicht hält. Diese könnte zunächst nur durch einen Magnetisierungsstrom auf der Gleichstromseite erzeugt werden. Dieser ändert seine Größe zwischen 2 Stromwendungen nicht und kann infolgedessen in den Transformatoren, wo gerade keine Stromwendung stattfindet, auch keine Spannung induzieren. Durch einen etwa fließenden Gleichstrom wird also eine Gegenspannung zur aufgedrückten Gleichstromklemmenspannung nicht erzeugt. Es ist also unmöglich, den Transverter lediglich auf der Gleichstromseite an Spannung zu legen und daraus folgt, daß er nicht für beide Umformungen gleichwertig ist. Auch hat die Grundschwingung des Gleichstromes, die allein magnetisieren könnte, ihr Maximum zu gleicher Zeit, wie die zu induzierende Gegenspannung. Sie steht also nicht zeitlich um 90° vor dieser und kann deshalb die Gegenspannung nicht erzeugen.

Demnach ist es erforderlich, auf der Drehstromseite unabhängig vom Transverter durch eine andere Maschine eine Drehstromspannung zu schaffen. Unter deren Einfluß nimmt er einen Magnetisierungsstrom auf und dieser erzeugt in beiden Wicklungen die erforderliche Gegenspannung zur Netzspannung. Wenn diese auf der Gleichstromseite größer ist, fließt dort ein Strom in Richtung der aufgedrückten Gleichspannung und entgegen der induzierten. Auf der Drehstromseite kann dann im Transverter ein Strom in Richtung der induzierten Spannung fließen, der den aufgenommenen Gleichstrom kompensiert und im Drehstromnetz als abgegebener Strom auftritt. In dieser Hinsicht gleicht also der Transverter einem Asynchron-Generator, der auch nur dann Leistung abgeben kann, wenn in dem Netz, auf das er arbeiten soll, Spannung vorhanden ist.

Theoretisch ist es nun möglich, durch die Grundschwingung eines etwa fließenden Gleichstromes in einer besonderen Hilfswicklung, die auf allen entsprechenden Kernen hintereinander und insgesamt in Stern geschaltet ist und an



einer Kapazität liegt, eine Spannung zu induzieren, unter deren Einfluß ein Strom fließt, der mit der genannten Grundschwingung zusammen die erforderliche Magnetisierung liefert. Dann kann der Transverter zwar allein eine Drehstromspannung abgeben, da er aber keinen Blindstrom zu liefern vermag, weil der Winkel zwischen Strom und Spannung durch die bei der Wendung erforderliche Spannung bestimmt wird, kommt diese Ausführung nicht in Frage.

b) Der Transverter kann also für sich allein ein Drehstromnetz nicht speisen, sondern muß stets mit einer anderen Maschine parallel arbeiten. Die Bedingung eines stabilen Betriebes erfordert, daß sich eine gegebene Last in einem ganz bestimmten einzigen möglichen Verhältnis auf die beiden Stromerzeuger verteilt. Hier kommt das darauf hinaus, daß die Synchronmaschine stets den gesamten Blindstrom für das Außennetz und den Erregerstrom des Transverters liefert. Der Wirkstrom muß sich in bestimmtem eindeutigen Verhältnis auf die beiden Maschinen verteilen. Dabei muß die Synchronmaschine stets eine solche Spannung liefern, daß der aufgedrückten Gleichstromklemmenspannung durch die induzierte Gegenspannung und den Ohmschen Abfall des Belastungsstromes Gleichgewicht gehalten wird. Ist die Spannung der Drehstrommaschine unrichtig, dann muß der Transverter in der Lage sein, für Erzeugung der richtigen Spannung zu sorgen, indem er z. B. einen größeren Anteil der Last übernimmt.

Die hiermit aufgestellte Forderung ist tatsächlich erfüllt. Es war im Abschnitt 2 gezeigt, daß man einen Gleichstrom in der einen Wicklung durch einen rein sinusförmigen Strom im Drehstromnetz kompensieren kann und ebenso umgekehrt. Die Oberwellen des Gleichstromes werden dabei durch Ausgleichströme in der Drehstromwicklung des Transverters selbst ausgeglichen. Dann genügt es bei der Beziehung der beiden Netze aufeinander, nur die Grundschwingung des Kompensationsstromes auf der Gleichstromseite zu betrachten. Gesetzt die induzierte Gegenspannung sei zu klein. Dann kann man den zunächst als überschüssig angesehenen Gleichstrom durch einen Vektor darstellen, der um 180° hinter der induzierten Spannung liegt. Die von diesem Strom induzierte Spannung liegt also um 90° vor der induzierten Gegenspannung. Dann liegt sie bezogen auf die Synchronmaschine um 90° hinter der Klemmspannung und erzeugt deshalb in dieser einen Strom, der entsprechend dem nahezu rein induktiven Widerstand um 90° dahinter zurückliegt, also rein aufgenommenen Wirkstrom darstellt, d. h. die Synchronmaschine wird so weit vom Wirkstrom entlastet, bis im Transverter Gleichgewicht herrscht. Ist bei völligem Leerlauf der Synchronmaschine noch kein Gleichgewicht erreicht, dann wird diese als Motor so weit beschleunigt bis Gleichgewicht vorhanden.

Es kann hier sowohl ein gewöhnlicher Drehstromgenerator gekuppelt mit einer beliebigen Kraftmaschine, als auch ein Synchronmotor verwendet werden. Das erste ist ohne weiteres klar und das zweite ergibt sich folgendermaßen. Verringert der Synchronmotor aus irgend welchen Gründen seine Drehzahl, dann sinkt die von ihm erzeugte Netzspannung und er wird durch einen zusätzlichen Strom gemäß dem vorigen Abschnitt beschleunigt, bis wieder Gleichgewicht herrscht. Er kann aber auch nicht durchgehen, denn sobald seine Drehzahl eine bestimmte Grenze übersteigt, wird die induzierte Spannung im Transverter so hoch, daß er die für den Betrieb des Drehstromnetzes erforderliche Leistung nicht mehr zu übertragen vermag. Damit hat dann die Drehzahl des Synchronmotors den möglichen Höchstwert bereits überschritten. Der Betrieb ist also auch hier stabil. Die Netzfrequenz ist in diesem Falle nicht durch Drehzahlregler, sondern einfach durch eine Beziehung zwischen der Erregung der Synchronmaschine und der Gleichstromklemmenspannung des Transverters gegeben.

c) Es soll noch kurz ein Diagramm aufgestellt werden, aus dem man die Lastverteilung bei Parallelarbeit verschiedener Maschinen entnehmen kann. Dabei



genügt es wie oben, lediglich die Grundharmonische zu betrachten, wobei der Magnetisierungsstrom vernachlässigt werde. Man kann dabei unterstellen, daß der gesamte Streufluß mit der Drehstromwicklung verkettet sei. Dann muß, abgesehen von dem geringen Einfluß des Ohmschen Spannungsverbrauches in den kurzgeschlossenen Spulen, die dort vom Hauptfluß induzierte Spannung während der Stromwendung durch Null gehen. Damit haben Strom und induzierte Spannung gleichstromseitig genau gleiche bzw. entgegengesetzte Richtung. Die induzierte Spannung muß bei Leerlauf gerade der Klemmenspannung auf der Gleichstromseite das Gleichgewicht halten und bei Belastung der Klemmenspannung vermindert um den gleichstromseitigen Ohmschen Abfall. Legt man also den Vektor für die Grundschwingung des Gleichstromes i_g senkrecht nach oben, wenn es sich um die Erzeugung von Drehstrom handelt, dann liegt die induzierte Spannung E_i senkrecht nach unten

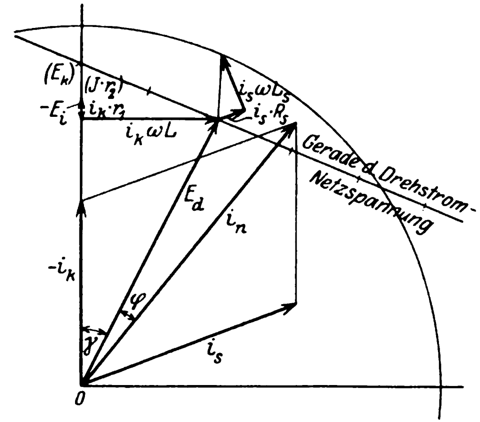


Bild 14. Zeichnung 1118. Parallelarbeit von Transverter und Synchronmaschine.

und man kann auf ihr mit einer linearen Teilung angeben, zu welchem Strom jeder Punkt bei konstanter Gleichstromspannnng gehört. Die Grundwelle des Kompensationsstromes ist durch den Vektor i_k bestimmt. Trägt man nun an $-E_i$ d. h. an dem Teile der Drehstromklemmenspannung, der durch die Gegenspannung kompensiert wird, die Streuspannung $i_K \cdot 2 \cdot \pi v L$ und den Ohmschen Abfall in der Drehstromwicklung $i_K \cdot r_1$ an, dann erhält man je nach der Belastung Punkte, die auf einer Geraden liegen und die der geometrische Ort für die Endpunkte des Vektors E_d der Drehstromnetzspannung ist. Der Winkel zwischen Klemmenspannung und induzierter Spannung entspricht dabei dem Winkel γ, um den die Bürsten bei Belastung aus der Nullage verschoben werden müssen. Durch eine lineare Teilung sind auf der eben bestimmten Geraden die zu verschiedenen Belastungen gehörenden Endpunkte festgelegt. Ins Drehstromnetz wird vom Transverter der Strom $-i_k$ abgegeben, die Synchronmaschine gebe i_s ab, also fließt insgesamt i_n ins Netz. Der Spannungsabfall in der Synchronmaschine einschließlich der entmagnetisierenden Rückwirkung des Belastungsstromes sei $i_s(R + 2\pi v L)$. Schlägt man nun um den Mittelpunkt O des Diagramms Bild 14 einen Kreis, der der Leerlaufsspannung E_0 der zugehörigen Synchronmaschine entspricht, dann kann man bei angenommener Transverterbelastung ohne weiteres ermitteln, welchen Strom die Synchronmaschine bei verschiedenem cos φ des Drehstromnetzes hergeben wird. Es lassen sich dann für jeden Leistungsfaktor Kurven der Lastverteilung aufstellen. Die Gerade der drehstromseitigen Klemmenspannung verschiebt sich bei Änderung der Gleichstromspannung parallel. Die Parallelarbeit mehrerer Transverter ist ebenfalls durch das Diagramm geklärt und kommt wie bei gewöhnlichen Transformatoren darauf hinaus, daß das Übersetzungsverhältnis bei Leerlauf und das Dreieck des inneren Spannungsverbrauchs bei Vollast für alle vollständig gleich sein müssen.



d) Es war bereits beschrieben, daß der Transverter bei der Umformung von Gleichstrom in Drehstrom einen Punkt besitzt, wo er infolge Überlastung aus dem Tritt fällt. An Hand des vorstehenden Diagramms läßt sich dieser Punkt bestimmen. Dabei soll wieder lediglich die Grundschwingung des Kompensationsstromes auf der Drehstromseite betrachtet werden. Für die mittlere Spannung $E_{4\,Km}$ in sämtlichen Gleichstromspulen eines Kerns zwischen zwei Stromwendungen ergibt sich nach Gleichung (23) bei einer Übersetzung 1 : 1, wenn E_i die vom Hauptfluß induzierte effektive Spannung ist:

$$E_{4\,Km} - I_g \cdot r_2 = -E_i \sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}. \tag{35}$$

Die Grundschwingung des Kompensationsstromes ergibt sich aus seiner Zerlegung in eine Fouriersche Reihe zu

$$i_{K\,eff} = -I_g \sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}.$$

Weiter gilt:

$$-E_i + i_{K\,eff} \cdot r_1 = E_d \cdot \cos\gamma = E_d\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) = E_d\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{i_K\,\omega L}{E_d}\right)^2\right).$$

Damit wird:

$$E_{4\,Km} - I_g \cdot r_2 = E_d\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{i_K\,\omega L}{E_d}\right)^2\right]\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\pi} - i_{K\,eff} \cdot r_1 \cdot \sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}. \tag{36}$$

Solange nun bei einer Änderung der Gleichstrom- oder Drehstromspannung mit zunehmendem Strom der Ohmsche Abfall stärker zunimmt als der durch den induktiven gekennzeichnete Ausdruck in der Klammer rechts, ist der Betrieb stabil, d. h. solange:

$$\frac{r_2 + \frac{8}{\pi^2} \cdot r_1}{\omega L} > \frac{I_g\,\omega L \cdot 16 \cdot \sqrt{2}}{2\,E_d \cdot \pi^3} = -\frac{i_K\,\omega L}{E_d} \cdot \frac{4}{\pi^2}. \tag{37}$$

Nach vorstehendem muß man also den Transverter mit möglichst hohem Ohmschen Widerstand und geringer Selbstinduktion bauen. Die früher entwickelten Gesichtspunkte beim Entwurf kommen diesem Ziel an sich schon entgegen. Einmal muß die Selbstinduktion klein gehalten werden, um die Wendespannung niedrig zu halten, andererseits ist der Ohmsche Widerstand ziemlich hoch, da man mit großer Stromdichte in Kupfer rechnen kann und außerdem die Zuleitungen zum Kollektor, die in Gleichung (37) nicht in Erscheinung treten, einen erheblichen Anteil zum Ohmschen Widerstand liefern. Man wird es demnach im allgemeinen erreichen können, daß die Kipplast oberhalb der acht- bis zehnfachen Dauerlast liegt, und dann ist die Gefahr des Außertrittfallens, von Kurzschlüssen abgesehen, ganz beseitigt.

8. Transvertergröße und Anwendungsmöglichkeit.

a) Bei Berechnung eines Transverters wird man als erstes den Abstand zwischen Hoch- und Niederspannungswicklung, der durch die Isolationsbeanspruchung bestimmt ist, ermitteln, da dieser die übrigen Hauptabmessungen wesentlich beeinflußt. Dann legt man einen der möglichen Kernquerschnitte fest und bestimmt damit die Selbstinduktion einer Spule mit bestimmter Windungszahl und einer axialen Länge von 1 cm. Aus der maximalen Spannung, die zwischen der ablaufenden Bürste und Lamellenkante zulässig ist, ergibt sich, da mit dem Eisenquerschnitt die Lamellenspannung gegeben ist, die verfügbare Kurzschlußzeit. Aus Selbstinduktion und Wendezeit ergibt sich nun die Strombelastung, die diese Spule führen kann. Verlängert man die Spule bei gleichbleibender Windungszahl in axialer Richtung beliebig, dann sinkt ihre Selbstinduktion entsprechend und der Strom kann um ebenso viel gesteigert werden, wenn die übrigen Hauptabmessungen gleich geblieben sind. Daraus



folgt also, daß beim Transvertreter unter sonst gleichen Umständen die Strombelastung pro Zentimeter Kernachse konstant ist.

Andererseits ist durch den Strom auch die gesamte bürstenbedeckte Fläche gegeben. Je größer nun die Kernzahl, desto kleiner ist der Spannungsunterschied aufeinanderfolgender Spulen beim Durchgang durch Null und desto mehr Spulen können gleichzeitig im Kurzschluß sein. Um so geringer ist auch die Fläche jeder einzelnen Lamelle. Der Bürstenübergangswiderstand ist im gleichen Maß größer, die Zeit des Ablaufs einer Lamelle von der Bürste um ebenso viel kleiner, sodaß also der Ausdruck A unabhängig von der Kernzahl bereits bestimmt ist. Man kann diese also nach anderen Gesichtspunkten wählen. Wenn sie festliegt, ergeben sich alle übrigen Abmessungen wie Kernlänge, Kernabstand, Kollektorzahl usw. von selbst und man ist damit zunächst zu einer technich einwandfreien Ausführung des Transverters gekommen.

Durch axiale Verlängerung der einzelnen Spulen können diese bei gleicher Wendespannung einen entsprechend größeren Strom führen, womit die Gesamtleistung ebenso steigt. Auch der Ausdruck A ändert sich dabei nicht, weil die Selbstinduktion und der Bürstenübergangswiderstand einer Lamelle sich in gleichem Maß ändern. Es ist demnach bei festliegender Wendespannung die Ausführung eines beliebig großen Transverters mit gleicher technischer Sicherheit möglich und es scheint theoretisch keine Grenze für die größtmögliche Ausführung zu geben. Die hierbei vernachlässigte Streuung zwischen Gleichstrom- und Hilfswicklung braucht nicht berücksichtigt zu werden, da sie im Vergleich zur Hauptstreuung klein ist und falls sie zu groß werden sollte, durch zweckmäßige weitere Unterteilung der beiden betrachteten Wicklungen wieder ausgeglichen werden kann. Der Materialaufwand an Kupfer und Kerneisen steigt bei dieser Art der Leistungserhöhung proportional damit. Der Aufwand für Jocheisen und Endabstände bleibt konstant. Der vergrößerte Transverter benötigt also pro kW immer weniger Material und es muß umgekehrt bei gegebener Größe eine bestimmte Ausführung den billigsten Transverter liefern.

b) Man kann von dem ermittelten Transverter ausgehend folgende drei Hauptteile ändern: Kernzahl, Eisenquerschnitt und Windungszahl pro Spule. Die übrigen Abmessungen des Transverters sind dann ohne weiteres bestimmt. Jede einzelne der genannten drei Größen kann für sich geändert werden, wobei die beiden anderen konstant bleiben. Die grundlegende Bedingung, die bei diesen Änderungen zu berücksichtigen ist, ist daß die größte zulässige Wendespannung beim Ablauf der Bürste von der Lamelle nicht überschritten wird. Man erhält so drei Bedingungsgleichungen für den günstigsten Transverter. Wenn man mit diesen neuen Werten einen Transverter entwirft, wird dieser wesentlich günstiger als der erste sein und so weiter gehend kommt man dann schließlich zu dem absolut besten bei bestimmter Leistung.

Es soll hier nur eine Veränderung der Kernzahl betrachtet werden, weil früher gesagt wurde, daß eine Kernzahlerhöhung nicht unwirtschaftlich und außerdem weil das Ergebnis von Voraussetzungen ziemlich unabhängig ist. Eine Erhöhung der Phasenzahl durch Vermehrung der vorhandenen Transformatoren kommt nicht in Frage, da dieser Weg zu viel Jochmaterial kostet. Es ist lediglich eine Vermehrung der Kernzahl pro Transformator ins Auge zu fassen. Vergrößert man die Kernzahl auf das x-fache, dann steigt der Preis der Endabstände der Kerne P_e auf $x \cdot P_e$. Der Querschnitt der Hilfsjoche ist umgekehrt proportional der Kernzahl und die bewickelte Kernlänge ebenso. In diesen tritt also kein Mehraufwand an Material auf. Da nun die x-fache Spulenzahl kurz geschlossen werden kann, sinkt die Fläche der einzelnen Lamelle auf das $1/x$-fache. Die Zuleitungen zwischen Wicklung und Kollektor führen auch nur einen ebenso verkleinerten Strom während der gleichen Zeit wie vorher. Ihr Querschnitt kann also auf das $1/x$-fache verkleinert werden. Damit sinkt der Aufwand an Kollektormaterial und an Material für die Zuleitung



von $P_K + P_z$ auf $\frac{(P_K + P_z)}{x}$. Die Anzahl der Verbindungen zwischen den einzelnen Sekundärspulen ändert sich nicht, ihre Länge sinkt aber auf das $(c_1 + c_2 : x)$fache, weil die einzelnen Kerne mit x kürzer werden und die Endabstände konstant bleiben. Sonstige Änderungen treten nicht auf. Damit ergibt sich der ganze veränderliche Preisanteil zu:

$$P_e \cdot x + (P_K + P_z) : x + P_v\left(c_1 + \frac{c_2}{x}\right) \text{ mit einem Minimum für } P_e - (P_K + P_z + c_2 \cdot P_v)/x^2 = 0.$$

Die günstigste Kernzahl ergibt sich also, wenn der Preis der Endabstände gleich dem der Zuleitungen, Kollektoren und eines Teils der Verbindungen ist. Ebenso erhält man ein Minimum an Verlusten, wenn diese in den Endabständen gleich denen in den Zuleitungen, am Kollektor und teilweise in den Verbindungen sind. Dabei wird durch Vergrößerung der Kernzahl die Kollektorspannung vergrößert.

Die Bestimmung des günstigsten Kernquerschnitts und der günstigsten Windungszahl pro Spule zwischen 2 Lamellen ist nur unter gewissen Annahmen über die Anordnung der Isolation in allgemeinen Formeln möglich, so daß das Ergebnis als zu ungenau hier nicht gebracht werden soll.

c) Die bisherigen Betrachtungen haben ergeben, daß ein Transverter größter Leistung gebaut werden kann und daß ein technisch einwandfreier Betrieb in gewissen Fällen möglich scheint. Als erstes kann man ohne weiteres feststellen, daß der Transverter in Kraftverteilungsnetzen durchaus ungeeignet ist, weil er nur in Parallelarbeit mit Synchronmaschinen Verwendung finden kann und eine solche Umformeranlage im Vergleich mit Transformatorenstationen bezüglich Wartungs- und Anschaffungskosten erheblich teuerer ausfallen würde. Der Transverter kommt also nur für Großkraftübertragung auf lange Strecken in Frage.

Den im Freileitungsbetrieb auftretenden Kurzschlüssen ist der Transverter nicht gewachsen, da diese den Kollektor bei der geringen Kurzschlußspannung bald zerstören würden. Desgleichen ist es nicht zu vermeiden, daß Überspannungen in den Transverter eindringen und Überschläge am Kollektor hervorrufen. Aus diesen Gründen wird der Transverter im Freileitungsbetrieb die Betriebssicherheit eines Transformators niemals erreichen. Da die Kosten einer Gleichstromfreileitung nicht wesentlich unter die einer Drehstromleitung bei sonst gleichen Bedingungen gedrückt werden können, kommt der Transverter auch hier nicht in Frage.

Wesentlich anders liegen die Dinge bei einer Kraftübertragung mit Kabeln. Dort können bei zweckmäßiger Ausbildung der Schaltanlagen die Überspannungen klein gehalten werden und atmosphärische kommen nicht vor. Kabel lassen sich auch so ausführen, daß ein darin entstehender Fehler vor Ausbildung des Kurzschlusses bemerkt wird. Dann ist die Übertragung mit Gleichstrom ebenso sicher wie die mit Drehstrom. Gleichstromkabel werden auch trotz höherer Kupferkosten bei Übertragung gleicher Leistung bei derselben Spannung und denselben Kupferverlusten infolge der erheblich geringeren Isolationskosten und der leichteren Verlegung erheblich billiger als Drehstromkabel. Es muß dann einen Punkt geben, wo die Kraftübertragung mit Transvertern im Gleichstrombetrieb billiger wird als die mit Drehstrom, denn die sicher größeren Transverterkosten werden durch die geringeren Kabelkosten bei zunehmender Leitungslänge ausgeglichen.

Literaturverzeichnis.

A. Beschreibung des Transverters.

1. Zeitschrift Engineering 1922, S. 592 und 1924, S. 563.
2. Zeitschrift Electrician 1924, Nr. 564 vom 9. 5.
3. Zeitschrift E. T. Z. 1924, S. 659 von Oelschläger.
4. Zeitschrift Z. d. V. d. I. 1924, S. 1061 von Marschall.
5. Englische Patentschrift Nr. 140853; 150824; 150825; 180045; 182895.

B. Stromwendung.

1. Arnold, Gleichstrommaschine. Verlag Springer.
2. Richter, Elektrische Maschinen Bd. 1. Verlag Springer.
3. Dreyfuß, Ein neuer Weg zum Ausbau der Kommutierungstheorie. Archiv für Elektrotechnik 1923.
4. Walsemann, Zur Theorie der Stromwendung. E. T. Z. 1922, S. 1333.

C. Verschiedenes.

1. Günther-Schulze, Über die dielektrische Festigkeit. Verlag Kösel und Pustet, München.
2. Berger, Durchschlag fester Isolierstoffe als Folge ihrer Erwärmung. Bulletin des S. E. V. 1926, Heft 2.
3. Grünewald, Durchschlagsfestigkeit .... A. f. E. 1923, S. 79.
4. Grünewald, Durchschlag von Hartpapier-Isolation .... E. T. Z. 1927, Heft 4.
5. Vidmar, Transformatoren. Verlag Springer.
6. Vidmar, Der wirtschaftliche Aufbau der elektrischen Maschinen. Verlag Springer.

Abgeschlossen am 10. April 1928.

Archiv für Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Prof. Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen
Verlag von Julius Springer in Berlin

XIX. Band 30. April 1928 5./6. Heft

Inhaltsverzeichnis.

Seite

E. Flegler, Die Wirkungsweise von Überspannungschutzvorrichtungen nach Untersuchungen mit dem Kathodenoszillographen . . . 527
H. Hausrath, Verfahren und Vorrichtungen zur Widerstandseichung mittels kalibrierbarer Eichgeräte . . . 567
H. Hausrath und R. v. Freydorf, Verfahren und Gerät zur Messdrahteichung . . . 575
W. Grüning, Der Transverter, ein Hochspannungs-Drehstrom-Gleichstrom-Umformer . . . 579

Preis RM 8.40

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift" nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift" infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden erbeten unter der Adresse: Professor Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

Die Herren Verfasser werden infolge der gewaltig gestiegenen Unkosten gebeten, durch kurze und klare Fassung ihrer Mitteilungen und durch Beschränkung auf das Wesentliche an einer Herabminderung der Druckkosten mitzuwirken.

Nach einem Vorschlag des Elektrotechnischen Vereins sollen künftig von allen Archivarbeiten kurze Eigenberichte in der Elektrotechnischen Zeitschrift veröffentlicht werden. Die Herren Mitarbeiter werden gebeten, solche Eigenberichte, deren Umfang mit Rücksicht auf die heutigen Druckkosten 1/10 der Archivarbeit nicht überschreiten soll, spätestens bei der Korrektur einzusenden, damit sie gleichzeitig mit der Archivarbeit in der Elektrotechnischen Zeitschrift erscheinen können.

Es ist erwünscht, daß sich die Verfasser bei ihren Bezeichnungen an die Vorschläge des A. E. F. halten.

Das **„Archiv für Elektrotechnik"** erscheint vom Jahrgang 1923 (Band XII) ab in einzeln berechneten Heften. Der Preis eines Heftes wird sich nach dem Umfang desselben und den entstandenen Herstellungskosten richten.

Abonnenten, die mehrere Exemplare des „Archiv für Elektrotechnik" beziehen, erhalten das erste Stück zum Ladenpreis, jedes weitere im Abonnement bezogene Stück mit einem Nachlaß von 40 %.

Die Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins, sowie die Bezieher der „Elektrotechnischen Zeitschrift" erhalten auf den Bezugspreis einen Nachlaß von 25 % für das erste, einen Nachlaß von 40 % für jedes weitere von ihnen im Abonnement bezogene Exemplar.

Der Bezug kann durch jede Buchhandlung, sowie durch Julius Springer, Sortimentsbuchhandlung, Berlin W 9, Postschließfach, erfolgen.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstr. 23/24.

Bank- und Postscheckkonten:

für Anzeigen, Beilagen, Sonderdrucke:
Reichsbank-Girokonto, Deutsche Bank, Depositenkasse C, Berlin W 9, Postscheckkonto Berlin Nr. 118 935 Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9

für Bezug von Büchern, Zeitschriften u. einzelnen Heften:
Disconto-Gesellschaft, Depositen-Kasse, Berlin W 9, Potsdamer Str. 129/30, Postscheckkonto Berlin Nr. 14 385 Julius Springer, Sortimentsbuchhandlung, Berlin W 9

Fernsprecher: Amt Kurfürst 6050, 6053. — **Drahtanschrift:** Springerbuch Berlin.

Voranzeige der in den nächsten Heften erscheinenden Arbeiten siehe 3. Umschlagseite.

Voranzeige.

In den nächsten Heften des Archivs für Elektrotechnik werden voraussichtlich folgende Arbeiten erscheinen:

W. Rogowski, Stoßspannung und Durchschlag bei Gasen.
H. Jacobs, Entladungsformen.
W. Grösser, Über einige elektrostatische Probleme des Hochspannungstransformators.
W. Grösser und **H. Eckstein,** Methode zur absoluten Spannungsmessung von hochgespanntem Gleichstrom und von Scheitelwerten hochgespannten Wechselstromes.
L. Dreyfus, Theorie der zusätzlichen Eisenverluste in Drehstromasynchronmotoren.
W. Hubmann, Dielektrische Messungen in einem Cellonkondensator bei mittleren Frequenzen.
J. Dantscher, Untersuchungen an der Doppelgitterröhre in Raumladungsnetzschaltung.
E. Rappel, Über das Anlaufmoment von Einankerumformern bei gleichstromseitigem Anlauf und zugeschalteter Transformatorsekundärseite.
H. Hess, Zur Theorie des kompensierten Asynchronmotors.
G. Hauffe, Blindverbrauchsmessung im Drehstromnetz.
A. Leonhard, Die selbsterregte Drehstromerregermaschine mit kurzgeschlossener Ständerwicklung.
P. M. Pflier, Über die Regelungssysteme elektrischer Kraftfahrzeugbeleuchtungen.
P. Böning, Zur Theorie des elektrischen Durchschlags. I. Die Durchschlagsfunktion. II. Das Minimum der mittleren Durchbruchfeldstärke bei Isolierstoffen. III. Die Verzögerung des Durchschlags.
R. Schroeder, Ein Elektrometer für Messungen bis zu sehr hohen Spannungen.
M. Vidmar, Eine neue Stromkraftgefahr.
W. A. Tolwinski und **S. M. Hochberg,** Asynchrone Betriebsweisen der Drehstrominduktionsmaschine bei doppelter Speisung von ein und demselben Netz.
E. Friedländer, Einige Ergänzungen und Berichtigungen zum Problem der Kippschwingungen.
C. R. Burch und **W. Ryland Davis,** Über eisenlose Induktionsöfen.
W. Geyger, Wechselstrommessungen an Selenzellen nach der Kompensationsmethode.
W. Seiz, Die Kommutatorkaskade für konstante Leistung.
E. Sommerfeld, Über einen Kathodenoszillographen hoher Spannungsempfindlichkeit.
W. Rogowski, E. Sommerfeld und **W. Wolman,** Eine zweite Bauart eines Kathodenoszillographen hoher Empfindlichkeit.
H. Nützelberger, Erwiderung zum Aufsatz Hauffe „Drehstromleistungsmessung in Aronschaltung mit Meßwandler".
H. Schiller, Der Einfluß der Nuten auf die Spannungskurve von Drehstromgeneratoren.
F. Eisner, Über punktförmige Aufnahmen von Wechselstromkurven, insbesondere bei höherer Frequenz.
U. Retzow, Durchschlagspannung und Durchschlagfestigkeit.
A. Nikuradse, Untersuchungen von Spitzenentladungen in Transformatorenölen.
W. Kieser, Über das dielektrische Verhalten einiger Flüssigkeiten bei tiefen Drucken.
F. Schierl, Zwei Verstärker mit Ohmscher Rückkopplung in theoretischer Behandlung.
R. Rücklin, Ein experimenteller Beitrag zum Spulenproblem.
W. Schilling, Der Einfluß der Nuten auf die Spannungskurve von Drehstromgeneratoren.
A. Byk, Verlängerungsleitungen zur elektrischen Ergänzung von Pupinkabeln.
W. Rogowski und **R. Tam,** Quecksilberlampe und Radium als Vorionisatoren. Ihr Einfluß auf den elektrischen Funken.
L. Dreyfus, Theorie der Ausgleichsvorgänge bei Kurzschlüssen des Einankerumformers.
A. Thomälen, Zum Aufsatz von G. Bols „Drehzahl und Phasenregelung mittels Frequenzumformer".

Infolge des Stoffandranges werden die nächsten Hefte in rascherer Folge erscheinen.

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg